Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 2, 1989

УДК 531.36 + 62—50

А. М. Ковалев

ОПОРНАЯ И КАЛИБРОВОЧНАЯ ФУНКЦИИ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются линейные неавтономные системы с выпуклыми совместными ограничениями на начальное состояние и управление. Выпуклость ограничивающего множества позволяет описать его в терминах опорной либо калибровочной функции. При этом область достижимости (ОД) также выпукла. Получены формулы опорной и калибровочной функций области достижимости, использующие соответствующие функции для ограничивающего множества. На основе этих формул предлагаются способы построения ОД и различных ее оценок.

1. Исходные соотношения. Рассматривается система

$$x^{\cdot} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in T = [t_0, t_1] \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор, u — m-мерный вектор управления, являющийся суммируемой функцией времени t, $A(t)$, $B(t)$ — непрерывные матрицы соответствующих размерностей. В пространстве начальных состояний и управлений $\Lambda = \{\lambda = (x_0, u(t))\} = R^n \times L$ (L — множество m-мерных вектор-функций, суммируемых на T) допустимые начальные состояния и управления принадлежат ограничивающему множеству Ω. При заданном управлении $u(t)$ и начальном условии x_0 решение системы (1.1) дается формулой Коши (здесь и всюду далее интегрирование ведется в пределах от t_0 до t)

$$x(t) = H(t, t_0, x_0, u) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int \Psi(t, \tau)u(\tau)\,d\tau \tag{1.2}$$

которая определяет линейный оператор $H(t, t_0, \circ, \circ)$: $\Lambda \to R^n$. Введем оператор H_e, действующий из фактор-пространства Λ/N в R^n по формуле $H = H_eE$, где $N = \ker H$, Λ/N — фактор-пространство Λ по подпространству N, E — естественное отображение, ставящее в соответствие элементу $\lambda \in \Lambda$ его класс эквивалентности: $E\lambda = [\lambda]$.

Область достижимости (ОД) $Q(t_0, t) = \{x \in R^n: x = H(t, t_0, x_0, u), (x_0, u(t)) \in \Omega\}$ является образом ограничивающего множества Ω при отображении $H: Q = H(t, t_0, \circ, \circ)\Omega$. Изучим ее в предположении, что Ω — выпуклое множество.

2. Условие граничной точки. В пространстве Λ рассмотрим линейный функционал

$$\langle (y_0, v(\tau)), (x_0, u(\tau))\rangle = \langle y_0, x_0\rangle_n + \int \langle v(\tau), u(\tau)_m\rangle\,d\tau \tag{2.1}$$

$$\langle x, y\rangle_n = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i, \quad x^T = (x^1, \ldots, x^n), \quad y_0 \in R^n$$

где множество функций $v(\tau)$ определяется заданием ограничивающего множества Ω. Так, для

$$\Omega = \left\{(x_0, u(\tau)): x_0 = 0, \quad \int |u(\tau)|\,d\tau \leqslant A, \ u \in R^1\right\}$$

функциями $v(\tau)$ являются функции, ограниченные в существенном.

Из формул (1.2), (2.1) следует, что класс эквивалентности отображения H в пространстве Λ начальных состояний и управлений оказывается плоским многообразием, принадлежащим пересечению семейства гиперплоскостей

$$x^i = \langle \gamma_i, \lambda \rangle, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.2}$$

$$\gamma_i{}^T = (\varphi_{i*}^T(t), \psi_{i*}^T(t, \tau)), \quad \Phi^T(t, t_0) = (\varphi_{1*}(t), \ldots, \varphi_{n*}(t))$$

$$\Psi^T(t, \tau) = (\psi_{1*}(t, \tau), \ldots, \psi_{n*}(t, \tau))$$

Теорема 1. Класс эквивалентности отображения H определяет граничную точку ОД, если он полностью принадлежит одной из опорных гиперплоскостей ограничивающего множества Ω в пространстве Λ.

Для доказательства заметим, что в случае, если класс эквивалентности $[\lambda]$ включает внутреннюю точку $\lambda_b \in \Omega$, то, взяв ее окрестность, содержащуюся в Ω, и подействовав на нее оператором H, получим, что соответствующая точка $x = H\lambda_b$ — внутренняя точка ОД. Отсюда следует, что классы эквивалентности, определяющие граничные точки ОД, не содержат внутренних точек ограничивающего множества, т. е. они полностью принадлежат некоторым опорным гиперплоскостям множества Ω.

Используя описание (2.2) классов эквивалентности, из теоремы 1 получаем условие граничной точки: граничная точка ОД определяется классом эквивалентности, для которого нормаль γ к опорной гиперплоскости множества Ω является линейной комбинацией векторов γ_i, введенных в формуле (2.2)

$$\gamma = \alpha_1\gamma_1 + \ldots + \alpha_n\gamma_n, \quad \alpha_i = \text{const}, \; i = 1, \ldots, n \tag{2.3}$$

Формулы (1.2), (2.3) и формула границы ограничивающего множества дают параметрическое описание границы ОД.

В качестве примера построим ОД системы (1.1) с ограничивающим множеством

$$\Omega_0 = \left\{(x_0, u(\tau)) : \|x_0\|_n{}^2 + \int \|u(\tau)\|_m{}^2 d\tau \leqslant A^2\right\} \tag{2.4}$$

Граница множества Ω_0 определяется уравнением $F(\lambda) = \langle (x_0, u), (x_0, u) \rangle - A^2 = 0$, поэтому вектор нормали будет равен $\gamma = \operatorname{grad}_\lambda F = (x_0, u)$. Условие граничной точки (2.3) запишется в виде

$$\chi\alpha = \begin{Vmatrix} x_0 \\ u \end{Vmatrix}, \quad \chi = \begin{Vmatrix} \Phi^T(t, t_0) \\ \Psi^T(t, \tau) \end{Vmatrix}, \quad \alpha^T = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

откуда находим

$$\alpha = \Phi^{T-1}(t, t_0)x_0, \; u = \Psi(t, \tau)\Phi^{T-1}(t, t_0)x_0$$

Подставляя эти выражения в формулу (1.2), получаем

$$x_0 = \Phi^T(t, t_0) Y^{-1}(t, t_0) x, \; u = \Psi^T(t, \tau) Y^{-1}(t, t_0) x$$

$$Y(t, t_0) = \Phi(t, t_0)\Phi^T(t, t_0) + \int \Psi(t, \tau)\Psi^T(t, \tau) d\tau$$

Подставляя указанные значения в уравнения границы множества Ω_0, находим, что ОД будет эллипсоид, граница которого

$$(Y^{-1}(t, t_0)x, x)_n = A^2 \tag{2.5}$$

Для случая, когда начальное множество состоит из единственной точки x_0, этот результат известен [1].

3. Опорная функция ОД. Выпуклость ограничивающего множества и наличие в пространстве Λ скалярного произведения (2.1) дают возможность вычислить опорную функцию $q_\Omega'(\gamma)$ множества Ω. Найдем выражение опорной функции $q_Q(\beta)$ ОД через $q_\Omega(\gamma)$. Имеем

$$q_Q(\beta) = \sup_{x\in Q}(\beta, x)_n = \sup_{\lambda\in\Omega}\left[(\Phi(t, t_0)x_0, \beta)_n + \int(\Psi(t, \tau)u(\tau), \beta)_n d\tau\right] = \\ = \sup_{\lambda\in\Omega}\langle\chi\beta, \lambda\rangle = q_\Omega(\chi\beta)$$

Отсюда получаем опорную функцию ОД

$$q_Q(\beta) = q_\Omega(\chi\beta) \tag{3.1}$$

Воспользуемся формулой (3.1) и вычислим опорную функцию ОД системы (1.1) для трех типов ограничений: Ω_0 (формула (2.4)) и Ω_1, Ω_2, где

$$\begin{gathered}\Omega_1 = \{(x_0, u(\tau)) : \max(|x_0{}^i|, \sup_{\tau\in T}|u^j(\tau)|, i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m) \leqslant A\} \\ \Omega_2 = \left\{(x_0, u(\tau)) : \sum_{i=1}^n |x_0{}^i| + \sum_{j=1}^m \sup_{\tau\in T}|u^j(\tau)| \leqslant A\right\}\end{gathered} \tag{3.2}$$

Приведем вычисления для Ω_1. По определению опорной функции из формул (3.1), (3.2) имеем

$$\begin{gathered}q_{Q_1}(\beta) = \sup_{\lambda\in\Omega_1}\left\{(\Phi^T(t, t_0)\beta, x_0)_n + \int(\Psi^T(t, \tau)\beta, u(\tau))_m d\tau\right\} \leqslant \\ \leqslant \sup_{\lambda\in\Omega_1}\left\{\sum_{i=1}^n |(\varphi_i(t, t_0), \beta)_n||x_0{}^i| + \sum_{j=1}^m \sup_{\tau\in T}|u^j(\tau)| \times\right. \\ \left.\times\int|(\psi_j(t, \tau), \beta)_n|d\tau\right\} \leqslant A\left\{\sum_{i=1}^n|(\varphi_i(t, t_0), \beta)_n| + \sum_{j=1}^m\int|(\psi_j(t, \tau), \beta)_n|d\tau\right\}\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\Phi(t, t_0) = (\varphi_1(t, t_0), \ldots, \varphi_n(t, t_0)),\ \Psi(t, \tau) = (\psi_1(t, \tau), \ldots, \psi_m(t, \tau))$$

Равенство в формуле (3.3) достигается при

$$x_{01}{}^i = A\,\mathrm{sign}\,(\varphi_i(t, t_0), \beta)_n, \qquad u_1{}^j(\tau) = A\,\mathrm{sign}\,(\psi_j(t, \tau), \beta)_n$$

Поэтому для опорной функции $q_{Q_1}(\beta)$ получаем выражение, стоящее в правой части цепочки неравенств (3.3).

Аналогично находим формулы для опорных функций и соответствующих значений начального состояния и управления для множеств Ω_0, Ω_2

$$q_{Q_0}(\beta) = A\left\{\sum_{i=1}^n(\varphi_i(t, t_0), \beta)_n{}^2 + \sum_{j=1}^m\int(\psi_j(t, \tau), \beta)_n{}^2 d\tau\right\}^{1/2}$$

$$x_{00}{}^i = A^2(\varphi_i(t, t_0), \beta)_n/q_{Q_0}(\beta),\ u_0{}^j(\tau) = A^2(\psi_j(t, \tau), \beta)_n/q_{Q_0}(\beta)$$

$$q_{Q_2}(\beta) = A\max\left\{|(\varphi_i(t, t_0), \beta)_n|, \int|(\psi_j(t, \tau), \beta)_n|d\tau,\quad i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m\right\}$$

$$x_{02}{}^i = \begin{cases} Ak^{-1}\,\mathrm{sign}\,(\varphi_i(t, t_0), \beta)_n, & \xi_i = A \\ 0, & \xi_i \neq A\end{cases}$$

$$u_2{}^j(\tau) = \begin{cases} Ak^{-1}\,\mathrm{sign}\,(\psi_j(t, \tau), \beta)_n, & \eta_j = A \\ 0, & \eta_j \neq A\end{cases}$$

$$\xi_i = |(\varphi_i(t, t_0), \beta)_n|, \quad \eta_j = \sup_{\tau\in T}|(\psi_j(t, \tau), \beta)_n|$$

k — число величин ξ_i, η_j ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$), равных максимальному значению A.

Опорные функции ОД для рассмотренных ограничений, накладываемых только на управление, получены в работах [1, 2].

4. Калибровочная функция ОД. Ограничивающее множество будем считать поглощающим в его линейной оболочке $L(\Omega)$ (если это не так, то предварительным сдвигом переведем его в поглощающее). Тогда калибровочная функция множества Ω $p_\Omega(\lambda) = \inf\{r > 0 : \lambda \in r\Omega\}$ будет выпуклым функционалом. Определим в $\Lambda \mid N$ функционал

$$P(\xi) = \inf_{\lambda \in \xi} p_\Omega(\lambda) \tag{4.1}$$

Для калибровочной функции области достижимости $p_Q(x)$ в работе [3] доказана следующая теорема.

Теорема 2. Функционал PH_e^{-1} является калибровочной функцией ОД.

Для применения этой теоремы необходимо знать описание класса эквивалентности $H_e^{-1}x$. Прямой подстановкой убеждаемся, что $H_e^{-1}x$ состоит из элементов $\lambda \in \Lambda$, определяемых многозначным отображением

$$F(x) = \begin{Vmatrix} C_1 D^{-1} x \\ C_2(\tau) D^{-1} x \end{Vmatrix}, \quad D = \Phi(t, t_0) C_1 + \int \Psi(t, \tau) C_2(\tau)\, d\tau \tag{4.2}$$

где C_1, $C_2(\tau)$ — матрицы с произвольными элементами, дающие невырожденную матрицу D.

5. Применение в задачах управления. Полученные формулы калибровочной и опорной функций могут быть использованы при построении ОД и различных ее оценок и при решении других задач теории управления. Укажем некоторые их применения.

Из теоремы 2 следуют формулы

$$\operatorname{int} Q = \{x \in R^n \colon PH_e^{-1}x < 1\}, \quad \partial Q = \{x \in R^n \colon PH_e^{-1}x = 1\} \tag{5.1}$$

Основная трудность при применении этих формул состоит в вычислении значений функционала P. Если ограничиться его приближенными значениями, то формулы (5.1), (4.2) дают внутренние оценки ОД. Пусть $\mu(x)$ — некоторое однозначное сечение отображения $F(x)$, тогда внутренняя оценка определяется формулой

$$Q_b = \{x \in R^n \colon p_\Omega(\mu(x)) < 1\} \tag{5.2}$$

Выбирая подходящим образом $\mu(x)$, можно добиться любой наперед заданной точности оценки (5.2).

Внутренние и внешние оценки ОД можно получить, если калибровочная функция ограничивающего множества Ω допускает сравнение с калибровочной функцией другого множества Ω': $p_\Omega(\lambda) \leqslant p_{\Omega'}(\lambda)$ $(p_\Omega(\lambda) \geqslant p_{\Omega'}(\lambda))$. Тогда из теоремы 2 и формул (5.1), (4.2) следует включение $\bar{Q} \supset Q'$ $(\bar{Q}' \supset Q)$ где Q' — ОД системы (1.1) с ограничивающим множеством Ω'.

Так, для системы (1.1) с ограничивающим множеством Ω_0 ОД — эллипсоид с границей (2.5). Поэтому для систем с ограничениями, допускающими сравнение с (2.4), могут быть указаны эллипсоидальные оценки ОД. В частности, имеют место неравенства $p_{\Omega_1} > p_{\Omega_0}$, $p_{\Omega_0} > p_{\Omega_2}$, и в силу изложенного для системы (1.1) с ограничивающим множеством Ω_1 имеет место внешняя эллипсоидальная оценка (2.5), а с ограничивающим множеством Ω_2 — внутренняя.

Свои преимущества имеет использование опорной функции при изучении ОД. Границу ОД можно рассматривать как огибающую семейства опорных гиперплоскостей $(x, \beta)_n = q_Q(\beta)$, поэтому в точках дифференцируемости опорной функции она определяется уравнениями $(x, \beta)_n = q_Q(\beta)$, $x = \partial q_Q / \partial \beta$. Достаточно просто можно получить оценку многогранниками $(x, \beta_i)_n \leqslant q_Q(\beta_i)$, фиксируя нормали β_i к граням, выбор которых может определяться какими-либо дополнительными условиями решаемой задачи. Так, в задачах наблюдения полезна оценка прямоугольниками $|x^i| \leqslant q_Q(e_i)$ $i = 1, 2, \ldots n$, где e_i — орт оси Ox^i. Увеличивая число граней, можно получить требуемую точность оценки.

Формула (3.1) дает решение задачи попадания на гиперплоскость $(\alpha, x)_n = d$, определяемое условием $q_Q(\alpha) = d$.

Если справедливо неравенство $q_{Q_1}(\beta) \geqslant q_{Q_2}(\beta)$ $\forall\beta$, то, очевидно, $Q_1 \supseteq Q_2$. Это позволяет проводить сравнительную оценку ОД. В частности, из результатов п. 3. следует, что $q_{Q_1} > q_{Q_0} > q_{Q_2}$, поэтому $Q_1 \supset Q_0 \supset Q_2$, что совпадает с выводом, полученным при рассмотрении калибровочных функций. Кроме того, выделив в формуле опорной функции члены, зависящие от начального состояния, характеризуемые функциями $\varphi_i(t_1, t_0)$, и от управления, характеризуемые функциями $\psi_i(t, \tau)$, можно оценить их вклад в эволюцию ОД, что может иметь важное значение при разработке реальных систем и законов управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бублик Б. Н.*, *Кириченко Н. Ф.* Основы теории управления. Киев: Вища шк., 1975. 328 с.
2. *Формальский А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
3. *Губин С. В.*, *Ковалев А. М.* Калибровочная функция области достижимости линейной системы управления и ее применение в задачах оценивания // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 10. С. 21—25.

Донецк

Поступила в редакцию 24.V.1988