

УДК 532.72:534.2

Н. А. Гумеров

## О СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ РАДИУСА КОНДЕНСИРОВАННОЙ КАПЛИ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Исследуются нелинейные эффекты теплообмена капли в паровой среде при периодическом изменении давления, вызываемом акустической волной, длина которой существенно превышает радиус капли. На основе замкнутой системы уравнений, описывающей сферически-симметричные процессы около одиночной капли [1], методом многих масштабов [2] получены асимптотические уравнения, описывающие поведение среднего радиуса капли в квадратичном по амплитуде поля приближении.

При исследовании распространения звука в смесях пара с каплями в линейной постановке [3] считается, что в результате периодических фазовых переходов радиусы капель пульсируют около стационарных положений. Однако вследствие проявления нелинейных эффектов теплообмена количества испарившейся и сконденсировавшейся жидкости за один период колебаний, вообще говоря, будут различаться («эффект выпрямленной теплопередачи» [4]). За время, равное большому числу периодов колебаний, средний радиус капли может заметно измениться, соответственно могут измениться такие важные параметры, характеризующие взвесь в целом, как массовое содержание дисперсной фазы и функция распределения капель по размерам.

**1. Постановка задачи.** Сферическая капля радиуса  $a$  расположена в безграничном пространстве, занятом паром, который рассматривается в рамках модели идеального совершенного газа. Пар и жидкость в невозмущенном состоянии находятся в равновесии, т. е.  $p_* = p_s(T_*)$ , где  $p$  и  $T$  — давление и температура, индексом  $s$  помечены параметры на линии насыщения, звездочкой — параметры невозмущенного состояния. При воздействии на эту систему акустических волн длиной  $L \gg a$  ( $L = 2\pi C_g/\omega$ ;  $C_g$  — скорость звука в паре,  $\omega$  — циклическая частота) можно считать, что в системе координат, связанной с центром капли, в области  $r \ll L$ , где  $r$  — радиальная координата, отсчитываемая от центра капли, распределение скоростей и температур в жидкости и в паре сферически симметрично, а давление зависит только от времени  $t$ :  $p = p(t)$  (гомобаричность [1]). В этом случае замкнутая система уравнений и граничных условий, описывающая теплообмен несжимаемой капли с паром в поле переменного давления, имеет вид [1]

$$\begin{aligned}
 p_g(t) &= R_g T_g(\eta, t) \rho_g(\eta, t), \quad \rho_l = \text{const} \\
 \rho_l c_l \left[ a^2 \frac{\partial T_l}{\partial t} - a \frac{da}{dt} \eta \frac{\partial T_l}{\partial \eta} \right] &= \lambda_l \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^2 \frac{\partial T_l}{\partial \eta} \right) \\
 \rho_g c_g \left[ a^2 \frac{\partial T_g}{\partial t} + a \left( w_g - \eta \frac{da}{dt} \right) \frac{\partial T_g}{\partial \eta} \right] &= \lambda_g \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^2 \frac{\partial T_g}{\partial \eta} \right) + a^2 \frac{dp_g}{dt} \\
 w_g &= \frac{w_{ga}}{\eta^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma p_g a} \left( \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial \eta} + \frac{Q_g}{\eta^2} \right) - \frac{a}{3\gamma p_g} \left( \eta - \frac{1}{\eta^2} \right) \frac{dp_g}{dt} \quad (1.1) \\
 T_\alpha|_{\eta=1} &= T_a, \quad Q_\alpha = -\lambda_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1}, \quad (\alpha = g, l), \quad \frac{\partial T_l}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{\partial T_g}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\infty} = 0 \\
 w_{l\alpha} &= \frac{da}{dt} + \frac{\xi}{\rho_l} \equiv 0, \quad w_{g\alpha} = \frac{da}{dt} + \frac{\xi}{\rho_{g\alpha}}, \quad Q_g - Q_l = -\xi l a \\
 \xi &= \frac{\beta [p_s(T_a) - p_g]}{\sqrt{2\pi R_g T_a}}, \quad p_s(T) = p_* \exp \left[ \frac{1}{k_s} \left( 1 - \frac{T_*}{T} \right) \right], \quad k_s = \frac{R_g T_*}{l}
 \end{aligned}$$

Здесь  $\rho$ ,  $w$ ,  $Q$ ,  $\xi$  — плотность, радиальная скорость, приведенный тепловой поток на межфазной границе и интенсивность испарения, отнесенная к единице поверхности;  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\gamma$ ,  $R_g$ ,  $l$  — величины, считающиеся постоянными, — теплопроводность, теплоемкость (для газа — при постоянном давлении), показатель адиабаты газа, газовая постоянная и удельная теплота парообразования;  $\beta(p_g, T_a)$  — коэффициент аккомодации, зависимость которого от давления и температуры полагается известной. Индексы  $g$  и  $l$  относятся соответственно к газу и к жидкости, параметры на межфазной границе снабжены индексом  $a$ . При записи (1.1) использовано пространственно-временное преобразование  $(r, t) \rightarrow (\eta, t)$ , где  $\eta = r/a(t)$ , позволяющее свести задачи из областей с переменной границей  $r = a(t)$  к задачам с границей фиксированной.

Далее будут изучаться решения системы (1.1) при периодических законах изменения давления около значения  $p_*$

$$p_g = p_* (1 + \varepsilon \varphi(t)), \quad \varphi(t) = \varphi(t + 2\pi/\omega), \quad |\varphi| \leq 1 \quad (1.2)$$

где  $\varphi(t)$  — периодическая функция, представимая в виде ряда Фурье. Относительная амплитуда возмущения давления считается малым параметром задачи:  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

**2. Метод решения.** Из системы (1.1) можно исключить радиальную скорость и плотность газа, а остальные неизвестные зависимые переменные искать в виде асимптотических рядов

$$\begin{aligned} T_a &= T_* (\theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots), & T_\alpha &= T_* (u_0^{(\alpha)} + \varepsilon u_1^{(\alpha)} + \varepsilon^2 u_2^{(\alpha)} + \dots) \\ a &= a_0 (1 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots), & Q_\alpha &= \lambda_\alpha T_* (q_0^{(\alpha)} + \varepsilon q_1^{(\alpha)} + \varepsilon^2 q_2^{(\alpha)} + \dots) \\ \xi &= \frac{\rho_{g*} \kappa_g}{a_0} (j_0 + \varepsilon j_1 + \varepsilon^2 j_2 + \dots) & \left( \kappa_\alpha &= \frac{\lambda_\alpha}{\rho_{\alpha*} c_\alpha}, \rho_{g*} = \frac{p_*}{R_g T_*}, \alpha = g, l \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для построения равномерно пригодных разложений воспользуемся методом многих масштабов [2], согласно которому функциональная зависимость неизвестных  $a_m$ ,  $u_m^{(l)}$ ,  $u_m^{(g)}$  и т. д. ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) от  $t$  рассматривается как зависимость от набора времен  $\{t_k\}$ ,  $t_k = \varepsilon^k t$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , т. е. оператор дифференцирования по  $t$  раскладывается в асимптотический ряд

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots \quad (2.2)$$

Функцию  $\varphi(t)$ , входящую в (1.2), следует считать функцией только от «быстрого» времени  $t_0$ .

Подставляя (1.2), (2.1), (2.2) в (1.1) и собирая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , можно видеть, что  $\theta_0 \equiv 1$ ,  $u_0^{(\alpha)} \equiv 1$ ,  $q_0^{(\alpha)} \equiv 0$  ( $\alpha = l, g$ ),  $j_0 \equiv 0$ ,  $a_0 = a_0(t_1, t_2, \dots)$ , а для определения  $m$ -го ( $m > 0$ ) приближения получается линейная неоднородная система

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{\kappa_g} \frac{\partial u_m^{(l)}}{\partial t_0} - \frac{k_\kappa}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^2 \frac{\partial u_m^{(l)}}{\partial \eta} \right) &= f_m^{(l)}, \quad u_m^{(l)}|_{\eta=1} = \theta_m, \quad \frac{\partial u_m^{(l)}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \\ \frac{a_0^2}{\kappa_g} \frac{\partial u_m^{(g)}}{\partial t_0} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^2 \frac{\partial u_m^{(g)}}{\partial \eta} \right) &= \\ = k_\gamma \frac{a_0^2}{\kappa_g} \frac{d\varphi}{dt_0} \delta_{m1} + f_m^{(g)}, \quad u_m^{(g)}|_{\eta=1} = \theta_m, \quad \frac{\partial u_m^{(g)}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\infty} = 0 \\ \frac{a_0^2}{\kappa_g} \frac{\partial a_m}{\partial t_0} + k_\rho j_m &= f_m^{(a)}, \quad j_m - \frac{a_0}{d_\sigma} \theta_m = -\frac{k_s a_0}{d_\sigma} \varphi \delta_{m1} + f_m^{(j)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$q_m^{(\alpha)} = - \frac{\partial u_m^{(\alpha)}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1}, \quad \alpha = g, l, \quad \frac{k_s}{k_\gamma} (q_m^{(g)} - k_\lambda q_m^{(l)}) + j_m = f_m^{(q)}$$

$$k_\gamma = 1 - 1/\gamma, \quad k_\rho = \rho_{g*}/\rho_l, \quad k_\lambda = \lambda_l/\lambda_g, \quad k_\kappa = \kappa_l/\kappa_g$$

$$d_\sigma = \kappa_g \sqrt{2\pi R_g T_* / (\beta_* l)}, \quad \beta_* = \beta(p_*, T_*)$$

Здесь  $\delta_{mk}$  — символ Кронекера,  $f_m^{(\alpha)}$  — функции, определяемые из низших, чем  $m$ , приближений ( $\alpha = l, g, a, j, q$ ).

Под  $t_0$ -периодическими функциями в дальнейшем подразумеваются функции, периодические по быстрому времени  $t_0$  и представимые в виде соответствующего ряда Фурье по  $t_0$

$$x(t_0, t_1, t_2, \dots) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x_n^\circ(t_1, t_2, \dots) e^{in\omega t_0} \right\} \quad (2.4)$$

где  $x_n^\circ$  — комплекснозначные функции (комплексные амплитуды).

Поиск решений (2.3) в классе  $t_0$ -периодических функций приводит к системам типа (2.3) для комплексных амплитуд, где оператор  $\partial/\partial t_0$  переходит в  $i\omega n$ . В частности, комплексные амплитуды распределений температур в жидкости и в газе удовлетворяют уравнениям

$$s_n u_{mn}^{(l)\circ} - \frac{k_\kappa}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^2 \frac{\partial u_{mn}^{(l)\circ}}{\partial \eta} \right) = f_{mn}^{(l)\circ}, \quad u_{mn}^{(l)\circ} \Big|_{\eta=1} = \theta_{mn}^\circ, \quad \frac{\partial u_{mn}^{(l)\circ}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \quad (2.5)$$

$$s_n u_{mn}^{(g)\circ} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^2 \frac{\partial u_{mn}^{(g)\circ}}{\partial \eta} \right) = k_\gamma s_n \varphi_n^\circ \delta_{m1} + f_{mn}^{(g)\circ}, \quad u_{mn}^{(g)\circ} \Big|_{\eta=1} = \theta_{mn}^\circ$$

$$\frac{\partial u_{mn}^{(g)\circ}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\infty} = 0 \quad s_n = s_n(t_1, t_2, \dots) = i\omega n a_0^2 / \kappa_g$$

Если модуль функции  $f_{mn}^{(g)\circ}(\eta, t_1, t_2, \dots)$  при любых  $\operatorname{Re} \{ \sqrt{s_n} \} \geq 0$  достаточно хорошо убывает при  $\eta \rightarrow \infty$  ( $|f_{mn}^{(g)\circ}| = o(\eta^{-2})$ ), то решения неоднородных задач (2.5) представимы в форме

$$u_{mn}^{(l)\circ} = \eta^{-1} [A_{mn} S_n(\eta) + G_{mn}^{(l)}(\eta)], \quad A_{mn} = (\theta_{mn}^\circ - G_{mn}^{(l)}(1)) / S_n(1)$$

$$u_{mn}^{(g)\circ} = k_\gamma \varphi_n^\circ \delta_{m1} + \eta^{-1} [B_{mn} e_n^-(\eta) + G_{mn}^{(g)}(\eta)], \quad B_{mn} = \theta_{mn}^\circ - G_{mn}^{(g)}(1) - k_\gamma \varphi_n^\circ \delta_{m1} \quad (2.6)$$

$$G_{mn}^{(l)}(\eta) = (k_\kappa s_n)^{-1/2} \int_0^\eta [C_n(\eta) S_n(x) - S_n(\eta) C_n(x)] x f_{mn}^{(l)\circ}(x) dx$$

$$G_{mn}^{(g)}(\eta) = \frac{1}{2} s_n^{-1/2} \left[ e_n^-(\eta) \int_1^\eta e_n^+(x) x f_{mn}^{(g)\circ}(x) dx + e_n^+(\eta) \int_\eta^\infty e_n^-(x) x f_{mn}^{(g)\circ}(x) dx \right]$$

$$S_n(\eta) = \operatorname{sh} \left( \eta \sqrt{\frac{s_n}{k_\kappa}} \right), \quad C_n(\eta) = \operatorname{ch} \left( \eta \sqrt{\frac{s_n}{k_\kappa}} \right),$$

$$e_n^\pm(\eta) = e^{\pm(\eta-1)\sqrt{s_n}}, \quad \operatorname{Re} \{ \sqrt{s_n} \} \geq 0$$

Отсюда можно найти комплексные амплитуды тепловых потоков

$$q_{mn}^{(l)\circ} = - \frac{\partial u_{mn}^{(l)\circ}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = - h_n^{(l)} \theta_{mn}^\circ + \frac{1}{k_\kappa} F_{mn}^{(l)}, \quad h_n^{(l)} = \sqrt{\frac{s_n}{k_\kappa}} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{s_n}{k_\kappa}} - 1$$

$$q_{mn}^{(g)\circ} = - \frac{\partial u_{mn}^{(g)\circ}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = h_n^{(g)} (\theta_{mn}^\circ - k_\gamma \varphi_n^\circ \delta_{m1}) - F_{mn}^{(g)}, \quad h_n^{(g)} = 1 + \sqrt{s_n} \quad (2.7)$$

$$F_{mn}^{(l)} = [S_n(1)]^{-1} \int_0^1 \eta f_{mn}^{(l)\circ} S_n(\eta) d\eta, \quad F_{mn}^{(g)} = \int_1^\infty \eta f_{mn}^{(g)\circ} e_n^-(\eta) d\eta$$

Таким образом, из (2.3), (2.4), (2.7) следует, что в  $m$ -м приближении неизвестные комплексные амплитуды  $a_{mn}$ ,  $\theta_{mn}^\circ$ ,  $j_{mn}$  удовлетворяют ли-

нейному неоднородному алгебраическому уравнению

$$L_n X_{mn} = Y_{mn} \quad (2.8)$$

$$L_n = \begin{vmatrix} s_n & 0 & k_p \\ 0 & -a_0 d_\sigma^{-1} & 1 \\ 0 & k_s k_\gamma^{-1} [h_n^{(g)} + k_\lambda h_n^{(l)}] & 1 \end{vmatrix}, \quad X_{mn} = \begin{vmatrix} a_{mn}^\circ \\ \theta_{mn}^\circ \\ j_{mn}^\circ \end{vmatrix}, \quad Y_{mn} = \begin{vmatrix} y_{mn}^1 \\ y_{mn}^2 \\ y_{mn}^3 \end{vmatrix}$$

$$y_{mn}^1 = f_{mn}^{(a)\circ}, \quad y_{mn}^2 = -k_s a_0 d_\sigma^{-1} \varphi_n^\circ \delta_{m1} + f_{mn}^{(j)\circ}$$

$$y_{mn}^3 = k_s \varphi_n^\circ h_n^{(g)} \delta_{m1} + k_s k_\gamma^{-1} [F_{mn}^{(g)} + k_\lambda k_\gamma^{-1} F_{mn}^{(l)}] + f_{mn}^{(q)\circ}$$

Пусть  $\omega \neq 0$ , тогда при  $n \neq 0$ , очевидно,  $\det L_n \neq 0$  и решение  $X_{mn}$  существует и единственно. При  $n = 0$  матрица системы вырождается, причем  $\text{rank} L_0 = 2$ . Необходимым и достаточным условием существования решения в этом случае будет условие  $\text{rank} M_0 = 2$ , где  $M_0$  — расширенная матрица системы при  $n = 0$ . Это условие можно записать в развернутой форме

$$\frac{1}{k_p} \left( \frac{k_\gamma}{k_s} + \frac{d_\sigma}{a_0} \right) f_{m0}^{(a)\circ} = (k_\gamma - k_s) \varphi_0^\circ \delta_{m1} + \frac{d_\sigma}{a_0} f_{m0}^{(j)\circ} + \frac{k_\gamma}{k_s} f_{m0}^{(q)\circ} + F_{m0}^{(g)} + \frac{k_\lambda}{k_\gamma} F_{m0}^{(l)} \quad (2.9)$$

$$F_{m0}^{(g)} = \lim_{s_n \rightarrow 0} F_{mn}^{(g)} = \int_0^\infty \eta f_{m0}^{(g)\circ} d\eta, \quad F_{m0}^{(l)} = \lim_{s_n \rightarrow 0} F_{mn}^{(l)} = \int_0^1 \eta^2 f_{m0}^{(l)\circ} d\eta$$

Итак, показано, что решение системы (2.3) в классе  $t_0$ -периодических функций существует только тогда, когда выполнено условие (2.9), которое фактически «управляет» поведением средних величин. Если условие (2.9) выполнено, то такое решение единственно с точностью до решения однородной системы (2.3), имеющего вид

$$a_m = a_m(t_1, t_2, \dots), \quad \theta_m \equiv j_m \equiv q_m^{(l)} = q_m^{(g)} \equiv 0, \quad u_m^{(l)} \equiv 0, \quad u_m^{(g)} \equiv 0$$

**3. Первое приближение. Стационарные пульсации.** Из (1.1), (1.2), (2.1)—(2.3) видно, что в первом приближении ( $m = 1$ ) функции  $f_1^{(\alpha)}$  и их комплексные амплитуды  $f_{1n}^{(\alpha)\circ}$  имеют вид

$$f_1^{(\alpha)} \equiv f_{1n}^{(\alpha)\circ} \equiv 0, \quad \alpha = j, q, g, l; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad f_1^{(a)} \equiv f_{10}^{(a)\circ} = -a_0 k_g^{-1} \partial a_0 / \partial t_1 \quad (3.1)$$

Условие существования  $t_0$ -периодических решений при  $m = 1$  дает

$$(a_0 + k_s k_\gamma^{-1} d_\sigma) \partial a_0 / \partial t_1 = -k_p k_s k_\gamma^{-1} (k_\gamma - k_s) \kappa_g \varphi_0^\circ \quad (3.2)$$

Это уравнение интегрируется:

$$1/2 a_0^2 + k_s k_\gamma^{-1} d_\sigma a_0 = -k_p k_s k_\gamma^{-1} (k_\gamma - k_s) \varphi_0^\circ \kappa_g t_1 + C(t_2, t_3, \dots) \quad (3.3)$$

Отсюда непосредственно видно, что при  $(k_\gamma - k_s) \varphi_0^\circ \neq 0$  средний радиус капли будет изменяться в масштабе «медленного» времени  $t_1$ . Следует отметить, что при  $\varphi_0^\circ \neq 0$  колебания давления совершаются не около среднего значения  $p_*$ , а около  $p_* (1 + \varepsilon \varphi_0^\circ)$ ; иными словами, система изначально находится не в равновесии, а слабо возмущена около этого положения. Величина  $k_\gamma - k_s$  представляет собой разность угловых коэффициентов касательных, проведенных к адиабате и к линии насыщения в точке  $(T_*, p_*)$  в плоскости  $(T, p)$ . Знак этой величины определяет, каким будет знак разности температуры в газе вдали от капли и температуры насыщения, к которой стремится температура поверхности капли.

Пусть теперь условие (3.2) выполнено, тогда у системы (2.3) при  $m = 1$  существуют  $t_0$ -периодические решения.

При  $n \neq 0$ , как следует из (3.1), компоненты вектора неоднородности  $Y_{1n}$  в (2.8) имеют вид  $y_{1n}^1 = 0$ ,  $y_{1n}^2 = -k_s a_0 \varphi_n^\circ d_\sigma^{-1}$ ,  $y_{1n}^3 = k_s \varphi_n^\circ h_n^{(g)}$ . Отсюда, пользуясь правилом Крамера, можно найти комплексные амплитуды  $a_{1n}^\circ$ ,  $\theta_{1n}^\circ$  и  $j_{1n}^\circ$

$$\begin{aligned} \alpha_{1n}^\circ &= -k_s \varphi_n^\circ \Delta_n^{(\alpha)} / \Delta_n, \quad \alpha = \theta, j, a; \quad \Delta_n = \det L_n \\ \Delta_n^{(j)} &= s_n a_0 k_\gamma^{-1} d_\sigma^{-1} [(k_\gamma - k_s) h_n^{(g)} - k_s k_\lambda^* h_n^{(l)}], \quad \Delta_n^{(a)} = -k_\rho s_n^{-1} \Delta_n^{(j)} \\ \Delta_n^{(\theta)} &= s_n (a_0 d_\sigma^{-1} + h_n^{(g)}), \quad \Delta_n = d_\sigma a_0^{-1} \Delta_n^{(j)} - \Delta_n^{(\theta)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

На фиг. 1 проиллюстрированы зависимости фазы  $\psi = \arg a_{11}^\circ$  и приведенной амплитуды  $A = k_\rho^{-1} |a_{11}^\circ|$  колебаний радиуса капли воды в паре при давлении  $p_* = 0,1$  МПа от частоты и среднего радиуса. Сплошные линии соответствуют расчетам с коэффициентом аккомодации  $\beta_* = 0,04$ .

Штриховые кривые рассчитаны при использовании квазиравновесной схемы фазового перехода (эта схема реализуется, если  $\beta$  формально устремить к бесконечности; при квазиравновесной схеме фазового перехода  $T_a = T_s(p_g)$  [1, 4]); в этом случае зависимость фазы и амплитуды колебаний от  $a_0$  и  $\omega$  входит в (3.4) в виде зависимости от единого автомодельного параметра  $\omega a_0^2 / \kappa_g$ . Кривые 1—4 соответствуют частоте  $\nu$ , равной 1, 10, 100, 1000 кГц. При уменьшении частоты сплошные кривые стремятся к штриховым, что означает большую «равновесность» фазового перехода при низких частотах, чем при высоких.

При больших радиусах  $a_0$  и фиксированной частоте  $\omega$  величина аргумента  $\psi$  стремится, как следует из (3.4), к своему предельному значению

$$\begin{aligned} \psi_\infty &= -\arctg(1 + K \omega^{1/2}); \\ \omega_\sigma &= 2\omega d_\sigma^2 / \kappa_g, \quad K = k_\gamma^{-1} k_s (1 + k_\lambda k_\kappa^{-1/2}) \end{aligned}$$

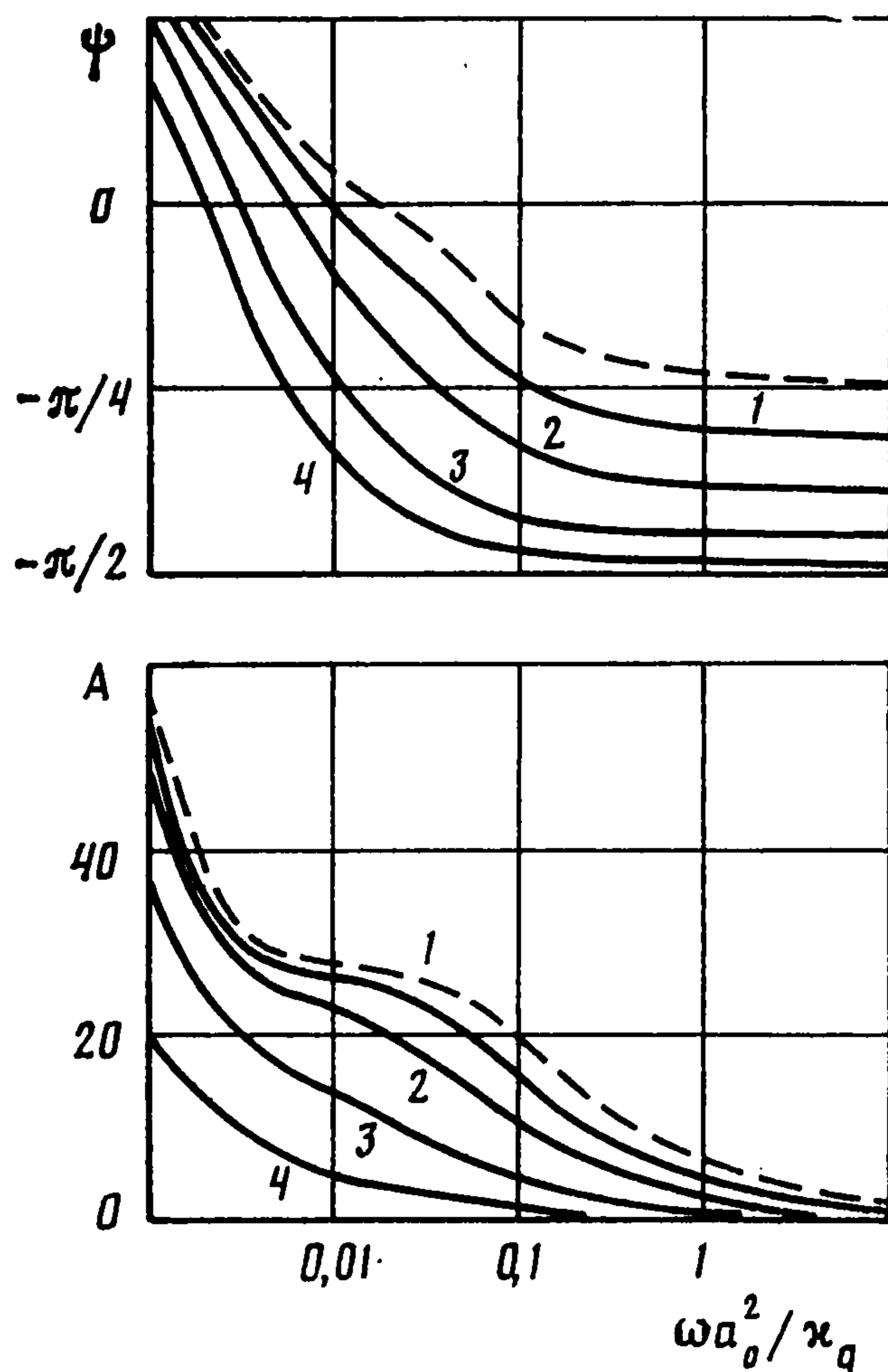
причем  $-\pi/4 \leq \psi_\infty \leq -\pi/2$ . В области малых значений  $\omega a_0^2 / \kappa_g$  амплитуда  $A$  растет обратно пропорционально  $\omega a_0^2$  ( $A \rightarrow k_s (k_\gamma - k_s) [(\omega a_0^2 / \kappa_g) (1 + k_s d_\sigma / a_0)]^{-1}$ ), а  $\psi \rightarrow \pi/2$ . В связи с этим следует отметить, что для корректности рассуждений надо считать выполненным ограничение на частоты, амплитуды и радиусы  $(\omega a_0^2 / \kappa_g) (1 + k_s d_\sigma / a_0) \gg \epsilon k_s (k_\gamma - k_s)$ . В противном случае член  $\epsilon a_1$  в соответствующем разложении (2.1) нельзя считать малым по сравнению с единицей.

Выражения для комплексных амплитуд распределений температур и теплового потока на межфазной границе со стороны газа согласно (2.6), (2.7), (3.1) имеют вид

$$\begin{aligned} u_{1n}^{(l)\circ} &= \theta_{1n}^\circ y_n(\eta), \quad u_{1n}^{(g)\circ} = k_\gamma \varphi_n^\circ + (\theta_{1n}^\circ - k_\gamma \varphi_n^\circ) z_n(\eta) \\ q_{1n}^{(g)\circ} &= h_n^{(g)} (\theta_{1n}^\circ - k_\gamma \varphi_n^\circ), \quad z_n(\eta) = \eta^{-1} e_n^-(\eta), \quad y_n(\eta) = \eta^{-1} S_n(\eta) / S_n(1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

При  $n = 0$  определитель системы равен нулю. Из (2.8) и условия (3.2), обеспечивающего совместность уравнений, решение находится с точностью до решения однородной системы

$$\theta_{10}^\circ = k_s \varphi_0^\circ \frac{k_\gamma (a_0 + d_\sigma)}{a_0 + k_s d_\sigma}, \quad j_{10}^\circ = k_s \varphi_0^\circ \frac{(k_\gamma - k_s) a_0}{a_0 + k_s d_\sigma}, \quad a_{10}^\circ = a_{10}^\circ(t_1, t_2, \dots) \quad (3.6)$$



Фиг. 1

Соотношения (3.4)—(3.6) определяют все гармоники искомым функций при  $m = 1$ . Тем самым задачу о пульсациях капли в первом приближении можно считать решенной.

Однако если система изначально находится в равновесии ( $\varphi_0^\circ = 0$ ), то, согласно (3.2), в первом приближении радиус капли будет совершать стационарные колебания ( $\partial a_0 / \partial t_1 = 0$ ), и из анализа первого приближения (линейный анализ) не удастся определить изменение среднего радиуса капли, поскольку он будет меняться в более «медленном», нежели  $t_1$ , масштабе (нелинейный эффект).

4. Уравнение динамики среднего радиуса капли. Далее считается, что  $\varphi_0^\circ = 0$ . В этом случае все искомые функции в первом приближении, кроме, быть может,  $a_{10}^\circ$ , от  $t_1$  не зависят. Для данной задачи, однако, следует полагать  $a_{10}^\circ = 0$ , поскольку в  $a_0$  вкладывается смысл среднего радиуса. Отсюда и из (1.1), (1.2), (2.1) — (2.3) находятся неоднородности  $f_2^{(\alpha)}$  ( $\alpha = a, j, q, g, l$ ) во втором приближении ( $m = 2$ )

$$\begin{aligned} f_2^{(a)} &= -\frac{a_0}{\kappa_g} \frac{\partial a_0}{\partial t_2}, \quad f_2^{(q)} = -a_1 j_1 \\ f_2^{(j)} &= \frac{a_0}{d_\sigma} \left\{ \left( \frac{1}{2k_s} + \beta_T - \frac{3}{2} \right) \theta_1^2 + \left[ \beta_p - k_s \left( \beta_T - \frac{1}{2} \right) \right] \varphi \theta_1 - k_s \beta_p \varphi^2 \right\} \\ f_2^{(l)} &= \frac{a_0^2}{\kappa_g} \left( \frac{\partial a_1}{\partial t_0} \eta \frac{\partial u_1^{(l)}}{\partial \eta} - 2a_1 \frac{\partial u_1^{(l)}}{\partial t_0} \right) \\ f_2^{(g)} &= \frac{u_1^{(g)}}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^2 \frac{\partial u_1^{(g)}}{\partial \eta} \right) - \left( \frac{\partial u_1^{(g)}}{\partial \eta} \right)^2 - \\ &\quad - \frac{a_0^2}{\kappa_g} \left[ (\varphi + 2a_1) \frac{\partial u_1^{(g)}}{\partial t_0} - k_\gamma (u_1^{(g)} + 2a_1) \frac{d\varphi}{dt_0} \right] - \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{\eta^2} (j_1 + q_1^{(g)}) - \frac{a_0^2}{\kappa_g} \left( \eta - \frac{1}{\eta^2} \right) \left( \frac{\partial a_1}{\partial t_0} + \frac{1}{3\gamma} \frac{d\varphi}{dt_0} \right) \right\} \frac{\partial u_1^{(g)}}{\partial \eta} \\ \beta_p &= \frac{p_*}{\beta_*} \frac{\partial \beta}{\partial p} \Big|_{p_*, T_*}, \quad \beta_T = \frac{T_*}{\beta_*} \frac{\partial \beta}{\partial T} \Big|_{p_*, T_*} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\beta_p, \beta_T$  — безразмерные производные коэффициента аккомодации по давлению и температуре, характеризующие «нелинейную неравновесность» фазового перехода.

Для существования  $t_0$ -периодических решений у системы (2.3) при  $m = 2$  достаточно, чтобы нулевые гармоники  $f_{20}^{(\alpha)\circ}$  удовлетворяли условию (2.9). Нулевую гармонику произведения двух функций вида

$$x^{(k)} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(k)\circ} e^{in\omega t_0} \right\}, \quad k = 1, 2$$

можно выделить, проинтегрировав это произведение по периоду колебаний

$$(x^{(1)}x^{(2)})_0^\circ = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x^{(1)}x^{(2)} dt_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{ \overline{x_n^{(1)\circ}} x_n^{(2)\circ} \}$$

Поскольку функции  $f_2^{(\alpha)}$  представляют собой суммы произведений такого типа, то, опуская достаточно громоздкие выкладки, связанные с вычислением интегралов по  $t_0$  и по  $\eta$ , условие (2.9) можно записать в форме дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} \left( a_0 + \frac{k_s}{k_\gamma} d_\sigma \right) \frac{\partial a_0}{\partial t_2} &= \frac{\kappa_g k_p k_s}{2k_\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ - \left( \frac{1}{2k_s} + \beta_T - \frac{3}{2} \right) |\theta_{1n}^\circ|^2 + \right. \\ &\quad \left. + k_s \beta_p |\varphi_n^\circ|^2 + \operatorname{Re} \left\{ - \left[ \beta_p - k_s \left( \beta_T - \frac{1}{2} \right) \right] \varphi_n^\circ \overline{\theta_{1n}^\circ} + (\theta_{1n}^\circ - k_\gamma \varphi_n^\circ) \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\times \left[ \left( \frac{1}{2} + \sqrt{s_n} \right) \overline{\theta_{1n}^\circ} - \overline{j_{1n}^\circ} - \overline{q_{1n}^{(g)\circ}} - \left( \frac{k_\gamma}{2} - \frac{\sqrt{s_n}}{3\gamma} \right) \overline{\varphi_n^\circ} + \right. \\ \left. + \left( (1 - k_\rho) \overline{j_{1n}^\circ} + \overline{q_{1n}^{(g)\circ}} - \frac{s_n}{3\gamma} \overline{\varphi_n^\circ} \right) E_n \right] + k_\rho k_\lambda \left( \frac{1}{k_\kappa} - \frac{1}{s_n} h_n^{(l)} \right) \overline{\theta_{1n}^\circ} \overline{j_{1n}^\circ} \left. \right\} \quad (4.2)$$

$$E_n = e^{\sqrt{s_n} z} E_3(\sqrt{s_n} z), \quad E_3(z) = \int_1^\infty e^{-z\zeta} \zeta^{-3} d\zeta$$

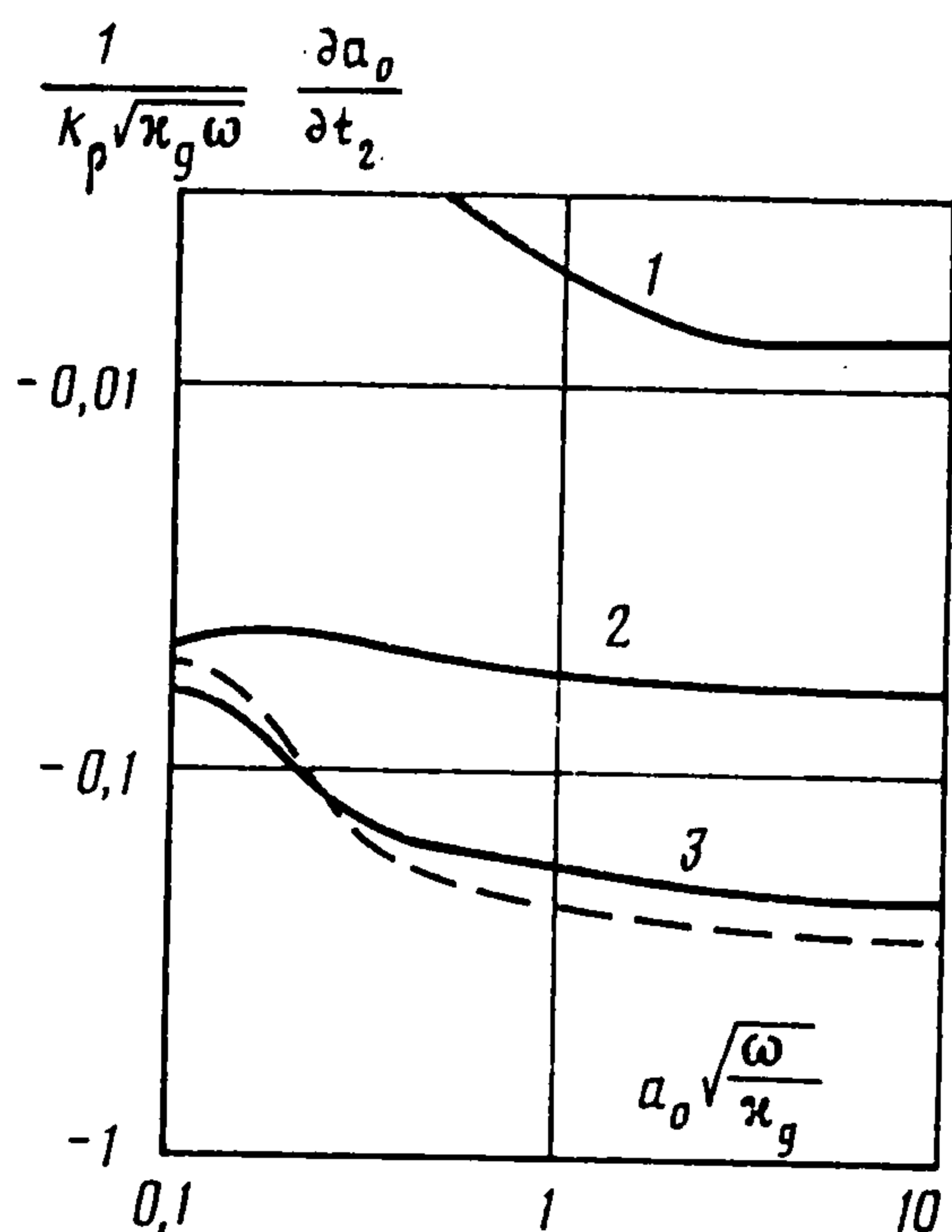
(черта означает комплексное сопряжение). Величиной  $k_\rho$  по сравнению с единицей в множителе  $(1 - k_\rho)$  можно пренебречь, поскольку исходная система (1.1) справедлива в области теплофизических параметров вдали от критической точки, т. е. при  $k_\rho \ll 1$ .

На фиг. 2 и 3 приведены результаты расчетов по уравнению (4.2) для системы с теплофизическими параметрами воды и пара при давлении  $p_* = 0,1$  МПа. В связи с отсутствием надежных данных по коэффициенту аккомодации, который, кроме того, чувствителен даже к небольшим концентрациям примесей, поверхностно-активных веществ и т. п., на фигурах приведены кривые, рассчитанные при значениях  $\beta_*$ , равных  $4 \cdot 10^{-4}$ ,  $4 \cdot 10^{-2}$ ,  $4 \cdot 10^{-1}$  (сплошные кривые 1—3), и по квазиравновесной схеме фазового перехода (штриховая кривая). Параметры «нелинейной неравновесности»  $\beta_p$  и  $\beta_T$  в иллюстрируемых вариантах имели значения  $\beta_p = 0$ ,  $\beta_T = 1,5$ ; это соответствует теоретической формуле Ландау [4]. Следует отметить, что вариация  $\beta_T$  в умеренных пределах слабо влияла на результаты расчетов. Частота  $\nu$  акустического поля, которое считалось монохроматическим, для кривых с  $\beta_* \neq \infty$  равна 100 кГц. При использовании квазиравновесной схемы фазового перехода переменные, отложенные по координатным осям, являются автомодельными.

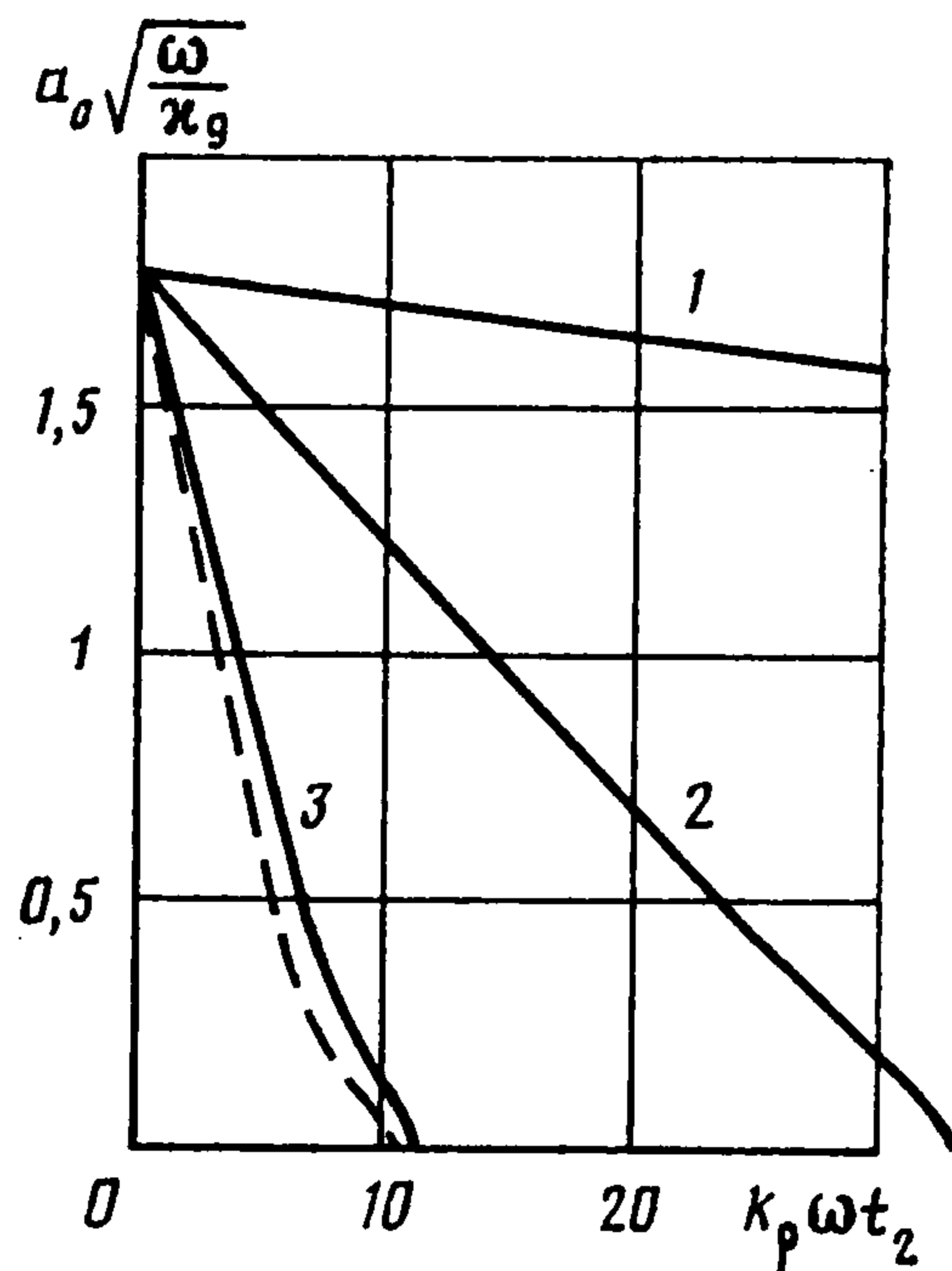
На фиг. 2 представлен фазовый портрет уравнения динамики среднего радиуса капли (4.2). Видно, что при использованных значениях теплофизических параметров скорость роста среднего радиуса капли отрицательна, т. е. капля в среднем испаряется. При больших  $a_0$  каждая из фазовых траекторий стремится к своей горизонтальной асимптоте, определяемой коэффициентом аккомодации  $\beta_*$ , что говорит о линейном законе уменьшения средних радиусов капель при достаточно больших размерах или высоких частотах. При малых  $a_0$  и не слишком малых  $\beta$  близка к постоянной скорость уменьшения квадрата среднего радиуса (средней поверхности) капли.

Фиг. 3 иллюстрирует зависимость среднего радиуса капли от времени  $t_2$ , полученную численным интегрированием уравнения (4.2). Вид и взаимное расположение кривых при разных  $\beta_*$  зависит, как следует из фазового портрета на фиг. 2, от выбора начального условия  $a_{00} = a_0(0)$  в задаче Коши для (4.2) (в приведенных вариантах  $a_{00} = 10$  мкм). Согласно расчетам средний радиус капли уменьшается до нуля. В связи с этим необходимо помнить об ограничении на средний радиус, оговоренном выше, а также о том, что данная теория рассматривает только такие радиусы, когда допустимо континуальное описание среды [1]. Тем не менее можно говорить о времени «жизни» капли, которое, судя по расчетам, заметно увеличивается при уменьшении  $\beta_*$ . Так, в случае рекомендуемого [1, 4] для воды  $\beta_* = 0,04$  оно может быть больше рассчитанного по квазиравновесной схеме фазового перехода в несколько раз (это зависит как от частоты поля, так и от начального радиуса  $a_{00}$ ).

Можно отметить, что динамика среднего радиуса конденсированной капли в акустическом поле определяется, согласно (4.2), (3.4), (3.5), восемью независимыми безразмерными параметрами ( $\beta_*$ ,  $\beta_p$ ,  $\beta_T$ ,  $k_s$ ,  $k_\gamma$ ,  $k_\rho$ ,  $k_\lambda$ ,  $k_\kappa$ ) плюс зависимость от начального радиуса, частоты и формы колебаний. Это обстоятельство делает весьма сложным полный анализ уравнения (4.2) в пространстве параметров. Поэтому представляется полезным рассмотреть некоторые характерные предельные ситуации. В частности, из (4.2), (3.4), (3.5) можно получить более простые асимптотические уравнения, описывающие поведение средних радиусов крупных и мелких капель в высоко- и низкочастотных акустических полях.



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть частоты  $\omega$  или радиусы  $a_0$  велики настолько, что характерная толщина нестационарного температурного пограничного слоя в газе  $\delta_g = [\kappa_g/(2\omega)]^{1/2}$  много меньше размера капли  $\delta_g \ll a_0$ . В этом случае характерная толщина аналогичного пограничного слоя в жидкости  $\delta_l = [\kappa_l/(2\omega)]^{1/2}$  также будет много меньше  $a_0$ , поскольку, как правило,  $\kappa_l < \kappa_g$  и даже  $\kappa_l \ll \kappa_g$ . Используя асимптотические представления функций, входящих в (4.2), (3.4), (3.5), при больших значениях  $|s_n|^{1/2}$  и сохраняя в разложениях лишь главные члены, можно получить уравнение (высокочастотное приближение)

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{k_s}{k_\gamma} \frac{d_\sigma}{a_0}\right) \frac{\partial a_0}{\partial t_2} = \\ & = -\frac{1}{2} k_\rho k_s k_\gamma \sqrt{\kappa_g} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^\circ|^2 \sqrt{\frac{\omega n}{2}} H(\sqrt{\omega_\sigma n}), \quad \omega_\sigma = \frac{d_\sigma^2}{\delta_g^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь  $H(x) = P(x)/Q(x)$  — дробно-рациональная функция, коэффициенты которой определяются через теплофизические параметры фаз

$$P(x) = \frac{1}{2} b_2 x^2 + b_1 x + b_0, \quad Q(x) = \frac{1}{2} K^2 x + Kx + 1; \quad K = k_s (1 + k_\lambda / \sqrt{k_\kappa}) / k_\gamma$$

$$\begin{aligned} b_2 &= K^2 - \frac{k_s}{k_\gamma} K, \quad b_1 = \frac{k_s}{k_\gamma} K^2 + \\ &+ \left[ \left(1 - \frac{k_s}{k_\gamma}\right)^2 - \frac{k_s^2}{k_\gamma^2} (2 - k_c) \right] K + \frac{k_s^2}{k_\gamma^2} (1 - k_c) \end{aligned}$$

$$b_0 = \frac{k_s}{k_\gamma} \left[ 1 - \frac{k_s}{k_\gamma} (1 - k_c) \right] K + \left(1 - \frac{k_s}{k_\gamma}\right)^2 - k_c \frac{k_s^2}{k_\gamma^2}, \quad k_c = \frac{k_\rho k_\lambda}{k_\kappa} = \frac{c_l}{c_g}$$

Для многих веществ  $K \gg 1$ , поэтому в выражениях для коэффициентов  $b_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) обычно можно сохранить лишь главные члены.

Пусть теперь функция  $\varphi$  содержит конечное число гармоник ( $\varphi_n^\circ = 0$  при  $n > N$ ), а частоты и радиусы так малы, что для самой высокочастотной гармоники  $\delta_g \gg a_0$ ,  $\delta_l^2 \gg a_0^2$ ,  $(k_\lambda/120)(a_0/\delta_l)^4 \ll 1$  (относительно толстые температурные пограничные слои). Используя асимптотические представления функций, входящих в (4.2), (3.4), (3.5), при малых значениях  $|s_n|^{1/2}$  и сохраняя в разложениях главные члены (величина  $k_\lambda$  может быть большой,  $k_\rho \ll 1$ ), можно привести (4.2) к виду (низкочастотное при-

ближение)

$$a_0 \left( 1 + \frac{k_s}{k_\gamma} \frac{d_\sigma}{a_0} \right) \frac{\partial a_0}{\partial t_2} = - \frac{\kappa_g}{4} \frac{k_\rho k_s^2}{k_\gamma} \sum_{n=1}^N |\Phi_n^\circ|^2 G_n \left( \frac{k_s}{k_\gamma} \frac{d_\sigma}{a_0} \right) \quad (4.4)$$

$$G_n(x) = \frac{R_n(x)}{D_n(x)}, \quad R_n(x) = \alpha_{2n} x^2 + \alpha_{1n} x + \alpha_0,$$

$$D_n(x) = \left[ 1 + \left( \frac{k_\lambda |s_n|}{3k_\kappa} \right)^2 \right] x^2 + 2x + 1$$

$$\alpha_0 = 1 - k_\gamma - k_s \left[ \frac{k_s}{k_\gamma} + \frac{4}{3} k_c \left( 1 - \frac{k_s}{k_\gamma} \right) \right]$$

$$\alpha_{1n} = \frac{2k_\gamma}{k_s} \left\{ 1 - 2k_s + \left( 1 - \frac{k_s}{k_\gamma} \right) \left[ \beta_p + k_s \left( \beta_T - \frac{1}{2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + k_s \left[ \frac{k_s}{k_\gamma} \left( 1 + \left( \frac{k_\lambda |s_n|}{3k_\kappa} \right)^2 \right) + \frac{4}{3} k_c \left( 1 - \frac{k_s}{k_\gamma} \right) \right] \right\}$$

$$\alpha_{2n} = \frac{k_\gamma^2}{k_s^2} \left[ 1 - 2k_s - 2k_s \left( 1 - \frac{k_s}{k_\gamma} \right) \left( \beta_T - \frac{1}{2} \right) \right] - 2\beta_p \left( 1 - \frac{k_\gamma}{k_s} + \frac{k_\lambda^2 |s_n|^2}{9k_\kappa^2} \right)$$

**5. Обсуждение.** Общую схему фазового перехода можно мыслить себе состоящей из двух разных механизмов — диффузионного (обусловленного теплопроводностью сред) и кинетического (связанного с отклонением температуры поверхности капли от температуры насыщения). Разумеется, такое разделение условно, поскольку кинетический механизм также связан с процессами молекулярного переноса в газе, т. е. с температуропроводностью. Квазиравновесная схема фазового перехода представляет схему, в которой имеется лишь диффузионный механизм. Можно ввести понятие зоны действия кинетического механизма (см. также [5]), характерная толщина которой в газе  $\delta_\sigma$ , по определению, равна

$$\delta_\sigma = \frac{k_s}{k_\gamma} d_\sigma = \frac{1 - k_\rho}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma} \frac{1}{\beta_*} \frac{\kappa_g C_g^3}{l^2}}$$

Здесь явное выражение для  $k_s$  взято из уравнения Клапейрона — Клаузиуса [1],  $C_g = (\gamma p_* / \rho_{g*})^{1/2}$  — скорость звука в газе; температуропроводность газа из соотношения можно исключить, так как  $\kappa_g \sim L_f C_g$ , где  $L_f$  — длина свободного пробега молекул в газе.

Если  $\delta_\sigma \gtrsim a_0$ , то неравновесная кинетика фазового перехода влияет на квазистационарные распределения температур. Такая ситуация возможна лишь при весьма низких значениях  $\beta$  или малых  $a_0$  и не является характерной. Обычно  $\delta_\sigma \ll a_0$  и соответствующими членами в (4.2)–(4.4) можно пренебречь. Тогда, как видно (4.3), средний радиус капли в высокочастотном поле изменяется по линейному закону.

Неравновесная кинетика фазового перехода влияет на поведение капель в высокочастотных полях, когда  $\delta_g \ll a_0$ ,  $\delta_l \ll a_0$  и величина  $\delta_\sigma$  сравнима с  $\delta_g$  или  $\delta_l$ . Так, оценки по уравнению (4.3) для воды при  $p_* = 0,1$  МПа,  $\beta_* = 0,04$  показывают, что квазиравновесную схему ( $H(\sqrt{\omega_\sigma}) \approx H(0) = b_0$ ) можно использовать лишь при частотах  $\nu = \omega/2\pi \lesssim 0,1$  кГц; в диапазоне  $0,1$  кГц  $\ll \nu \ll 1,0$  МГц проявляются оба механизма; в диапазоне  $\nu \gtrsim 1,0$  МГц доминирующая роль принадлежит кинетическому механизму. Некоторые оценки и иллюстрации влияния неравновесности фазового перехода на дисперсию и затухание звука в смеси пара с каплями приведены в [3].

При низких частотах ( $(k_\lambda/6)^2 (a_0/\delta_l)^4 \ll 1$ ), а также при квазиравновесном фазовом переходе ( $d_\sigma = 0$ ) правая часть (4.4) от частоты не зависит

и поведение среднего радиуса определяется среднеквадратичным значением функции  $\varphi$  ( $\langle \varphi^2 \rangle = 1/2 (|\varphi_1^\circ|^2 + \dots + |\varphi_N^\circ|^2)$ ). Из (4.4) можно найти время «жизни» капли ( $t_*$ ) при квазиравновесной схеме фазового перехода, поскольку при  $d_\sigma = 0$  уравнение интегрируется

$$a_0 = \left[ a_{00}^2 - \alpha_0 \frac{k_\rho k_s^2}{k_\gamma} \langle \varphi^2 \rangle \kappa_g t_2 \right]^{1/2}; \quad t_* = \frac{k_\gamma}{\alpha_0 k_\rho k_s^2 \varepsilon^2 \langle \varphi^2 \rangle} \frac{a_{00}^2}{\kappa_g} \quad (5.1)$$

Несмотря на то, что согласно приведенным расчетам конденсированные капли воды в нормальных условиях под действием акустических полей в среднем испаряются, следует предостеречь от поспешного вывода, что это явление будет наблюдаться для капель других веществ или капель воды в других условиях. В пространстве параметров существуют области, когда капли будут расти (например, коэффициент  $\alpha_0$  в (4.4), (5.1) отрицательный);<sup>†</sup> возможны ситуации, когда на фазовом портрете уравнения (4.2) или (4.4) возникают устойчивые и неустойчивые нули (стационарные и пороговые радиусы). Подробный анализ фазового портрета уравнения динамики среднего радиуса капли, а также физическая реализуемость «аномальных» областей параметров представляет, по-видимому, самостоятельный интерес.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
3. Гумеров Н. А., Ивандаев А. И. Особенности распространения высокочастотных акустических возмущений в паро- и газовзвесьях // ПМТФ. 1985. № 6. С. 73—81.
4. Акуличев В. А., Алексеев В. Н., Буланов В. А. Периодические фазовые превращения в жидкостях. М.: Наука, 1986. 280 с.
5. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1983. 237 с.

Тюмень

Поступила в редакцию  
28.XII.1987