Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 2, 1989

УДК 531.36 + 62—50

В. Б. Колмановский, Н. И. Королева

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫМИ БИЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Рассматривается задача оптимального управления билинейными системами с последействием. Выделяется класс таких систем, построение оптимального управления которыми сводится к решению линейных дифференциальных уравнений. Устанавливаются рекуррентные формулы, определяющие это решение. В качестве примера исследуется билинейная модель с последействием процесса роста клеток в микробиологической управляемой среде.

Билинейными принято называть системы, уравнения эволюции которых линейны по фазовым координатам при фиксированных управлениях и по управлениям при фиксированных координатах [1, 2]. Подобного рода системы применяются при моделировании ряда процессов управления, в том числе в биологических системах [3—5] и др.

1. Постановка задачи. Условия оптимальности. Вначале для простоты изложения рассматриваются управляемые системы с одним постоянным запаздыванием и скалярным управлением вида

$$\dot{x}(t) = A_1(t)\,x(t-h) + (A(t)\,x(t) + B(t))u \tag{1.1}$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in R_n,\ u \in R_1,\ h = \text{const} \geqslant 0$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ — матрицы с заданными кусочно-непрерывными элементами, $A_1(t)$ — кусочно-непрерывно дифференцируемая матрица. Решение уравнения (1.1) определяется начальным условием

$$x(\theta) = \varphi(\theta),\ -h \leqslant \theta \leqslant 0,\ \varphi(\theta) \in R_n \tag{1.2}$$

где $\varphi(\theta)(-h \leqslant \theta \leqslant 0)$ — заданная кусочно-непрерывная ограниченная функция. Пусть D — пространство таких функций. Управление u в (1.1) требуется выбрать в виде синтеза $u = u(t, \varphi)$, кусочно-непрерывного по t и непрерывного по $\varphi \in D$, так, чтобы минимизировать функционал

$$x'(T)\,N_1 x(T) + \int_0^T [x'(t)\,N_2(t)\,x(t) + u'(t)\,N(t)\,u(t) + $$
$$+ f(t, x_t)]\,dt;\quad N_i \geqslant 0,\quad N(t) > 0 \tag{1.3}$$

Здесь x_t — отрезок траектории $x(t+\theta)(-h \leqslant \theta \leqslant 0)$. В выражении (1.3) элементы матрицы $N_2(t)$ и $N(t)$ кусочно-непрерывны, а вид функционала $f(t, x_t)$ приводится ниже.

Выбор f в функционале (1.3) осуществляется при помощи принципа обобщенной работы [6] и метода динамического программирования [7], модифицированных для систем с последействием. Опишем его.

Обозначим $V(t, \varphi)(\varphi \in D)$ функционал Беллмана задачи (1.1)—(1.3). Уравнение Беллмана имеет вид

$$\inf_{u \in R_1} [V^{\cdot}(t, \varphi) + \varphi'(0) N_2(t) \varphi(0) + N(t) u^2 + f(t, \varphi)] = 0$$
$$V(T, \varphi) = \varphi'(0) N_1 \varphi(0) \tag{1.4}$$

Здесь $V^{\cdot}(t, \varphi)$ полная производная функционала V вдоль траекторий системы (1.1) при том значении параметра управления u, которое фигурирует в формуле (1.4). Подчеркнем, что в (1.4) точная нижняя грань вычисляется по скалярному параметру u.

Решение задачи (1.4) ищется в виде

$$V(t, \varphi) = \varphi'(0) P(t) \varphi(0) + \varphi'(0) \int Q(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau +$$
$$+ \int \varphi'(\tau) Q'(t, \tau) d\tau \varphi(0) + \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} \varphi'(\tau) R(t, \tau, \rho) \varphi(\rho) d\tau d\rho \tag{1.5}$$

где матрицы P, Q, R подлежат определению. Здесь и всюду далее в п. 1 интегрирование по τ ведется в пределах от $-h$ до 0. Из (1.5) следует, что должно быть $R(t, \tau, \rho) = R'(t, \rho, \tau)$.

Вычислим $V^{\cdot}$, подставим в (1.4) и, заменив $x^{\cdot}(t)$ в соответствии с уравнением (1.1), найдем управление, которое минимизирует левую часть (1.4)

$$u_0(t, x_t) = -N^{-1}(t) [A(t) x(t) + B(t)]' \left[P(t) x(t) + \int Q(t, \tau) x(t + \tau) d\tau\right] \tag{1.6}$$

Выберем теперь f таким образом, чтобы аннулировать нелинейные по P, Q, R слагаемые в уравнении (1.4). Для этого следует положить

$$f = N u_0^2 \tag{1.7}$$

Подставляя соотношения (1.5)—(1.7) в (1.4) и приравнивая нулю квадратичные формы от $x(t)$ и $x(t + \theta)$, получаем систему линейных дифференциальных уравнений относительно матриц $P(t)$, $Q(t, \tau)$, $R(t, \tau, \rho)$.

$$\begin{gathered} P^{\cdot}(t) + Q(t, 0) + Q'(t, 0) + N_2(t) = 0 \\ (\partial/\partial t - \partial/\partial\tau) Q(t, \tau) + R(t, \tau, 0) = 0 \\ (\partial/\partial t - \partial/\partial\tau - \partial/\partial\rho) R(t, \tau, \rho) = 0 \\ 0 \leqslant t \leqslant T, \ -h \leqslant \tau, \rho \leqslant 0 \end{gathered} \tag{1.8}$$

Подобным же образом, приравнивая нулю квадратичные формы, содержащие $x(t - h)$, и используя (1.4), заключаем, что имеют место граничные условия

$$\begin{gathered} P(T) = N_1, \ Q(T, \bar\tau) \equiv 0, \quad R(T, \bar\tau, \bar\rho) \equiv 0, \ -h < \bar\tau, \bar\rho \leqslant 0 \\ Q'(t, -h) = A_1'(t) P(t), \ R(t, \tau, \rho) = R'(t, \rho, \tau) \\ R(t, -h, \tau) + R'(t, \tau, -h) = 2A_1'(t) Q(t, \tau) \\ 0 \leqslant t \leqslant T, \ -h \leqslant \tau, \rho \leqslant 0 \end{gathered} \tag{1.9}$$

Отметим [8], что в классе кусочно-непрерывно дифференцируемых ограниченных функций существует и притом единственное решение P, Q, R краевой задачи (1.8), (1.9) при условии, что матрица $N_2(t)$ ограничена и кусочно-непрерывна, а матрица $A_1(t)$ дифференцируема по t и имеет кусочно-непрерывные, ограниченные производные.

Для обоснования оптимальности управления (1.6) необходимо установить существование ограниченного на отрезке $[0, T]$ решения $x^\circ(t)$ задачи (1.1), (1.2) при $u = u_0$. Поскольку условия локальной теоремы существования [9] выполнены, то достаточно проверить ограниченность функции $x^\circ(t)$.

В силу (1.4), (1.7) имеем $V(t, x_t^\circ) \leqslant V(0, \varphi)$. Отсюда и из (1.5) следует, что

$$|x(t)|^2 \leqslant V(0, \varphi) + c\left(|x(t)| \int |x(t + \tau)| d\tau + \left(\int |x(t + \tau)| d\tau\right)^2\right), \quad c = \mathrm{const} > 0 \tag{1.10}$$

Из (1.10), используя неравенство Коши — Буняковского, заключаем, что при любом $\varepsilon > 0$

$$|x(t)|^2 \leqslant V(0, \varphi) + c\left(\varepsilon h |x(t)|^2 + (h + \varepsilon^{-1}) \int |x(t + \tau)|^2 d\tau\right)$$

Выбирая здесь $\varepsilon > 0$ так, что $c\varepsilon h < 1$, и используя лемму Гроноулла — Беллмана, убеждаемся в существовании ограниченного на $[0, T]$ решения задачи (1.1), (1.2).

Таким образом, определение синтеза оптимального управления (1.6) и соответствующего ему значения критерия качества (1.5) сведено к решению задачи (1.8), (1.9).

2. Построение решения задачи (1.8), (1.9). Опишем способ решения задачи (1.8), (1.9). Отметим, что значение функционала

$$J(t) = x'(T)N_1x(T) + \int_t^T x'(s)N_2(s)x(s)\,ds \tag{2.1}$$

на траекториях системы

$$x^{\bullet}(s) = A_1(s)x(s-h),\ s \geqslant t;\ x(t+\theta) = \varphi(\theta),\ -h \leqslant \theta \leqslant 0 \tag{2.2}$$

задается формулой (1.5).

Определим вначале $J(t)$ при $T-h \leqslant t \leqslant T$. В этом случае величина $J(t)$ может быть найдена двумя способами. С одной стороны, при $t \geqslant T-h$ система (2.2) не содержит последействия и потому $J(t)$ можно найти аналитически в виде квадратичной формы начальных условий. С другой стороны, $J(t)$ дается формулой (1.5). Приравнивая найденные таким образом значения $J(t)$, получаем выражения для P, Q, R при $T-h \leqslant t \leqslant T$. После этого определим P, Q, R при $T-2h \leqslant t \leqslant T$. Для этого представим $J(t)$ в виде

$$J(t) = \int_t^{T-h} x'(s)N_2(s)x(s)\,ds + J_1$$

$$J_1 = x'(T)N_1x(T) + \int_{T-h}^{T} x'(s)N_2(s)x(s)\,ds$$

и заменим здесь J_1 в соответствии с (1.5), используя уже найденные на предыдущем шаге матрицы P, Q, R при $T-h \leqslant t \leqslant T$. Получим, что и при $T-2h \leqslant t \leqslant T$ функционал $J(t)$ имеет вид квадратичной формы от траектории. Поэтому, используя тот же прием сравнения, определим P, Q, R при $T-2h \leqslant t \leqslant T$. Действуя аналогичным образом, можно определить матрицы P, Q, R при всех $t \in [0, T]$.

Приведем соответствующие выражения.

Представим решение краевой задачи (1.8), (1.9) в виде суммы двух решений: первое при $N_2 = 0$ и произвольной матрице N_1, а второе при $N_1 = 0$ и произвольной матрице N_2. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что первое решение (при $N_2 = 0$) имеет вид

$$\begin{gathered} P(t) = B_2'(t)N_1B_2(t),\quad Q(t,\tau) = -B_2'(t)N_1B_2^{\bullet}(t+\tau) \\ R(t,\tau,\rho) = B_2^{\bullet\prime}(t+\tau)N_1B_2^{\bullet}(t+\rho),\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ -h \leqslant \tau,\ \rho \leqslant 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

причем матрица $B_2(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} B_2^{\bullet}(t) = -B_2(t+h)A_1(t+h),\quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ B_2(s) = 0,\quad s > T;\quad B_2(T) = I \end{gathered} \tag{2.4}$$

а в точке $T-h$ разрыва производной $B_2^{\bullet}(t)$ она определяется по непрерывности слева.

Приведем рекуррентные формулы, определяющие второе решение (при $N_1 = 0$). Положим $t_i = T - ih$, где $i = 0, 1, \ldots$. При $t_1 \leqslant t \leqslant T$ имеем

$$P(t) = \int_t^T N_2(s)\,ds,\quad Q(t,\tau) = \int_{t+\tau+h}^{T} N_2(s)\,ds \cdot A_2(t+\tau+h)$$

$$R(t,\tau,\rho) = A_2'(t+\tau+h)\int_{t+h+\max(\tau,\rho)}^{T} N_2(s)\,ds \cdot A_2(t+\rho+h)$$

причем матрица A_2 определяется при $t_{i+1} \leqslant t \leqslant t_i$ и $-h \leqslant \tau \leqslant 0$ соотношениями

$$A_2(t+\tau+h) = A_1(t+\tau+h), \quad -h \leqslant \tau \leqslant -t+t_{i+1}$$
$$A_2(t+\tau+h) = 0, \quad -t+t_{i+1} < \tau \leqslant 0$$

Положим далее для $t_{i+1} \leqslant t \leqslant t_i$

$$Q_1(t_i, \tau+t-t_i) = \begin{cases} Q(t_i, \tau+t-t_i), & -t+t_{i+1} \leqslant \tau \leqslant 0 \\ 0 &, \; -h \leqslant \tau < -t+t_{i+1} \end{cases}$$

Аналогично определим $R_1(t_i, \tau+t-t_i, \rho)$ в зависимости от τ при любом фиксированном ρ.

При $t_{i+1} \leqslant t \leqslant t_i$, $-t+t_{i+1} \leqslant \tau, \rho \leqslant 0$ справедливо равенство

$$R_2(t_i, \tau+t-t_i, \rho+t-t_i) = R(t_i, \tau+t-t_i, \rho+t-t_i)$$

Если же хотя бы один из аргументов τ или ρ не принадлежит отрезку $[-t+t_{i+1}, 0]$, то $R_2(t_i, \tau+t-t_i, \rho+t-t_i) = 0$.

Теперь при $t_{i+1} \leqslant t \leqslant t_i$ имеем

$$P(t) = \int_t^{t_i} N_2(s)\,ds + P(t_i) + \int_{t-t_i}^{0} (Q(t_i, s) + Q'(t_i, s))\,ds +$$
$$+ \int_{t-t_i}^{0}\int_{t-t_i}^{0} R(t_i, s, \alpha)\,ds\,d\alpha \tag{2.5}$$

Матрица Q удовлетворяет соотношению

$$Q(t,\tau) = \Big[\int_{t+\tau+h}^{t_i} N_2(s)\,ds + P(t_i) + \int_{t-t_i}^{0} Q(t_i, s)\,ds +$$
$$+ \int_{t-t_{i+1}+\tau}^{0} Q(t_i, s)\,ds + \int_{t-t_i}^{0} d\alpha \int_{t-t_{i+1}+\tau}^{0} R(t_i, s, \alpha)\,ds\Big] A_2(t+\tau+h) +$$
$$+ Q_1(t_i, t+\tau-t_i) + \int_{t-t_i}^{0} R_1(t_i, t+\tau-t_i, s)\,ds, \quad t_{i+1} \leqslant t \leqslant t_i, \; -h \leqslant \tau \leqslant 0 \tag{2.6}$$

Наконец, для R имеем

$$R(t,\tau,\rho) = A_2'(t+\tau+h)\Big[\int_{t+h+\max(\tau,\rho)}^{t_i} N_2(s)\,ds + P(t_i) +$$
$$+ \int_{t-t_{i+1}+\rho}^{0} Q(t_i, s)\,ds + \int_{t-t_{i+1}+\tau}^{0} Q(t_i, s)\,ds +$$
$$+ \int_{t-t_{i+1}+\tau}^{0} d\alpha \int_{t-t_{i+1}+\rho}^{0} R(t_i, s, \alpha)\,ds\Big] A_2(t+\rho+h) +$$
$$+ A_2(t+\tau+h)\Big[Q_1(t_i, t+\rho-t_i) + \int_{t+\tau-t_{i+1}}^{0} R_1(t_i, s, t+\rho-t_i)\,ds\Big] +$$
$$+ \Big[Q_1(t_i, t+\tau-t_i) + \int_{t+\rho-t_{i+1}}^{0} R_1(t_i, t+\tau-t_i, s)\,ds\Big] A_2(t+\rho+h) +$$
$$+ R_2(t_i, t+\tau-t_i, t+\rho-t_i) \tag{2.7}$$

Рекуррентные формулы (2.5)—(2.7) определяют искомое второе решение краевой задачи (1.8), (1.9).

3. Некоторые обобщения. Приведем обобщение полученных результатов для управляемой системы вида

$$x^{\cdot}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + \int_{-h}^{0} G(t, s)x(t+s)\,ds + B(t)u +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} u_j \Big[A_{3j}(t)x(t) + A_{4j}(t)x(t-h_j) +$$
$$+ \int_{-\tau_j}^{0} G_{1j}(t, s)x(t+s)\,ds\Big], \quad t > 0; \quad x(t) \in R_n, \quad u \in R_m \qquad (3.1)$$

Элементы матриц A_0, G, B, A_{3j}, A_{4j}, G_{1j} — заданные кусочно-непрерывные функции, элементы матрицы A_1 кусочно-непрерывно дифференцируемы, h, h_j и τ_j — заданные неотрицательные постоянные.

Минимизируемый функционал имеет вид (1.3), а начальное условие дает выражение (1.2). Обозначим b_j, $(j = 1, \ldots, m)$ столбцы матрицы B. Введем в рассмотрение матрицу $F(t, x_t)$ размером $n \times m$, у которой j-й столбец

$$F_j(t, x_t) = b_j(t) + A_{3j}(t)x(t) + A_{4j}(t)x(t-h_j) + \int_{-\tau_j}^{0} G_{1j}(t, s)x(t+s)\,ds \qquad (3.2)$$

С учетом обозначения уравнение (3.1) можно переписать в виде

$$x^{\cdot}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + \int_{-h}^{0} G(t, s)x(t+s)\,ds + F(t, x_t)u \qquad (3.3)$$

Вводя соответствующие модификации в п. 1, обусловленные видом уравнения (3.1), заключаем, что оптимальное управление равняется

$$u_0(t, x_t) = -N^{-1}(t)F'(t, x_t)\Big[P(t)x(t) + \int_{-h}^{0} Q(t, \tau)x(t+\tau)\,d\tau\Big] \qquad (3.4)$$

Оптимальное значение функционала (1.3) при

$$f(t, x_t) = u_0'(t, x_t)Nu_0(t, x_t)$$

задается формулой (1.5). Матрицы P, Q, R в соотношениях (3.4), (1.5) удовлетворяют линейным уравнениям

$$P^{\cdot}(t) + P(t)A(t) + A'(t)P(t) + Q'(t, 0) + Q(t, 0) +$$
$$+ N_2(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$P(t)G(t, \tau) + A'(t)Q(t, \tau) + R(t, 0, \tau) + (\partial/\partial t - \partial/\partial\tau)Q(t, \tau) = 0 \qquad (3.5)$$
$$G'(t, \tau)Q(t, \rho) + Q'(t, \tau)G(t, \rho) + (\partial/\partial t - \partial/\partial\tau - \partial/\partial\rho)R(t, \tau, \rho) = 0$$

Граничные условия для системы (3.5) сохраняют прежний вид (1.9). Отметим, что хотя оптимальное управление (3.4) и траектория зависят от запаздываний h_j и τ_j, оптимальное значение функционала (1.5) при $f = u_0'Nu_0$ от них не зависит. В частности, отсюда следует, что при $h = 0$ оптимальное значение функционала (3.2) вообще не зависит от начальной функции $\varphi(s)$ при $s < 0$, а определяется лишь значением $\varphi(0)$, в то время как и траектория, и управление существенно зависят от всей начальной функции φ. Подобно п. 2 можно записать решение краевой задачи (3.5), (1.9) при $G \equiv 0$ в виде, аналогичном (2.3), (2.5)—(2.7).

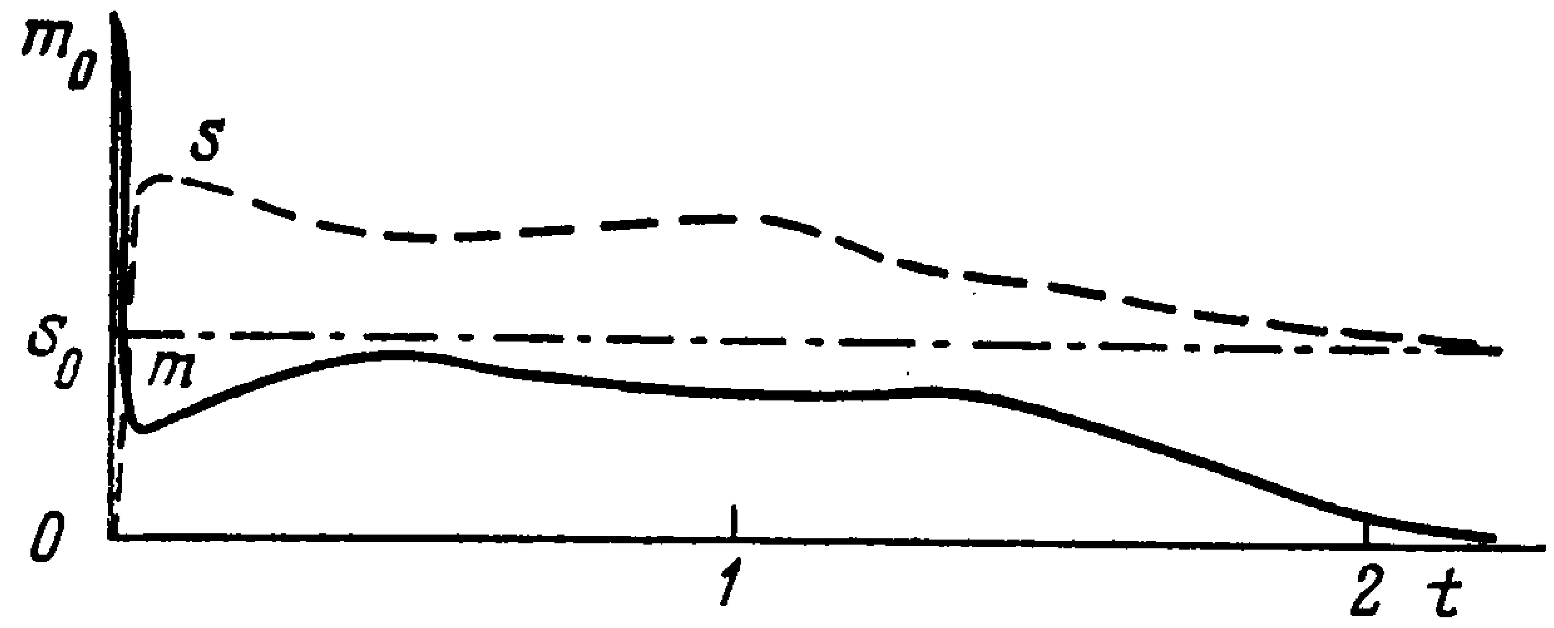
4. Пример. Рассмотрим процесс управления микробиологическим ростом клеток и образованием продукта в замкнутом сосуде. Непрерывное размножение микроорганизмов используется в бактериологических исследованиях, производстве ферментов и биологической обработке отходов [10, 11].

В сосуд, имеющий входное отверстие для подачи питательных веществ и отверстие для отвода образующегося продукта, помещается некоторая масса активных бактерий. Бактерии, потребляя питательные вещества, в течение конечного момента времени вырабатывают выходной продукт, размножаются, а затем теряют свою жизненную активность.

Этот процесс может быть описан билинейной моделью вида

$$\begin{aligned} m^{\cdot}(t) &= \gamma(t)\, m(t) - u(t)\, m(t) - m(t-\tau) \\ s^{\cdot}(t) &= -\gamma(t)\, k_1^{-1} m(t) - u(t)\, s(t) + s_T u(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Первое уравнение описывает баланс биомассы в замкнутом сосуде, второе характеризует производство синтезируемого продукта. Введены обозначения: $m(t)$ — объем микробиологической массы, $s(t)$ — объем выходного продукта, $u(t)$ — объем питатель-



ных веществ, $\gamma(t)$ — скорость роста клеток, $m(t-\tau)$ учитывает потерю жизнеспособности бактерий за конечное время τ, k_1 и s_T — некоторые постоянные.

В начальный момент времени t_0

$$s(t_0) = 0,\ m(t_0) = m_0,\ m(t_0 + \theta) = 0,\ -\tau \leqslant \theta < 0 \tag{4.2}$$

Задача состоит в том, чтобы достигнуть фиксированного объема выходного продукта s_0 за конечное время и минимизировать расход питательных веществ. Критерий качества, соответствующий поставленной задаче, возьмем в виде

$$J = \beta_1 (s(T) - s_0)^2 + \beta_2 m(T)^2 + \int_{t_0}^{T} ((s(t) - s_0)^2 + \alpha u^2(t) + f(t, s, m_t))\, dt \tag{4.3}$$

На фигуре показан вид фазовых траекторий для $m(t)$ и $s(t)$ при оптимальном управлении, построенном в соответствии с предложенным методом.

Численное решение поставленной задачи проводилось для следующих значений параметров: $t_0 = 0$, $T = 3$, $\tau = 1$, $s_T = 3{,}5$, $s_0 = 1{,}5$, $k_1 = 52$, $\gamma(t) = 0{,}05$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\alpha = 1$, $m_0 = 4$.

Графики показывают стремление s к s_0, а m к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Видьясагар М.* Новые направления исследований в теории нелинейных систем // ТИИЭР. 1986. Т. 74. № 8. С. 5—41.
2. *Емельянов С. В., Коровин С. К., Никитин С. В.* Управляемость нелинейных систем. Двумерные системы // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 21. С. 3—67
3. *Mohler R. R., Kolodziej W. J.* An overview of bilinear system theory and applications // IEEE Trans. Syst., Man and Cybern. 1980. V. 10. № 10. P. 683—688.
4. *Jones R. W.* Application of optimal control theory in biomedicine. N. Y.: Acad. Press, 1984. 232 p.
5. *Morecki A.* Biomechanics of engineering: modelling, simulation, control: Cism. courses and lectures. № 291. N. Y.: Springer, 1987. 182 p.
6. *Красовский А. А.* Обобщение решения задачи оптимизации управления при неклассическом функционале // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 4. С. 808—811.
7. *Красовский Н. Н.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздыванием времени // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 124—129.
8. *Колмановский В. Б., Майзенберг Т. Л.* Оптимальное управление стохастическими системами с последействием // Автоматика и телемеханика. 1973. № 1. С. 47—61.
9. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
10. *D'Ans G., Gottlieb D., Kokotovic P.* Optimal control of bacterial growth // Proc. IFAC 5th. World Congress. P., 1972. Pt. 3. Paper № 256. P. 1—8.
11. *Williamson D.* Observation of bilinear systems with applications to biological control // Automatica. 1977. V. 13. № 3. P. 243—254.

Москва

Поступила в редакцию
18.IV.1988