

УДК 536.65 : 536.25

А. Е. Редников, Ю. С. Рязанцев

## О ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОМ ДВИЖЕНИИ КАПЛИ С ОДНОРОДНЫМ ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

В стоксовом приближении при малом числе Пекле получено приближенное аналитическое решение задачи о распределении скорости и температуры при равномерном движении капли с однородным распределением внутренних источников (стоков) тепла. Для случая линейной зависимости поверхностного натяжения капли от температуры показано, что термокапиллярный эффект, связанный с движением капли, может приводить к появлению как силы тяги, так и силы сопротивления.

Наличие градиента температуры на поверхности капли обуславливает возникновение градиента силы поверхностного натяжения и может вызывать движение капли. Известны примеры такого движения в случае, когда приводящая к движению капли несимметрия распределения температуры определяется внешними источниками и не связана с движением (например, [1—4]). Существенно отличная ситуация, когда неоднородное распределение температуры на поверхности капли есть следствие ее собственного движения, впервые отмечена в работе [5], в которой рассматривалась капля с поверхностной экзо(эндо)термической реакцией, и в дальнейшем изучена в [6, 7].

В данной работе исследуется еще один пример термокапиллярного дрейфа капли, в котором несимметрия температурного поля возникает только благодаря движению капли и в свою очередь вызывает это движение.

Пусть капля вязкой несжимаемой жидкости, внутри которой действуют равномерно распределенные источники (стоки) тепла постоянной мощности, находится в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. Наличие источников (стоков) тепла внутри капли можно связать, например, с протеканием объемной химической реакции или с процессом радиоактивного распада вещества капли. Очевидно, что если капля находится в покое, то температура во всех точках ее поверхности будет постоянной, термокапиллярные силы будут равны нулю. Чтобы установить возможность указанного термокапиллярного движения, рассмотрим задачу об установившемся движении капли в стоксовом приближении. Решение этой задачи позволит найти распределения скорости и температуры в капле и окружающей ее среде, а также получить выражение для действующей на каплю силы, обусловленной вязкими и термокапиллярными напряжениями. Отличие величины этой силы от силы Стокса определит степень проявления несимметрии температурного поля и термокапиллярных сил и условия существования ее термокапиллярного дрейфа.

В системе отсчета, связанной с центром масс капли, задача сводится к стационарному обтеканию капли плоскопараллельным потоком жидкости. Предполагается, что капля сохраняет сферическую форму. Распределения скорости и температуры обладают аксиальной симметрией относительно оси, проходящей через центр капли в направлении скорости набегающего потока, поэтому при анализе используется сферическая система координат, в которой радиус  $r$  отсчитывается от центра капли, а угол  $\theta$  — от направления скорости набегающего потока. Плотности, вязкости, теплопроводности, теплоемкости веществ капли и внешней

среды принимаются постоянными, а коэффициент поверхностного натяжения — линейной функцией температуры.

В рамках сформулированных допущений уравнения и граничные условия для скорости и температуры вне и внутри капли запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 & -\rho_i^{-1} \nabla p_i + \mathbf{g} + \mathbf{v}_i \Delta \mathbf{v}_i = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0 \\
 & (\mathbf{v}_1 \nabla) T_1 = \chi_1 \Delta T_1 \\
 & (\mathbf{v}_2 \nabla) T_2 = \chi_2 \Delta T_2 + Q, \quad Q = q / (c_{p2} \rho_2) \\
 & r = a, \quad v_{r1} = v_{r2} = 0, \quad v_{\theta 1} = v_{\theta 2} \\
 & \frac{p_2 - p_1}{2} = \mu_2 \frac{\partial v_{r2}}{\partial r} - \mu_1 \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + \frac{\sigma}{a} \\
 & \mu_1 \left( \frac{\partial v_{\theta 1}}{\partial r} - \frac{v_{\theta 1}}{r} \right) - \mu_2 \left( \frac{\partial v_{\theta 2}}{\partial r} - \frac{v_{\theta 2}}{r} \right) + \frac{1}{a} \frac{d\sigma}{dT} \frac{dT_1}{d\theta} = 0 \\
 & T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = 0 \\
 & r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{v}_1 \rightarrow U_\infty \cos \theta \mathbf{e}_r - U_\infty \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad T_1 \rightarrow T_\infty \\
 & r = 0, \quad |\mathbf{v}_2| < \infty, \quad T_2 < \infty
 \end{aligned} \tag{1}$$

Индексы  $i = 1, 2$  относятся к внешней жидкости и капле соответственно,  $U_\infty$  — скорость набегающего потока,  $\mathbf{g}$  — вектор гравитационных сил ( $U_\infty$  и  $|\mathbf{g}|$  должны быть связаны так, что полная сила, действующая на каплю, равна нулю),  $\mathbf{v}_i, p_i, T_i, \rho_i$  — скорость, давление, температура и плотность,  $T_\infty$  — температура вдали от капли,  $\mu_i, \nu_i, \lambda_i, \chi_i$  — коэффициенты динамической и кинематической вязкости, теплопроводности и температуропроводности,  $q$  — постоянная мощность источников (стоков) тепла в единице объема капли,  $c_{pi}$  — теплоемкость,  $a$  — радиус капли,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\theta$  — орты сферической системы координат.

После введения функции тока и перехода к безразмерным переменным уравнения и граничные условия (1) запишутся в виде

$$E^4 \psi_i = 0, \quad E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1 - \mu^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}, \quad \mu = \cos \theta \tag{2}$$

$$r = 1, \quad \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \partial \psi_1 / \partial r = \partial \psi_2 / \partial r \tag{3}$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \psi_1 \rightarrow r^2 (1 - \mu^2) / 2, \quad r = 0, \quad \psi_2 / r^2 < \infty \tag{3}$$

$$r = 1, \quad \left( 2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (\psi_1 - \beta \psi_2) = M (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} \tag{4}$$

$$\frac{\operatorname{Pe}}{r^2} \frac{\partial (\psi_1, \varphi_1)}{\partial (r, \mu)} = \Delta \varphi_1 \tag{5}$$

$$\frac{\kappa^{-1} \operatorname{Pe}}{r^2} \frac{\partial (\psi_2, \varphi_2)}{\partial (r, \mu)} = \Delta \varphi_2 + \delta^{-1}$$

$$r = 1, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \partial \varphi_1 / \partial r = \delta \partial \varphi_2 / \partial r \tag{6}$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \varphi_1 \rightarrow 0, \quad r = 0, \quad \varphi_2 < \infty$$

$$v_{ri} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta}, \quad v_{\theta i} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_i}{\partial r}$$

$$\operatorname{Pe} = \frac{U_\infty a}{\chi_1}, \quad \kappa = \frac{\chi_2}{\chi_1}, \quad \beta = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \delta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$\varphi_i = \frac{\lambda_1 (T_i - T_\infty)}{qa^2}, \quad M = \frac{qa^2}{\lambda_1 \mu_1 U_\infty} \frac{d\sigma}{dT}$$

Расстояние отнесено к  $a$ , функция тока — к  $U_\infty a^2$ ,  $M$  — число Марангони.

Решение задачи (2) с граничными условиями (3) имеет вид [8]

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \left(r^2 + Ar - \frac{A+1}{r}\right) \frac{1-\mu^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} A_n (r^{-n+3} - r^{-n+1}) G_n(\mu) \\ \psi_2 &= \left(A + \frac{3}{2}\right) (r^4 - r^2) \frac{1-\mu^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} A_n (r^{n+2} - r^n) G_n(\mu)\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь  $G_n(\mu)$  — функция Гегенбауэра первого рода порядка  $n$  степени  $-1/2$ . Постоянные  $A, A_3, A_4, \dots$  остаются пока не определенными и должны быть найдены из условия (4) в ходе решения задачи о распределении температуры.

Предполагая, что числа  $Pe$  и  $\kappa^{-1}Pe$  малы, найдем приближенное решение тепловой задачи методом сращиваемых асимптотических разложений (например, [9]), ограничившись членами нулевого и первого порядка. Решение во внешней области, внутренней области и внутри капли соответственно представится в следующем виде:

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + Pe\varphi_1^{(1)}, \quad \varphi_1 = \varphi_{10} + Pe\varphi_{11}, \quad \varphi_2 = \varphi_{20} + Pe\varphi_{21} \quad (8)$$

Последовательно определяя нулевые и первые члены разложений (8) из уравнений (5), в которых функции тока заданы выражениями (7), с граничными условиями (6), и используя условие сращивания внутреннего и внешнего разложения, получим

$$\begin{aligned}\varphi_{10} &= \frac{1}{3r}, \quad \varphi_{20} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2\delta} (1 - r^2)\right) \\ \varphi_1^{(0)} &= 0, \quad Pe \varphi_1^{(1)} = \frac{1}{3r} \exp \frac{Pe r (\mu - 1)}{2} \\ \varphi_{11} &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A}{r} + \frac{A+1}{2r^3}\right) - (\delta + 2)^{-1} \left[ \frac{1}{4} (5A + 3) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{4} \delta (A + 1) + \frac{2}{35} \kappa^{-1} \left(\frac{3}{2} + A\right)\right] \frac{1}{r^2} \right\} \mu + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ K_{n1} \frac{1}{r^{n+1}} + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{(n+1)r^{n+2}} + \frac{1}{nr^n} \right) \right\} A_{n+1} P_n(\mu)\end{aligned}\quad (10)$$

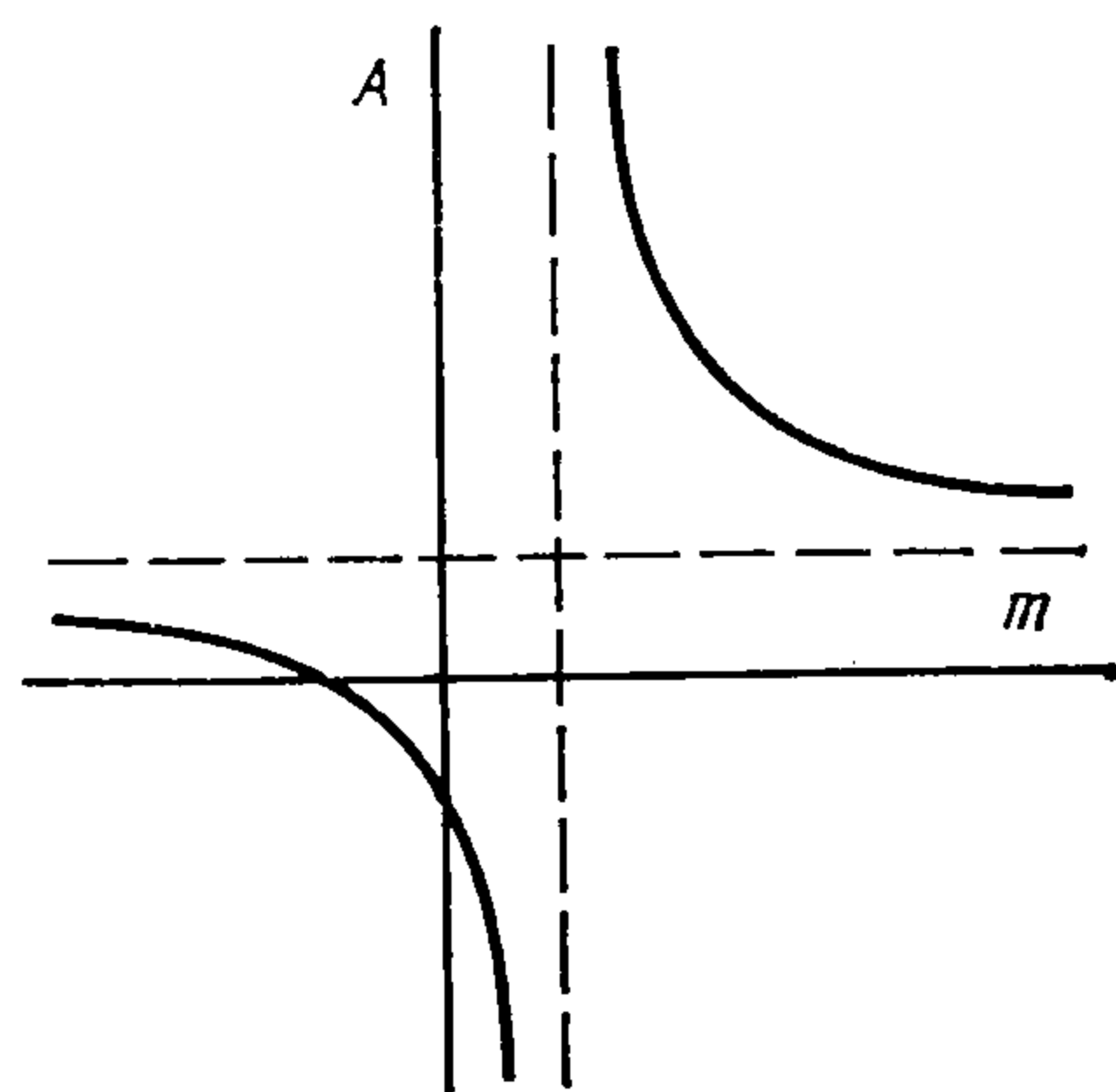
$$\begin{aligned}\varphi_{21} &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left\{ \left[ \frac{1}{4} (A + 3) - \kappa^{-1} \left(\frac{3}{2} + A\right) \frac{18\delta^{-1} + 17}{140} \right] (2 + \delta)^{-1} r + \right. \\ &\quad \left. + \kappa^{-1} \left(\frac{3}{2} + A\right) \delta^{-1} \left(\frac{1}{10} r^3 - \frac{1}{28} r^5\right) \right\} \mu + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ K_{n2} r^n - \frac{\delta^{-1} \kappa^{-1}}{6} \left( \frac{r^{n+4}}{4n+10} - \frac{r^{n+2}}{2n+3} \right) \right\} A_{n+1} P_n(\mu)\end{aligned}$$

Здесь  $P_n(\mu)$  — полином Лежандра первого рода степени  $n$ ,  $K_{n1}, K_{n2}$  — выражения, зависящие от  $n, \delta, \kappa$ , которые ввиду громоздкости не приводятся.

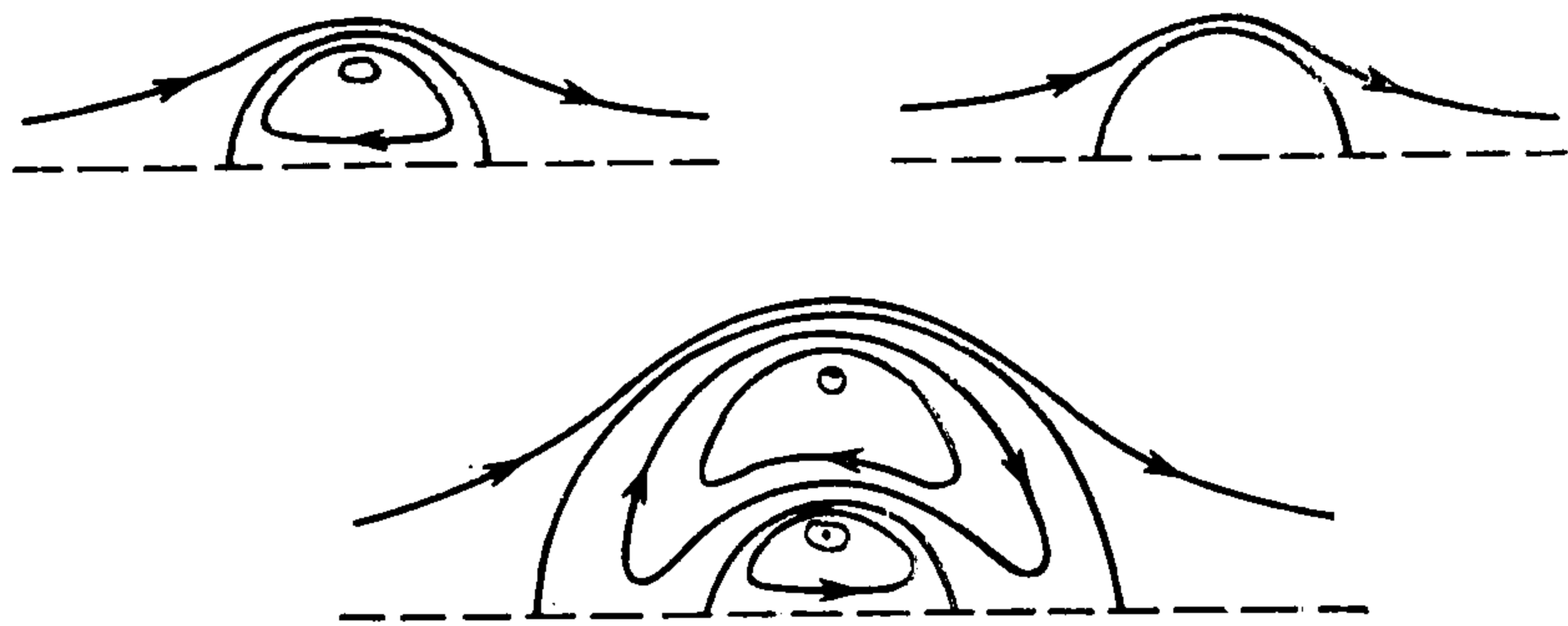
Подставляя в (4) выражения (7), (9), (10), получим значения постоянных  $A, A_n$ :

$$\begin{aligned}A &= - \left[ m \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{35} \kappa^{-1} \right) + 1 + \frac{3}{2} \beta \right] \left[ m \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{35} \kappa^{-1} \right) + 1 + \beta \right]^{-1} \\ m &= - \frac{M Pe}{9(\delta + 2)}, \quad A_n = 0, \quad n = 3, 4, \dots\end{aligned}\quad (11)$$

Характер зависимости  $A$  от параметра  $m$  показан на фиг. 1. В зависимости от значения параметра  $\kappa^{-1}$  асимптоты графика могут смещаться в другие полуплоскости.



Фиг. 1



Фиг. 2

Поскольку обычно коэффициент поверхностного натяжения убывает с ростом температуры, то  $m > 0$  соответствует тепловыделению, а  $m < 0$  — теплопоглощению.

Сила, действующая на каплю за счет вязких и термокапиллярных напряжений, равна [8]

$$F = -4\pi\mu_1 a A U_\infty \quad (12)$$

Отметим, что сила (12) вычислена в предположении о равномерном движении капли, которое возможно только в случае, если полная сила, действующая на каплю, равна нулю. Поскольку сила (12) пропорциональна скорости и обращается в нуль вместе с ней, для реализации случая равномерного движения капли следует предположить наличие некоторой сторонней силы, уравновешивающей силу (12).

В зависимости от значений параметров сила (12) может быть как силой сопротивления (в этом случае для поддержания движения необходима сила, например сила тяжести, действующая в направлении скорости), так и силой тяги (тогда для поддержания движения должна существовать сила, действующая в направлении, противоположном скорости).

Возможна и другая интерпретация полученных результатов, когда заданной считается действующая на каплю внешняя сила, например сила тяжести. В этом случае из равенства силы (12) внешней силе может быть найдена скорость движения капли.

Различным значениям постоянной  $A$  соответствуют различные качественные картины обтекания капли (фиг. 2). При  $A > -3/2$  картина обтекания аналогична обтеканию по Рыбчинскому — Адамару. С уменьшением величины  $A$  интенсивность циркуляции жидкости внутри капли уменьшается и при  $A = -3/2$  обращается в нуль. При дальнейшем уменьшении ( $A < -3/2$ ) возникает циркуляционная зона вокруг капли, внешний радиус этой зоны определяется соотношением

$$r_c = 1/2 |A + 1| [1 + (1 + 4/|A + 1|)^{1/2}]$$

Направление внутренней циркуляции становится противоположным по отношению к соответствующему направлению в случае Рыбчинского — Адамара. При этом, как следует из (12), действующая на каплю сила сопротивления превышает силу Стокса, действующую на твердую сферу.

В предельном случае  $\beta \rightarrow \infty$  (большая вязкость вещества капли) термокапиллярный эффект не влияет на движение,  $A \rightarrow -3/2$ , капля будет обтекаться как твердая сфера и из (12) получается закон Стокса. При  $M = 0$  (отсутствие источников тепла или независимость поверхностного натяжения от температуры) или  $\delta \rightarrow \infty$  (большая теплопроводность

вещества капли) термокапиллярный эффект отсутствует, поскольку температура постоянна вдоль поверхности, из (7), (12) с учетом (11) получаются обычные выражения для обтекания капли и действующей на нее силы сопротивления [8].

Отметим, что соотношения (11) для постоянных  $A_n$  ( $n = 3, 4, \dots$ ) не является универсальным в том смысле, что для каждого номера  $n = 3, 4, \dots$  существуют такие выделенные значения параметра  $m$  (обозначим их  $m_n$ ,  $n = 3, 4, \dots$ ), при которых соответствующая постоянная  $A_n$  может быть не равной нулю. При  $m = m_n$  алгебраическое уравнение для определения соответствующей этому номеру постоянной  $A_n$  сводится к виду  $0 \cdot A_n = 0$  и постоянная  $A_n$  может принимать произвольные значения. Дальнейшее исследование этого вопроса возможно лишь на основе приближений более высокого порядка по числам Рейнольдса и Пекле.

При некоторых значениях параметра  $m = m_*$  и  $m = m_{**}$  постоянная  $A$  может обращаться соответственно в нуль или в бесконечность. Если  $A = 0$ , то сила, действующая на каплю за счет вязких и термокапиллярных напряжений, обращается в нуль и в рассматриваемом здесь приближении проведенный анализ корректен только для случая отсутствия гравитации, при этом скорость движения может быть произвольной, а ее конкретизацию необходимо провести на основе приближений более высокого порядка. Если задана ненулевая массовая сила, то проведенный анализ будет некорректен для значений параметра  $m$  из некоторой окрестности значения  $m = m_*$ , при уменьшении величины массовой силы эта окрестность также уменьшается и в пределе стягивается в точку.

Если  $A \rightarrow \infty$  ( $m = m_{**}$ ), то в любом конечном поле тяжести капля будет оставаться в покое (т. е.  $U_\infty = 0$ ), при этом течение вне и внутри капли в размерных переменных представится в виде

$$\psi_1 = \gamma \left( \frac{r}{a} - \frac{a}{r} \right) (1 - \mu^2), \quad \psi_2 = \gamma \left( \left( \frac{r}{a} \right)^4 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) (1 - \mu^2)$$

$$\gamma = g (\rho_2 - \rho_1) a^4 / 6\mu_1$$

Здесь  $g$  — величина ускорения силы тяжести ( $g > 0$ , если сила тяжести направлена по оси, от которой отсчитывается угол  $\theta$ ,  $g < 0$  — в противоположном случае).

В результате этого движения на каплю действует сила, компенсирующая массовую силу. При другом подходе к постановке задачи, когда скорость  $U_\infty$  считается заданной, а необходимая для поддержания движения массовая сила вычисляется из соотношения (12), проведенный в данной работе анализ будет некорректным для значений параметра  $m$  из некоторой окрестности значения  $m = m_{**}$ , при уменьшении скорости эта окрестность также уменьшается и в пределе стягивается в точку. Замечания, связанные с обращением постоянных  $A$ ,  $A_n$  ( $n = 3, 4, \dots$ ) в нуль и постоянной  $A$  в бесконечность, можно отнести также к работам [5, 6, 10].

При формулировке задачи (2)—(6) было опущено граничное условие для нормальных напряжений, которое не потребовалось при нахождении обтекания капли. Распределение давления также получается без его использования [8]. Можно показать, что при подстановке уже известных решений для функции тока и давления данное граничное условие обращается в тождество. Это означает, что в рассматриваемом приближении капля остается строго сферической и анализ ее формы необходимо проводить на основании приближений более высокого порядка.

Наличие силы тяги, пропорциональной скорости, может служить указанием на неустойчивость состояния покоя или равномерного движения капли, другими словами, при тех значениях параметров задачи, при которых постоянная  $A$  положительна, найденные стационарные режимы движения будут, по-видимому, неустойчивыми. При этом можно предположить наличие других стационарных режимов движения, которые принципиально не находятся в рамках стоксовости течения и малости чисел  $Re$  и  $\kappa^{-1} Re$  (за исключением близости к нулю постоянной  $A$ ), и чтобы их найти, необходимо избавиться по крайней мере от одного из данных предположений. В частности, отсюда следует, что первоначально покоящаяся капля в отсутствие гравитации не может сохранять состояние покоя и начнет дрейфовать в случайном направлении.

По существу выше рассмотрена устойчивость моды, соответствующей функции Гегенбауэра  $G_2(\mu)$  (в выражениях для функции тока (7)) и полиному Лежандра  $P_1(\mu)$  (в выражениях для температуры (10)), поскольку только она дает вклад в силу (12) и влияет на поступательное движение капли. Однако следует иметь в виду, что неустойчивость может развиваться и в модах более высокого порядка ( $G_{n+1}(\mu)$  и  $P_n(\mu)$ ,  $n \geq 2$ ), о чем, в частности, свидетельствует отличие от нуля коэффициентов  $A_n$  ( $n \geq 3$ ) при некоторых значениях параметров задачи, поэтому отрицательность постоянной  $A$ , вообще говоря, не достаточна, а только необходима для устойчивости. Более подробное обсуждение этих вопросов выходит за рамки данной работы.

В заключение укажем еще две задачи о термокапиллярном движении капли, решения которых в принятых здесь упрощающих предположениях могут быть установлены непосредственно из полученных выше результатов. Рассмотрим термокапиллярное движение капли, когда источники (стоки) тепла постоянной интенсивности  $J$  расположены не в объеме, а на ее поверхности. Нетрудно показать, что результаты, соответствующие данному случаю, получаются, если во всех соотношениях, относящихся к случаю однородного внутреннего тепловыделения, формально положить

$$\kappa^{-1} = 0, \quad q = 3J/a$$

Рассмотрим также термокапиллярное движение капли, когда источники (стоки) тепла постоянной мощности расположены не внутри, а вне капли. Хотя поле температуры при таком распределении тепловых источников будет нестационарным, произведя в исходной системе уравнений замену  $T_i' = T_i - T_0 - (q'/(c_{p1}\rho_{p2}))(t - t_0)$ , учитывающую однородный нагрев всей среды, нетрудно установить, что все полученные ранее результаты применимы и в данном случае, с той лишь разницей, что величину  $q$  теперь надо понимать как

$$q = -\alpha q', \quad \alpha = c_{p1}\rho_{p2}/(c_1\rho_1)$$

Здесь  $T_0$  — температура вдали от капли в некоторый момент времени  $t_0$ ,  $t$  — время,  $q'$  — постоянная мощность источников (стоков) тепла в единице объема внешней жидкости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Young N. O., Goldstein J. S., Block M. G. The motion of bubbles in a vertical temperature gradient // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. Pt 3. P. 350—356.
2. Братухин Ю. К. Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 156—161.
3. Яламов Ю. И., Санасарян А. С. Движение капель в неоднородной по температуре вязкой среде // Инж.-физ. журн. 1975. Т. 28. № 6. С. 1061—1064.
4. Антановский Л. К., Копбосынов Б. К. Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ. 1986. № 2. С. 59—64.
5. Рязанцев Ю. С. О термокапиллярном движении реагирующей капли в химически активной среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 180—183.
6. Головин А. А. О влиянии поверхностного натяжения на движение реагирующих капель // Элементарные процессы в химически реагирующих средах. М.: МФТИ, 1985. С. 106—111.

7. Головин А. А., Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. О хемотермокапиллярном эффекте при движении капли в жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 1. С. 35—39.
8. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
9. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. 336 с.
10. Головин А. А., Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Хемотермокапиллярный эффект при движении капли в жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 1. С. 147—154.

Москва

Поступила в редакцию  
14.III.1988