Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 2, 1989

УДК 62—50

Ю. Н. Решетняк

СУММИРОВАНИЕ ЭЛЛИПСОИДОВ В ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Рассматривается задача гарантированного оценивания фазового состояния линейной динамической системы, подверженной действию независимых внешних возмущений, ограниченных по величине.

Некоторые методы приближенного гарантированного оценивания при помощи эллипсоидов были развиты в работах [1—4]. В данной работе строится аппроксимация эллипсоидом, оптимальным в смысле общего критерия качества, суммы Минковского эллипсоидов. Указываются основные свойства полученной операции. Изложенные результаты используются для оценок области достижимости линейной управляемой системы с несколькими входами.

1. Основная задача. Будем использовать обозначение $E\,(a, Q)$ для эллипсоида $\{x;\ (Q^{-1}(x-a),\ x-a)\leqslant 1\}$. Здесь x — n-мерный вектор, a — n-мерный вектор центра эллипсоида, Q — симметрическая положительно-определенная матрица размера $n\times n$, (a, b) — скалярное произведение векторов a и b.

Можно дать эквивалентное определение эллипсоида

$$E\,(a, Q)=\{x;\ (x,\ y)\leqslant (a, y)+(Qy, y)^{1/2},\ \forall y\in \mathbf{R}^n\} \tag{1.1}$$

означающее, что опорная функция эллипсоидального множества $H_{E(a,Q)}\,(y)=\sup_{x\in E(a,Q)}\,(x, y)$ задается формулой $H_{E\,(a,Q)}\,(y)=(a, y)+(Qy, y)^{1/2}$ (например, [3]).

Формула (1.1) позволяет распространить определение $E\,(a, Q)$ на вырожденный случай, когда некоторые полуоси эллипсоида равны нулю, что соответствует вырождению матрицы Q.

Всюду далее индексы i, j принимают значения $1, 2, \ldots, m$; суммирование по этим индексам ведется от 1 до m.

Рассмотрим сумму Минковского m эллипсоидов

$$\Omega=\left\{x=\sum x_i;\ x_i\in E_i=E\,(a_i, Q_i)\right\}$$

Условие того, что эллипсоид $E\,(a, Q)$ содержит область Ω, означает, что

$$(a, y)+(Qy, y)^{1/2}\geqslant \sum\,[(a_i, y)+(Q_iy, y)^{1/2}],\quad \forall y\in \mathbf{R}^n \tag{1.2}$$

Здесь использован тот факт, что опорная функция суммы непустых выпуклых множеств равна сумме опорных функций этих множеств и что включение $D_1\subset D_2$ замкнутых выпуклых множеств D_1 и D_2 эквивалентно неравенству $H_{D1}\leqslant H_{D2}$ (например, [5]).

Неравенство (1.2) верно, в частности, и для $y'=-y$. Сложив неравенства (1.2) для y и y', получим ограничение только на матрицу Q

$$(Qy, y)^{1/2}\geqslant \sum\,(Q_iy, y)^{1/2},\quad \forall y\in \mathbf{R}^n \tag{1.3}$$

Ясно, что если выполнено неравенство (1.3) и $a=\Sigma a_i$, то выполнено и неравенство (1.2).

Матрица Q, удовлетворяющая условию (1.3), выбирается таким образом, чтобы

$$L(Q) \to \min \tag{1.4}$$

Здесь $L(Q)$ — гладкая, монотонно возрастающая функция от матрицы Q; т. е. если $Q_1 \geqslant Q_2$ (что означает $(Q_1\eta, \eta) \geqslant (Q_2\eta, \eta)$, $\forall \eta \in \mathbf{R}^n$ или, что то же самое, $E(0, Q_1) \supset E(0, Q_2)$), что $L(Q_1) \geqslant L(Q_2)$. Условие монотонности можно переформулировать в виде $\partial L/\partial Q \geqslant 0$, где $\partial L/\partial Q$ — градиент функции L.

Заметим, что центр искомого эллипсоида E равен [2] сумме центров эллипсоидов E_i. Квадратичную форму от вектора y можно записать в виде линейной формы от матрицы X первого ранга

$$(Qy, y) = \operatorname{tr}(QX), \quad X = y^*y$$

где звездочка означает транспонирование. Примем обозначение $\langle Q, X\rangle = \operatorname{tr}(Q, X)$. Тогда условие (1.3) переписывается в виде

$$\langle Q, X\rangle^{1/2} \geqslant \Sigma \langle Q_i, X\rangle^{1/2} \tag{1.5}$$

или после возведения в квадрат

$$\langle Q, X\rangle \geqslant \sum_{i,j} \langle Q_i, X\rangle^{1/2} \langle Q_j, X\rangle^{1/2}, \quad X = y^*y, \quad \forall y \in \mathbf{R}^n \tag{1.6}$$

так как в обеих частях неравенства (1.5) стоят неотрицательные числа. Функция в правой части неравенства (1.6) вогнутая на множестве неотрицательно-определенных матриц (это множество является выпуклой оболочкой матриц первого ранга $X = y^*y$, $y \in \mathbf{R}^n$).

Покажем, что расширение (1.6) на множество всех неотрицательно-определенных матриц не вносит дополнительных ограничений в задачу (1.3), (1.4).

Покажем это сначала для более простой задачи, связанной с ограничением

$$\langle Q, X\rangle \geqslant \Phi(X) = \langle A, X\rangle^{1/2} \langle B, X\rangle^{1/2}, \quad X = y^*y, \quad \forall y \in \mathbf{R}^n \tag{1.7}$$

где A и B — неотрицательно-определенные матрицы.

Обозначим $p: W \to \mathbf{R}^2$ такое линейное отображение, что $p_1 = \langle A, X\rangle$, $p_2 = \langle B, X\rangle$, где W — множество неотрицательно-определенных матриц.

Лемма 1. Образцы множества W и множества W_1 матриц первого ранга y^*y, $y \in \mathbf{R}^n$ при отображении p совпадают.

Доказательство. Без ограничения общности считаем матрицы A и B диагональными: $A = \operatorname{diag}\{a^1, \ldots, a^n\}$, $B = \operatorname{diag}\{b^1, \ldots, b^n\}$. Тогда

$$p_1 = \sum a^k X_{kk}, \quad p_2 = \sum b^k X_{kk}, \quad \forall X \in W$$

Здесь и в примере, приведенном в конце п. 1, индекс k принимает значения $1, 2, \ldots, n$; суммирование по этому индексу ведется от 1 до n.

Заметим, что ту же точку (p_1, p_2) можно получить как образ матрицы первого ранга y^*y, где $y^k = \sqrt{X_{kk}}$.

Тем самым лемма доказана.

Существенно, что функция $\Phi(X)$ представима в виде суперпозиции: $\Phi = \varphi \circ p$, где $\varphi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ дается формулой $\varphi(p_1, p_2) = p_1^{1/2} p_2^{1/2}$. Заметим также, что функция φ определена на некотором конусе положительного ортанта плоскости $\mathbf{R}^2$ (в частном случае, когда $B = \alpha A$, $\alpha > 0$, это луч с началом в центре координат).

Задача расширения (1.7) на множество W без внесения дополнительных ограничений означает поиск функции Φ' — наименьшей вогнутой функции на множестве W, совпадающей с Φ на W_1. Эта задача решается при помощи следующей леммы.

Лемма 2. Справедливо равенство

$$\Phi'(X) = \Phi(X), \quad \forall X \in W.$$

Доказательство. Так как любая матрица из W представима в виде конечной линейной комбинации матриц из W_1, то, по определению Φ', имеем

$$\Phi'(X) = \inf_{X=\sum y_l^* y_l} \sum \Phi(y_l^* y_l) \geqslant \inf_{p(X)=\sum p(y_l^* y_l)} \sum \varphi(p(y_l^* y_l)) = \\ = \varphi'(p(X)) = \varphi(p(X)) = \Phi(X)$$

Здесь и в лемме 3 индекс l означает номер элемента в линейной комбинации. Суммирование ведется по всем элементам представления.

Предпоследнее равенство следует из леммы 1. Таким образом, $\Phi'(X) \geqslant \Phi(X)$. Но, по определению Φ', $\Phi'(X) \leqslant \Phi(X)$. Тем самым лемма доказана.

Из леммы 2 получаем, что неравенство (1.7) эквивалентно следующему неравенству

$$\langle Q, X\rangle \geqslant \langle A, X\rangle^{1/2} \langle B, X\rangle^{1/2}, \ \forall X \in W$$

Докажем аналогичное утверждение для ограничения (1.6). Для этого используем следующее утверждение.

Лемма 3. Справедливо равенство

$$\Big(\sum_k \Phi_k(X)\Big)' = \sum_k \Phi_k'(X), \quad \forall X \in W$$

Здесь подразумевается произвольная конечная сумма по k.

Доказательство. По определению

$$\Big(\sum_k \Phi_k(X)\Big)' = \inf_{X=\sum y_l^* y_l} \sum_{k,l} \Phi_k(y_l^* y_l) \geqslant \sum_k \inf_{X=\sum y_l^* y_l} \sum_l \Phi_k(y_l^* y_l) = \sum_k \Phi_k'(X)$$

Заметим, что, согласно определению операции $\Phi \to \Phi'$, имеет место соотношение

$$\Big(\sum_k \Phi_k(X)\Big)' \leqslant \sum_k \Phi_k(X) = \sum_k \Phi_k'(X)$$

Последнее равенство следует из леммы 2. Таким образом утверждение леммы доказано.

Тем самым завершено доказательство правомочности расширения неравенства (1.6) на множество W, т. е. ограничение (1.6) эквивалентно неравенству

$$\langle Q, X\rangle \geqslant \sum_{i,j} \langle Q_i, X\rangle^{1/2} \langle Q_j, X\rangle^{1/2}, \quad \forall X \in W \tag{1.8}$$

Заметим, что неравенство (1.8) определяет функцию $R_D(X) = \inf_{Q\in D} \langle Q, X\rangle$, которая связана с опорной функцией $H_D(X)$ допустимых матриц Q (таких, что соответствующие эллипсоиды содержат Ω) соотношением $R_D(X) = -H_D(-X)$. А именно

$$R_D(X) = \begin{cases} \sum_{i,j} \langle Q_i, X\rangle^{1/2} \langle Q_j, X\rangle^{1/2}, & X \in W \\ -\infty &, X \notin W \end{cases}$$

Зная $R_D(X)$, можно параметризовать точки Q, границы D, минизирующие скалярное произведение $\langle Q, X\rangle$:

$$Q = \partial R_D/\partial X \tag{1.9}$$

Формула (1.9) дает решение задачи (1.3), (1.4) для случая линейного функционала

$$L(Q) = \langle C, Q\rangle \tag{1.10}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Решение задачи (1.3), (1.4) дается формулой

$$Q = \sum_{i,j} Q_i \frac{\langle Q_j, C\rangle^{1/2}}{\langle Q_i, C\rangle^{1/2}} \tag{1.11}$$

Обозначим $E_1 \boxplus E_2 \boxplus \ldots \boxplus E_N$ эллипсоид E, минимизирующий критерий качества (1.10) и содержащий сумму Минковского эллипсоидов E_p, $p = 1, 2, \ldots, N$. Будем также применять обозначение $E = \boxplus \sum_{p=1}^{N} E_p$.

Сформулируем основные свойства введенной операции.

Свойство 1 (коммутативность)

$$E(a_1, Q_1) \boxplus E(a_2, Q_2) = E(a_2, Q_2) \boxplus E(a_1, Q_1)$$

Свойство 2 (ассоциативность)

$$\left[\boxplus \sum_{p=1}^{N} E(a_p, Q_p)\right] \boxplus E(a_{N+1}, Q_{N+1}) = \boxplus \sum_{p=1}^{N+1} E(a_p, Q_p)$$

Свойство 3 (подобные эллипсоиды)

$$E(a_1, \alpha_1^2 Q) \boxplus E(a_2, \alpha_2^2 Q) = E(a_1 + a_2, (\alpha_1 + \alpha_2)^2 Q), \ \forall \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$$

Свойство 1 — очевидно, свойства 2 и 3 проверяются подстановкой в формулу (1.11).

Для произвольного критерия качества (1.4) верна следующая теорема.

Теорема 2. Решение задачи (1.3), (1.4) задается следующей формулой

$$Q = \sum_{i,j} Q_i \frac{\langle Q_j, \partial L/\partial Q\rangle}{\langle Q_i, \partial L/\partial Q\rangle} \tag{1.12}$$

Заметим, что для нелинейного критерия качества формула (1.12) не задает непосредственно матрицу Q, так как в правой части (1.12) градиент $\partial L/\partial Q$ берется в точке Q. Следовательно, формула (1.12) является уравнением для определения Q. В частном случае $L(Q) = \mathrm{vol}\, E(a, Q)$ решение (1.12) для случая $m = 2$ сводится к решению двух алгебраических уравнений, полученных в [2]. Ассоциативность в общем случае уже не будет иметь места, однако свойства 1 и 3 сохраняются.

Приведем пример аппроксимации эллипсоидом E с матрицей Q минимального следа прямоугольного параллелепипеда. Заметим, что параллелепипед — это сумма отрезков, представляющих собой вырожденные эллипсоиды, у которых только одна полуось отлична от нуля:

$$E_i = E(0, Q_i), \quad Q_i = \mathrm{diag}\{d_i^1, \ldots, d_i^n\}$$
$$d_i^k = \alpha_i^2 \delta_{ik}, \quad \alpha_i > 0$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Для этого случая формула (1.11) приводит к следующему результату:

$$Q = \mathrm{diag}\{d^1, \ldots, d^n\}, \quad d^k = \alpha_i \left(\sum \alpha_k\right)$$

Отметим, что в частном случае аппроксимирующего эллипсоида, оптимального в смысле линейного критерия качества (1.10) (например, следа матрицы эллипсоида — суммы квадратов длин полуосей), результаты находятся в полном соответствии с аналогичной операцией для гауссовских случайных величин.

2. Оценка области достижимости. Применим полученные результаты в задаче гарантированного оценивания состояния линейной динамической системы, подверженной нескольким независимым внешним возмущениям

$$x^{\cdot} = A(t)x + \sum u_i(t) \tag{2.1}$$

Здесь t — время, x — n-мерный фазовый вектор, $u_i(t)$ — n-мерный вектор управляющих или возмущающих функций, удовлетворяющих ограничениям

$$u_i(t) \in E(g_i(t),\ G_i(t)) \tag{2.2}$$

где $G_i(t)$ — непрерывные неотрицательно-определенные матрицы, $g_i(t)$ — непрерывные вектор-функции. Пусть начальный вектор локализован в эллипсоиде:

$$x(t_0) \in E(a_0,\ Q_0) \tag{2.3}$$

Используя конечно-разностный вывод уравнений эволюции оценивающего эллипсоида из работы [2] и применяя новую операцию суммирования эллипсоидов, получаем дифференциальные уравнения, определяющие движение оптимальных эллипсоидов

$$a^{\cdot} = A(t)a + \sum g_i(t) \tag{2.4}$$

$$Q^{\cdot} = A(t)Q + QA^*(t) + \left(\sum q_i\right)Q + \sum \frac{G_i(t)}{q_i}$$

$$a(t_0) = a_0,\ Q(t_0) = Q_0$$

где

$$q_i = \frac{\operatorname{tr}(G_i(t)\,\partial L/\partial Q)}{\operatorname{tr}(Q\,\partial L/\partial Q)} \tag{2.5}$$

Полученный эллипсоид решает следующую экстремальную задачу:

$$dL(Q)/dt \to \min \tag{2.6}$$

Если требуются эллипсоидальные оценки, оптимальные в смысле скорости изменения линейного критерия качества

$$d\operatorname{tr}(CQ)/dt \to \min$$

то решение уравнения (3.5), (3.6) будет таким же, как и для случая задачи (2.1)—(2.3) с одним ($m = 1$) возмущающим воздействием, ограниченным эллипсоидом с параметрами, определяемыми следующими формулами:

$$g(t) = \sum g_i(t)$$

$$G(t) = \sum_{i,j} G_i(t) \frac{\operatorname{tr}(G_j(t)C)}{\operatorname{tr}(G_i(t)C)}$$

Эллипсоид $E(g(t),\ G(t))$ получен при помощи введенной выше операции суммирования эллипсоидов $E(g_i(t),\ G_i(t))$ так, чтобы $\operatorname{tr}(G(t)C) \to \min$.

Заметим, что указанное тождество решений основано на свойстве ассоциативности введенной операции суммирования для случая линейного критерия качества. Для общего критерия (2.6) такое отождествление не будет иметь места.

3. Пример. Рассмотрим простой пример использования введенной операции суммирования, позволяющий провести качественное сравнение поведения эллипсоида оценивания в гарантированном случае и эллипсоида рассеяния при стохастическом оценивании.

Пусть имеется линейная динамическая система вида (2.1) с $A(t) \equiv 0$, т. е.

$$x^{\cdot} = u;\ u,\ x \in \mathbf{R}^n \tag{3.1}$$

Гарантированный подход предполагает, что неизвестный вектор управления u и начальный вектор системы лежат в заданных множествах. Зададим их эллипсоидами $x(0) \in E(a_0,\ Q_0)$, $u \in E(0,\ G)$. Тогда очевидно, что точная область достижимости данной системы к моменту t определится как сумма множеств $E(a_0, Q_0)$ и $E(0, Gt^2)$.

Будем аппроксимировать точную область достижимости эллипсоидом $E(a, Q)$ так, чтобы $\operatorname{tr} Q \to \min$. Следовательно, $E(a, Q) = E(a_0, Q_0) \boxplus E(0, Gt^2)$. Вычисление по формуле (1.11) дает

$$a = a_0, \quad Q = Q_0 + t(\alpha Q_0 + \alpha^{-1} G) + t^2 G$$
$$\alpha = \sqrt{\operatorname{tr} G / \operatorname{tr} Q_0} \tag{3.2}$$

Заметим, что формула (3.2) дает точное решение уравнения (2.4), (2.5). Это означает, что для системы (3.1) локально оптимальные оценки совпадают с оптимальными в конечный момент времени.

Если же теперь u в (3.1) трактовать как идеальный белый шум с интенсивностью R (т. е. $M\{u^*(t)\, u(t+\tau)\} = R\delta(\tau)$, где M означает математическое ожидание, а δ — дельта-функция Дирака), начальный вектор считать гауссовской случайной величиной с заданным математическим ожиданием a_0 и матрицей ковариации D_0, то параметры эллипсоида рассеяния в данной задаче (математическое ожидание a, матрица ковариации D) таковы:

$$a = a_0, \quad D = D_0 + Rt \tag{3.3}$$

Таким образом, качественное различие между белыми шумами и ограниченными по величине воздействиями приводит к разным эволюционным зависимостям (3.2) и (3.3). В частности, для больших t размер эллипсоида оценивания (3.2) растет приблизительно линейно, а размер эллипсоида рассеяния (3.3) приблизительно пропорционален квадратному корню из времени.

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько и А. И. Овсеевича за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. *Черноусько Ф. Л.* Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 3. С. 3—11.
3. *Овсеевич А. И.* Экстремальные свойства эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости // Проблемы управления и теории информации. 1983. Т. 12. № 1. С. 43—54.
4. *Хонин В. А.* Гарантированные оценки состояния линейных систем с помощью эллипсоидов // Эволюционные системы в задачах оценивания. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1985. С. 104—123.
5. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.IV.1988