Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 2, 1989

УДК 533.6:534.1

С. В. Мелешко

О НЕИЗЭНТРОПИЧЕСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВОЙНЫХ ВОЛНАХ

Дается полная классификация плоских нестационарных неизэнтропических и пространственных стационарных течений газа типа двойных волн при наличии функционального произвола. В качестве независимых переменных в пространстве годографа выбираются давление и энтропия. Показано, что неизэнтропические двойные волны с функциональным произволом, которые не редуцируются к инвариантным решениям, в пространственном стационарном случае имеются лишь для газов с уравнением состояния $\tau = g(p)A(S)$. Течения, описываемые этими двойными волнами, обобщают волны Прандтля — Майера на пространственный неизэнтропический случай. Плоские нестационарные неизэнтропические течения газа типа двойных волн, не редуцируемые к инвариантным решениям и имеющие функциональный произвол, в общем решении задачи Коши имеются лишь двух видов.

Ранее классификация двойных волн в рамках уравнений газовой динамики проводилась при дополнительных предположениях либо потенциальности [1], либо более слабого условия прямолинейности линий уровня [2—4] рассматриваемых течений. Более подробно о работах в этом направлении говорится в [5]. Была сделана попытка [6] исследования двойных волн без каких-либо дополнительных предположений. Однако полное исследование совместности полученной системы квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка ввиду громоздкости выкладок довольно затруднительно; были выписаны [6, 7] ее частные решения.

Общее исследование бегущих волн можно разбить на две части: с константным и с функциональным произволом в общем решении задачи Коши. В случае решений с константным произволом исходная система уравнений газовой динамики в результате двух-трех продолжений сводится к вполне интегрируемой системе. Условия на зависимые переменные в пространстве годографа (условия совместности) для таких систем получаются простым перекрестным дифференцированием. Процесс получения этих условий очень громоздок, в то время как решение исходной системы имеет всего лишь константный произвол в общем решении. Более содержательным с точки зрения решения краевых задач является класс бегущих волн, имеющий функциональный произвол в общем решении задачи Коши. Исследование двойных волн с функциональным произволом для плоских изэнтропических течений политропного газа проведено в [8].

1. Двойные волны пространственных установившихся течений газа. Рассматриваются стационарные неизобарические и неизэнтропические двойные волны, не редуцируемые к инвариантным решениям уравнений газовой динамики

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \tau\nabla p = 0, \quad \frac{d\tau}{dt} - \tau \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0 \tag{1.1}$$

с уравнением состояния $\tau = \tau(p, S)$, $\tau_p \neq 0$, $\tau_S \neq 0$. Здесь $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — скорость, p — давление, S — энтропия, τ — удельный объем. Для установившихся течений $d/dt = u_\alpha \partial/\partial x_\alpha$ (здесь и далее по повторяющемуся греческому индексу проводится суммирование).

Если p и S функционально зависимы, то, выбирая в качестве независимых параметров двойной волны в пространстве годографа функции p и λ (без ограничения общности считается $p_{x_1}\lambda_{x_2} - p_{x_2}\lambda_{x_1} \neq 0$), можно показать справедливость следующих утверждений. Либо двойные волны (по теореме о редукции [9]) редуцируются к инвариантным решениям, либо, сделав переход $x_1 = P(p, \lambda, x_3)$, $x_2 = Q(p, \lambda, x_3)$ (как в [6]), получаем вполне интегрируемую систему дифференциальных уравнений второго порядка, которая имеет только константный произвол в решении. Поэтому в стационарных неизобарических неизэнтропических двойных волнах, не редуцируемых к инвариантным решениям и имеющих функциональный произвол, давление и энтропия функционально независимы.

В качестве параметров двойной волны выбираются давление и энтропия. После введения новой зависимой переменной $\varphi = (\operatorname{div} u)/\tau_p$ из (1.1) получаем

$$\frac{dp}{dt} - \tau\varphi = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0, \quad u_{\alpha S} S_{x_\alpha} = H\varphi \tag{1.2}$$
$$(H \equiv \tau_p + u_{\alpha p} u_{\alpha p}), \quad \Phi_i \equiv p_{x_i} + u_{i_p}\varphi = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

В силу неизобаричности течения $\varphi \neq 0$, $u_{\alpha p} u_{\alpha p} \neq 0$ (для определенности считается $u_{1p} \neq 0$). Из (1.2) вытекает

$$\tau + u_\alpha u_{\alpha p} = 0 \tag{1.3}$$

Дифференцируя полным образом D_{x_i} по переменной x_i и составляя комбинации, из уравнений (1.2) получим

$$D_{x_i}\Phi_j - D_{x_j}\Phi_i = u_{jp}\varphi_{x_i} - u_{ip}\varphi_{x_j} + \varphi(u_{jpS} S_{x_i} - u_{ipS} S_{x_j}) -$$
$$- \varphi^2 (u_{jpp} u_{ip} - u_{ipp} u_{jp}) = 0 \tag{1.4}$$
$$D(H\varphi - u_{\alpha S} S_{x_\alpha})/Dt = H\, d\varphi/dt - \varphi(\tau u_{\alpha p S} + u_{\alpha p} u_{\beta p} u_{\beta S}) S_{x_\alpha} +$$
$$+ \varphi^2 (H^2 + \tau H_p) = 0 \tag{1.5}$$
$$D(\Phi_i)/Dt = u_{ip} d\varphi/dt + \tau\varphi_{x_i} + \varphi\zeta S_{x_i} -$$
$$- \varphi^2 (u_{ip} H - \tau u_{ipp}) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j) \tag{1.6}$$
$$\zeta \equiv \tau_S + u_{\alpha p} u_{\alpha S}, \quad D/Dt = u_\alpha D_{x_\alpha}$$

Исключая из (1.4) производные φ_{x_i}, φ_{x_j} при помощи уравнений (1.6), имеем

$$(\zeta u_{i_p} - \tau u_{ipS}) S_{x_j} - (\zeta u_{jp} - \tau u_{jpS}) S_{x_i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j) \tag{1.7}$$

В дальнейшем необходимо различать два случая: $H \neq 0$ и $H = 0$.

1°. Пусть $H \neq 0$. Если φ выразить из третьего уравнения системы (1.2), подставить эту величину в остальные уравнения этой системы, то вместе с (1.7) получается однородная система квазилинейных дифференциальных уравнений. Из запрета на редукцию двойных волн к инвариантным решениям [9] следуют уравнения

$$\tau u_{ipS} - \zeta u_{ip} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.8}$$

Из них вытекает существование таких функций $F_i = F_i(p)$, что

$$u_{ip} = F_i u_{1p} \quad (i = 2, 3) \tag{1.9}$$

Так как $H \neq 0$, то из второго и третьего уравнений системы (1.2) следует существование отличного от нуля определителя $u_i u_{jS} - u_j u_{iS}$. Для определенности считается, что $\Delta \equiv u_2 u_{3S} - u_3 u_{2S} \neq 0$.

Система уравнений, которой должны удовлетворять функции $\mathbf{v} = (p, S, \varphi)'$, записывается в виде переопределенной системы квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{v}_{x_3} + G_3 \mathbf{v}_{x_1} = \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{v}_{x_2} + G_2 \mathbf{v}_{x_1} = \mathbf{f}_2 \tag{1.10}$$
$$p_{x_1} + \varphi u_{1p} = 0, \quad S_{x_1}\varphi l_1 + \varphi_{x_1} = f_3$$
$$G_i = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_i & 0 \\ 0 & \varphi l_i & 0 \end{Vmatrix} \quad (i = 2, 3)$$

$$\Delta_2 = (u_3 u_{1S} - u_1 u_{3S})/\Delta, \quad \Delta_3 = (u_1 u_{2S} - u_2 u_{1S})/\Delta$$
$$l_i = u_{ip}\xi\lambda/(\tau H\Delta) + \zeta\Delta_i/\tau \quad (i = 2,\ 3)$$
$$l_1 = u_{1p}\xi\lambda/(\tau H\Delta) + \zeta/\tau$$
$$\lambda = \Delta\,(u_{1p} + u_{2p}\Delta_2 + u_{3p}\Delta_3), \quad \xi = \tau_S + 2u_{\alpha p}u_{\alpha S}$$

с функциями $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, f_3, которые не зависят от производных $\mathbf{v}_{x_i}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Для существования решения системы (1.10), имеющего функциональный произвол, необходимо

$$\xi\lambda\,(u_{ip} - u_{1p}\Delta_i) = 0 \quad (i = 2,\ 3) \tag{1.11}$$

Так как $\tau H\varphi \neq 0$, то из уравнений (1.9) и (1.11) вытекает

$$\xi\lambda = 0 \tag{1.12}$$

При $\lambda = 0$ из (1.9) и уравнения $u_{\alpha S}S_{x_\alpha} = H\varphi$ получается либо редукция к двумерному случаю (возможно, поворотом системы координат), либо противоречие условию $H\varphi \neq 0$.

Более сложно исследуется случай $\xi = 0$, когда часть уравнений системы (1.10) имеет вид

$$\psi_i \equiv \tau H\varphi_{x_i} + \varphi H\zeta S_{x_i} - \varphi^2 c_i = 0$$
$$c_i \equiv 2u_{ip}H^2 + \tau H_p u_{ip} - \tau H u_{ipp} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Из уравнений $D_{x_i}\psi_j - D_{x_j}\psi_i = 0$ $(i \neq j)$ получаются три уравнения первого порядка

$$S_{x_i}a_j - S_{x_j}a_j + \tau\varphi\,(u_{ip}d_j - d_i u_{jp}) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j) \tag{1.13}$$
$$a_1 \equiv Hu_{1p}\,[\tau^2\,(H_p/H)_S - 2\tau^2\,(u_{1pp}/u_{1p})_S - 2\,\tau^2(H/\tau)_S]$$
$$d_i = F_i d_1 + F_i'\,(u_{1p}\,(2H^2 + \tau H_p) - 2\tau H u_{1pp}) - \tau H u_{1p}F_i'', \quad a_i = F_i a_1 \quad (i = 2, 3)$$

Из запрета на редукцию двойных волн к инвариантным решениям следует, что необходимо $a_i = \Delta_i a_1$ $(i = 2,\ 3)$.

Но тогда из второго и третьего уравнений системы (1.2) и уравнений (1.13) вытекает

$$\tau\Delta\,(u_{ip}d_j - u_{jp}d_i) + (-1)^k\,Ha_1u_k = 0 \tag{1.14}$$
$$(i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3;\ i < j,\ k \neq i,\ k \neq j)$$

После исключения d_i $(i = 1, 2, 3)$ из последних уравнений и уравнения (1.3) получается $\tau Ha_1 = 0$. Так как $\tau H \neq 0$, то из последнего уравнения и уравнений (1.14) следует $a_1 = 0$, $d_i = F_i d_1$ $(i = 2,\ 3)$.

Далее необходимо рассматривать два случая: $(F_2')^2 + (F_3')^2 \neq 0$ и $F_2 = F_3 = 0$. В обоих случаях получаются противоречия либо условию $H \neq 0$, либо условию функциональной независимости давления и энтропии, кроме газов (1.23).

Таким образом, если $H \neq 0$, то стационарных неизэнтропических неизобарических решений типа двойных волн, имеющих функциональный произвол и не редуцируемых к инвариантным решениям, нет.

2°. Пусть $H = 0$. Так как p и S функционально независимы, то из запрета на редукцию к инвариантным решениям системы уравнений (1.2), (1.5), (1.7) следует, что и в случае $H = 0$ выполняются уравнения (1.8), (1.12).

Для дальнейшего исследования делается переход к новым независимым переменным p, S, x_3 [6] (без ограничения общности считается выполненным неравенство $p_{x_1}S_{x_2} - p_{x_2}S_{x_1} \neq 0$), т. е. $x_1 = P\,(p,\ S,\ x_3)$, $x_2 = Q\,(p,\ S,\ x_3)$.

Уравнения (1.1) после этого перехода запишутся так:

$$BP_p - AQ_p = 0, \quad u_{1p}BP_S - (\tau + u_{1p}A)\,Q_S = 0 \tag{1.15}$$
$$(\tau + u_{2p}B)\,P_S - u_{2p}AQ_S = 0$$
$$(u_{3p}B - \tau Q_{x_3})\,P_S - (u_{3p}A - \tau P_{x_3})\,Q_S = 0$$
$$(u_{2S} - u_{3S}Q_{x_3})\,P_p - (u_{1S} - u_{3S}P_{x_3})\,Q_p = 0$$
$$A \equiv u_1 - u_3P_{x_3}, \quad B \equiv u_2 - u_3Q_{x_3}$$

причем

$$P_pQ_S - P_SQ_p \neq 0 \tag{1.16}$$

Нахождение решения системы уравнений (1.15) в силу неравенства (1.16) сводится к интегрированию системы двух линейных уравнений относительно одной неизвестной функции $Q\,(p,\ S,\ x_3)$

$$\omega Q_p - \beta\,(u_2 - u_3Q_{x_3}) = 0 \tag{1.17}$$
$$\omega_S Q_p - \beta\,(u_{2S} - u_{3S}Q_{x_3}) = 0$$

Здесь

$$P = -F_2Q - x_3F_3 + \chi \tag{1.18}$$
$$\omega \equiv u_1 + u_2F_2 + u_3F_3, \quad \beta \equiv \chi' - F_2'Q - x_3F_3'$$

$\chi = \chi\,(p)$ — произвольная функция. Из уравнения (1.18) вытекает

$$x_1 + x_2F_2 + x_3F_3 = \chi \tag{1.19}$$

а из условия обратимости (1.16) с подстановкой в него (1.18) следует, что $\beta Q_S \neq 0$. Кроме этого, так как $\tau = -u_\alpha u_{\alpha p} = -\omega u_{1p}$, то $\omega \neq 0$. Тогда после исключения Q_p из (1.17) получается

$$(u_3/\omega)_S Q_{x_3} - (u_2/\omega)_S = 0 \tag{1.20}$$

Если $(u_3/\omega)_S \neq 0$, то поворотом системы координат решение редуцируется к инвариантному решению (промежуточные выкладки здесь довольно громоздки и они опущены). В связи с этим следует считать, что

$$(u_i/\omega)_S = 0 \quad (i = 2,\ 3) \tag{1.21}$$

Так как рассматриваются двойные волны не редуцируемые к плоским течениям [9], то из уравнений (1.9), (1.12), (1.21) вытекают соотношения

$$u_i = h_i\,(p)\psi(S) \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.22}$$

причем

$$\tau = -(h_\alpha h_\alpha')\,\psi^2, \quad H = -(h_\alpha h_\alpha'')\,\psi^2 = 0$$

Поэтому уравнения (1.22) справедливы только в случае уравнений состояния вида

$$\tau = g\,(p)\,\psi^2\,(S) \tag{1.23}$$

Таким образом, если $H = 0$, то для существования стационарных неизэнтропических неизобарических течений газа типа двойных волн, имеющих функциональный произвол и не редуцируемых к инвариантным решениям, необходимо выполнение уравнений (1.22), (1.23) и соотношений

$$h_\alpha h_\alpha'' = 0, \quad h_\alpha h_\alpha' = -g \tag{1.24}$$
$$-gQ_p + h_1'\,(\chi' - Q\,(h_2'/h_1')' - x_3\,(h_3'/h_1')')(h_3Q_{x_3} - h_2) = 0 \tag{1.25}$$

Из уравнения (1.25) функция Q находится с произволом в одну функцию двух аргументов (один из них — энтропия S). Так как для газа с уравнением состояния (1.23) скорость звука $c^2 = -g^2\psi^2/g'$, то в силу уравнений (1.24) и неравенства Коши — Буняковского $c \leqslant |\mathbf{u}|$. Следовательно, течения, описываемые этими решениями, всегда сверхзвуковые.

Полученные двойные волны можно рассматривать как обобщение простых волн на неизэнтропические течения и поэтому с их помощью можно строить обтекание профилей более сложных, чем развертывающиеся [6, 10]. Для уравнения состояния политропного газа ($g = p^{-1/\gamma}$) решения вида (1.22) получены в [7]. В плоском стационарном случае ($h_3 = 0$) эти решения описывают обобщенные движения Прандтля — Майера [11].

2. Плоские неустановившиеся двойные волны. Исследование плоских неустановившихся изэнтропических течений политропного газа, имеющих функциональный произвол, проведено в [8]. Для неизэнтропических двойных волн с произвольным уравнением состояния справедлива [12].

Теорема. Плоские неизэнтропические, неизобарические течения газа типа двойной волны, нередуцируемые к инвариантным решениям и имеющие функциональный произвол, могут быть лишь следующих видов:

1) двойные волны с однофункциональным произволом от одного аргумента с уравнением состояния $\tau = A_1(S)\, g(p) + A_2(S)$, при этом $u_i = u_i(S)$ $(i = 1, 2)$ — произвольные функции, давление определяется из уравнения $g(p) = c_1 t + c_2$ (c_i — постоянные, $c_1 \neq 0$), а энтропия удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$dS/dt = 0, \quad u_\alpha' S_{x_\alpha} = c_1 A_1 / ((c_1 t + c_2) A_1 + A_2)$$

которая находится в инволюции;

2) двойные волны с двухфункциональным произволом от одного аргумента, в которых функции $\tau = \tau(p, S)$, $u_i = u_i(p, S)$ $(i = 1,2)$ удовлетворяют уравнениям (суммирование ведется от 1 до 2)

$$\begin{gathered}\tau u_{\alpha S} u_{\alpha p S} + (\tau_S - \zeta)\zeta = 0 \\ \tau(u_{2S} u_{1pS} - u_{1S} u_{2pS}) + u_{\alpha p} u_{\alpha S}(u_{1p} u_{2S} - u_{2p} u_{1S}) = 0 \qquad (2.1) \\ \tau_p + u_{\alpha p} u_{\alpha p} = 0 \\ d/dt = \partial/\partial t + u_\alpha \partial/\partial x_\alpha, \quad \zeta = \tau_S + u_{\alpha p} u_{\alpha S}, \quad \xi = \tau_S + 2u_{\alpha p} u_{\alpha S}\end{gathered}$$

Если выполняются уравнения (2.1), то после перехода к независимым переменным p, S, t $(x_i = P_i(p, S, t)$ $(i = 1, 2))$ получается решение с прямыми линиями уровня

$$\begin{gathered}u_{\alpha p} u_{\alpha S} P_i = t\,(u_{iS}(\tau + u_\alpha u_{\alpha p}) + (-1)^i u_{jp}(u_{1S} u_2 - u_{2S} u_1)) + \\ + u_{iS}\chi + (-1)^i u_{jp}\Phi \quad (i, j = 1, 2;\ i \neq j) \\ \chi = \Delta^{-1}(\tau\Phi_p - \Phi(u_{\alpha p} u_{\alpha S}\zeta - \Delta^2)/(u_{\alpha S} u_{\alpha p})) \\ \Delta \equiv u_{1S} u_{2p} - u_{2S} u_{1p}\end{gathered}$$

Функция $\Phi = \Phi(p, S)$ находится из уравнения второго порядка, которое получается после подстановки χ в уравнение

$$\tau\chi_S + \Phi\xi\Delta/(u_{\alpha S} u_{\alpha S}) - \zeta\chi = 0$$

Система уравнений (2.1) относительно функций $\tau(p, S)$, $u_i(p, S)$ $(i = 1, 2)$ находится в инволюции и имеет произвол в пять функций одного аргумента. Если же задаться вопросом, при каких заданных уравнениях состояния $\tau = \tau(p, S)$ эта система относительно $u_i(p, S)$ $(i = 1, 2)$ совместна и каково при этом будет решение, то полное исследование довольно затруднительно. Но в частном случае уравнения состояния (1.23) вопрос решается до конца. Из-за больших промежуточных выкладок здесь приводится лишь путь получения ответа на этот вопрос.

Сначала доказывается, что если уравнение состояния имеет вид (1.23), то из уравнений (2.1) следует, что $u_{2p} = F(p)\, u_{1p}$. После этого из запрета на редукцию, последнего уравнения и уравнений (2.1) следуют соотношения вида (1.22) $u_i = h_i(p)\psi(S)$ $(i = 1, 2)$, а функции $h_i(p)$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$g + h_\alpha h_\alpha' = 0, \quad g' + h_\alpha' h_\alpha' = 0$$

Но при выполнении последних уравнений решение редуцируется к стационарному случаю. Таким образом, для уравнений состояния (1.23) получаются решения, редуцируемые к плоским и обобщающие волны Прандтля — Майера. Эти решения подробно изучены в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Погодин Ю. А., Сучков В. А., Яненко Н. Н.* О бегущих волнах уравнений газовой динамики // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119. № 3. С. 443—445.
2. *Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н.* К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 5. С. 832—834.
3. *Сучков В. А.* О двойных волнах плоских течений с переменной энтропией // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 4. С. 816—818.
4. *Мартюшов С. Н.* О плоских нестационарных неизэнтропических двойных волнах с прямыми линиями уровня // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1980. Т. 11. № 1. С. 127—132.
5. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 С.
6. *Зубов Е. Н.* Об одном классе точных решений уравнений газовой динамики для пространственных нестационарных течений идеального газа с переменной энтропией // Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 41—67.
7. *Зубов Е. Н.* О некоторых точных решениях уравнений газовой динамики для пространственных нестационарных течений идеального газа с переменной энтропией // Точные и приближенные методы исследования задач механики сплошной среды. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. С. 53—68.
8. *Мелешко С. В.* К классификации плоских изэнтропических течений газа типа двойной волны // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 406—410.
9. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400с.
10. *Валандер С. В.* Развертывающиеся крылья // Вестн. ЛГУ. Сер. математика. Механика. Астрономия. 1958. № 19. Вып. 4. С. 113—120.
11. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448с.
12. *Мелешко С. В.* О плоских течениях газа типа двойных волн. Моделирование в механике. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1988. Т. 2 (19). № 2. С. 111—118.

Новосибирск

Поступила в редакцию
4.VII.1988