

УДК 531.8

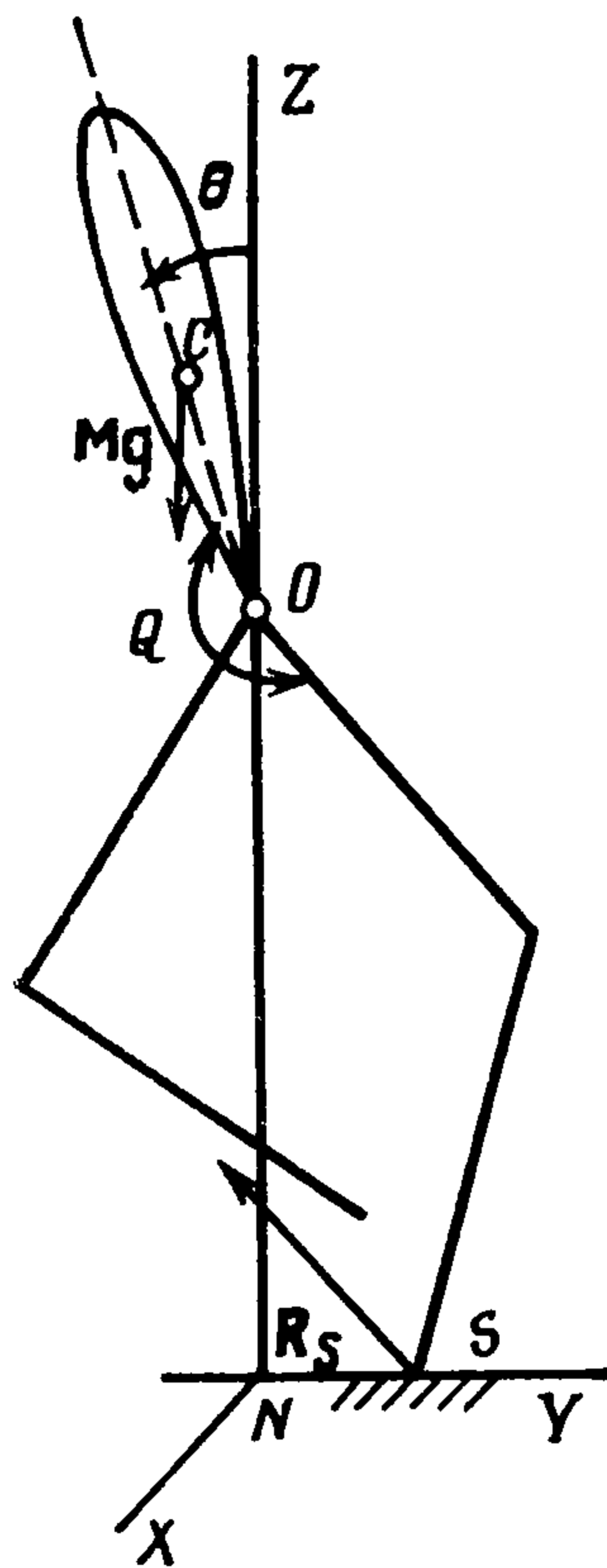
В. В. Белецкий, М. Д. Голубицкая

## ПЛОСКИЕ РЕЖИМЫ СТОЯНИЯ И ХОДЬБЫ НА МЕСТЕ ДВУНОГОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

Рассматривается шагающий аппарат, стоящий на одной, не закрепленной в точке опоры ноге. Изучается задача о поддержании равновесия опорной ноги аппарата за счет компенсирующих колебаний корпуса. Проводится анализ фазовых траекторий задачи. Исследуются условия сохранения односторонней связи и схода с нее в процессе движения. Строятся режимы ходьбы на месте.

Задача стояния шагающего аппарата представляет интерес, во-первых, как задача динамики системы с сервосвязью, во-вторых, как предельный случай задачи ходьбы. Режимы ходьбы на месте могут быть использованы при построении модели пространственной ходьбы<sup>1</sup>.

1. Описание модели. Уравнения задачи стояния. Рассмотрим двуногий шагающий аппарат, состоящий из тяжелого твердого тела и пары одинаковых невесомых ног (фиг. 1); конструкция ноги может быть однозвенной или многозвенной. Ноги крепятся к точке  $O$  корпуса аппарата с помощью двустепенных шарниров. Пусть аппарат опирается только на одну ногу. Контакт ноги с опорной поверхностью точечный, в точке опоры  $S$  действует сила реакции  $R_S$ , связь с поверхностью односторонняя (неудерживающая). В шарнире  $O$  опорной ноги на корпус действует управляющий момент  $Q$ , на ногу — момент  $-Q$ .



Фиг. 1

Предположим, что с помощью управления  $-Q$  можно обеспечить равновесие опорной ноги — точка подвеса  $O$  и точка опоры  $S$  неподвижны. Система подчинена сервосвязи: движение корпуса аппарата направлено на сохранение равновесия опорной ноги.

Рассмотрим плоские режимы движения. Введем (фиг. 1) неподвижную систему координат  $NXYZ$ , где  $N$  — начало координат, ось  $NZ$  направлена вертикально вверх. Пусть точка опоры и точка подвеса расположены в плоскости  $NYZ$ :  $S = (0, d, 0)$ , где  $d = \text{const}$ ,  $d > 0$  — опорный сдвиг,  $O = (0, 0, H)$ , где  $H = \text{const}$ ,  $H > 0$  — высота точки подвеса ноги. Предположим, что собственное вращение корпуса отсутствует, центр масс  $C$  движется в плоскости  $NYZ$ .

Обозначим:  $\theta$  — угол, отсчитываемый от оси  $NZ$  до вектора  $OC$  в правоориентированной системе  $NXYZ$  (фиг. 1),  $t$  — время,  $g$  — ускорение свободного падения,  $M$  — масса корпуса,  $J$ ,  $J_C$  — моменты инерции кор-

<sup>1</sup> Белецкий В. В., Голубицкая М. Д. Модельная задача динамики пространственной двуногой ходьбы: Препринт. № 194. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1982. 23 с.

пуca относительно точек  $O$  и  $C$ ,  $\rho = OC$  — расстояние от точки  $O$  до центра масс.

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{M\rho g}{J}} t, \quad j = \frac{J}{M\rho^2} = 1 + \frac{J_C}{M\rho^2} \\ \delta &= \frac{d}{\rho}, \quad h = \frac{H}{\rho}, \quad \mathbf{q} = \frac{Q}{Mg\rho}, \quad \mathbf{R} = \frac{R_S}{Mg} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Производную угла  $\theta$  по безразмерному времени  $\tau$  обозначим  $\theta'$ .

В сделанных предположениях уравнение движения корпуса [1] в переменных (1.1) можно привести к виду

$$\Phi(\theta)\theta'' + \frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\theta'^2 = j(\delta + \sin\theta) \quad (1.2)$$

$$\Phi(\theta) = j + h\cos\theta + \delta\sin\theta \quad (1.3)$$

Уравнение (1.2) имеет первый интеграл [1] ( $c$  — постоянная интегрирования)

$$\theta' = \pm \frac{\sqrt{F(\theta) + c}}{\Phi(\theta)}, \quad F(\theta) = \frac{2}{j} \int_0^\theta \Phi(\theta)(\delta + \sin\theta) d\theta \quad (1.4)$$

Выражение для управляющего момента [2] в переменных (1.1) имеет вид

$$q = -\delta + \frac{1}{j} \left( \theta'^2 \frac{d\Phi}{d\theta} - \theta'' \frac{d^2\Phi}{d\theta^2} \right) \quad (1.5)$$

Формула вертикальной реакции [2] преобразуется к виду

$$R_z = 1 - \frac{1}{j} (\theta'^2 \cos\theta + \theta'' \sin\theta) \quad (1.6)$$

Используя (1.2), исключим  $\theta''$  из (1.5), (1.6):

$$q = \sin\theta - [j(\delta + \sin\theta) - \theta'^2 d\Phi/d\theta]/\Phi \quad (1.7)$$

$$R_z = [j(j-1) + j\cos\theta(h + \cos\theta) + \theta'^2(h + j\cos\theta)]/(j\Phi) \quad (1.8)$$

Движение системы с неударживающей связью осуществимо, если вертикальная реакция опоры положительна:  $R_z > 0$ . В этом случае управление (1.7) обеспечивает неподвижность опорной ноги и вызывает компенсирующее движение корпуса, описываемое интегралом (1.4).

**2. Анализ фазовых траекторий в задаче стояния на закрепленной ноге.** Исследуем движение системы в предположении, что в точке  $S$  нога шарнирно прикреплена к поверхности. Частично такое исследование было выполнено в работе [1]. Приведем здесь более точный анализ.

В уравнение (1.2) входят параметры:  $j$  — момент инерции корпуса,  $\delta$  — опорный сдвиг и  $h$  — высота точки подвеса ног. Значения параметров  $j$ ,  $\delta$ ,  $h$  определяют вид фазового портрета уравнения (1.2). Введем дополнительный параметр  $r = \sqrt{\delta^2 + h^2}$  — расстояние от точки опоры до точки подвеса (в случае однозвенной конструкции ног  $r$  — длина ноги). Положим для определенности  $\theta \in [-2\pi, 0]$ .

Отметим главные свойства движения.

Если  $r > j$ , то существуют критические значения  $\theta = \theta^*$ , в которых в (1.7) обращается в нуль знаменатель:  $\Phi(\theta^*) = j + h\cos\theta^* + \delta\sin\theta^* = 0$ . Последнее уравнение имеет два решения, определяемых формулами

$$\sin\theta_{1,2}^* = (-j\delta \pm h\sqrt{r^2 - j^2})/r^2, \quad \cos\theta_{1,2}^* = (-jh \mp \delta\sqrt{r^2 - j^2})/r^2 \quad (2.1)$$

$$\theta_1^* \in [-3\pi/2, -\pi/2], \quad \theta_2^* \in [-\pi, 0]$$

Если числитель в (1.7) не равен нулю, то при  $\theta = \theta_{1,2}^*$  управляющий момент  $q$  неограниченно велик, обеспечить неподвижность точки  $O$  почти всегда невозможно — в положениях  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  нарушается сервосвязь. В работах [1, 2] такое явление названо параметрическим ударом, поскольку в критических положениях неограниченно возрастает модуль опорной реакции. Из (1.4) видно, что угловая скорость при  $\theta = \theta_{1,2}^*$  тоже неограниченно велика, фазовые кривые разрывны.

При  $\delta < 1$  уравнение (1.2) имеет два стационарных решения, определяемых формулами

$$\begin{aligned} \sin \theta_{1,2}^\circ &= -\delta, \quad \cos \theta_{1,2}^\circ = \mp \sqrt{1 - \delta^2} \\ \theta_1^\circ &\in [-\pi, -\pi/2], \quad \theta_2^\circ \in [-\pi/2, 0] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Линеаризуем (1.2) в окрестности точки  $\theta_i^\circ$  ( $i = 1, 2$ )

$$\varphi'' = \frac{j \cos \theta_i^\circ}{\Phi(\theta_i^\circ)} \varphi, \quad \varphi = \theta - \theta_i^\circ, \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

В верхнем положении равновесия  $\Phi(\theta_2^\circ) = j - \delta^2 + h \sqrt{1 - \delta^2} > 0$ , так как  $j \geq 1$ ,  $\delta < 1$ . Из (2.2), (2.3) следует, что верхнее равновесие всегда неустойчиво.

Нижнее положение равновесия ( $\cos \theta_1^\circ < 0$ ) устойчиво, если

$$\Phi(\theta_1^\circ) > 0 \quad (2.4)$$

и неустойчиво при  $\Phi(\theta_1^\circ) \leq 0$ . Функция  $\Phi(\theta)$  принимает отрицательные значения только в случае  $r > j$ , если  $\theta \in (\theta_1^*, \theta_2^*)$ ; следовательно, устойчивость стационарной точки  $\theta_2^\circ$  зависит от ее положения относительно критических точек. Сравним значения  $\sin \theta_1^\circ = -\delta$  и  $\sin \theta_{1,2}^*$ :

$$\sin \theta_{1,2}^* + \delta = [\pm h \sqrt{r^2 - j} + \delta(r^2 - j^2)]/r^2 \quad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что всегда  $\theta_1^* < \theta_1^\circ$  (в [1] ошибочно рассмотрен случай  $\theta_1^* > \theta_1^\circ$ ) и возможно как  $\theta_1^\circ < \theta_2^*$ , так и  $\theta_1^\circ \geq \theta_2^*$ . Положение равновесия  $\theta_1^\circ$  неустойчиво тогда и только тогда, когда оно находится между критическими положениями, точнее, когда  $\theta_1^\circ \in (\theta_1^*, \theta_2^*]$ . Если  $r < j$  (не существует критических положений) или  $\theta_1^\circ > \theta_2^*$ , нижнее положение равновесия устойчиво. Выпишем в явном виде условие устойчивости (2.4)

$$h < (j - \delta^2)/\sqrt{1 - \delta^2} \quad (2.6)$$

Обозначим через  $c^*$  такие значения постоянной интегрирования, при которых числитель в (1.7) обращается в нуль в тех же точках  $\theta^*$ , что и знаменатель. Отвечающие этим значениям фазовые кривые (1.4) обозначим  $\theta'(c^*, \theta)$ . Из (1.7) получим

$$\theta'^2(c_i^*, \theta_i^*) = j(\delta + \sin \theta_i^*) \left( \frac{d\Phi}{d\theta}(\theta_i^*) \right)^{-1}, \quad i = 1, 2 \quad (2.7)$$

Учтем, что  $\theta_{1,2}^*$  — корни функции  $\Phi(\theta)$ , в которых она меняет знак:  $d\Phi(\theta_1^*)/d\theta < 0$ ,  $d\Phi(\theta_2^*)/d\theta > 0$ . Из (2.5) видно, что  $\delta + \sin \theta_1^* > 0$ . Следовательно, при  $\theta = \theta_1^*$  правая часть в (2.7) отрицательна, действительное значение угловой скорости на фазовой кривой  $\theta'(c_1^*, \theta)$  не определено, сохранение сервосвязи невозможно.

Из (2.5) получим, что  $\delta + \sin \theta_2^* > 0$ , если

$$h^2(1 - \delta^2) > (j - \delta^2)^2 \quad (2.8)$$

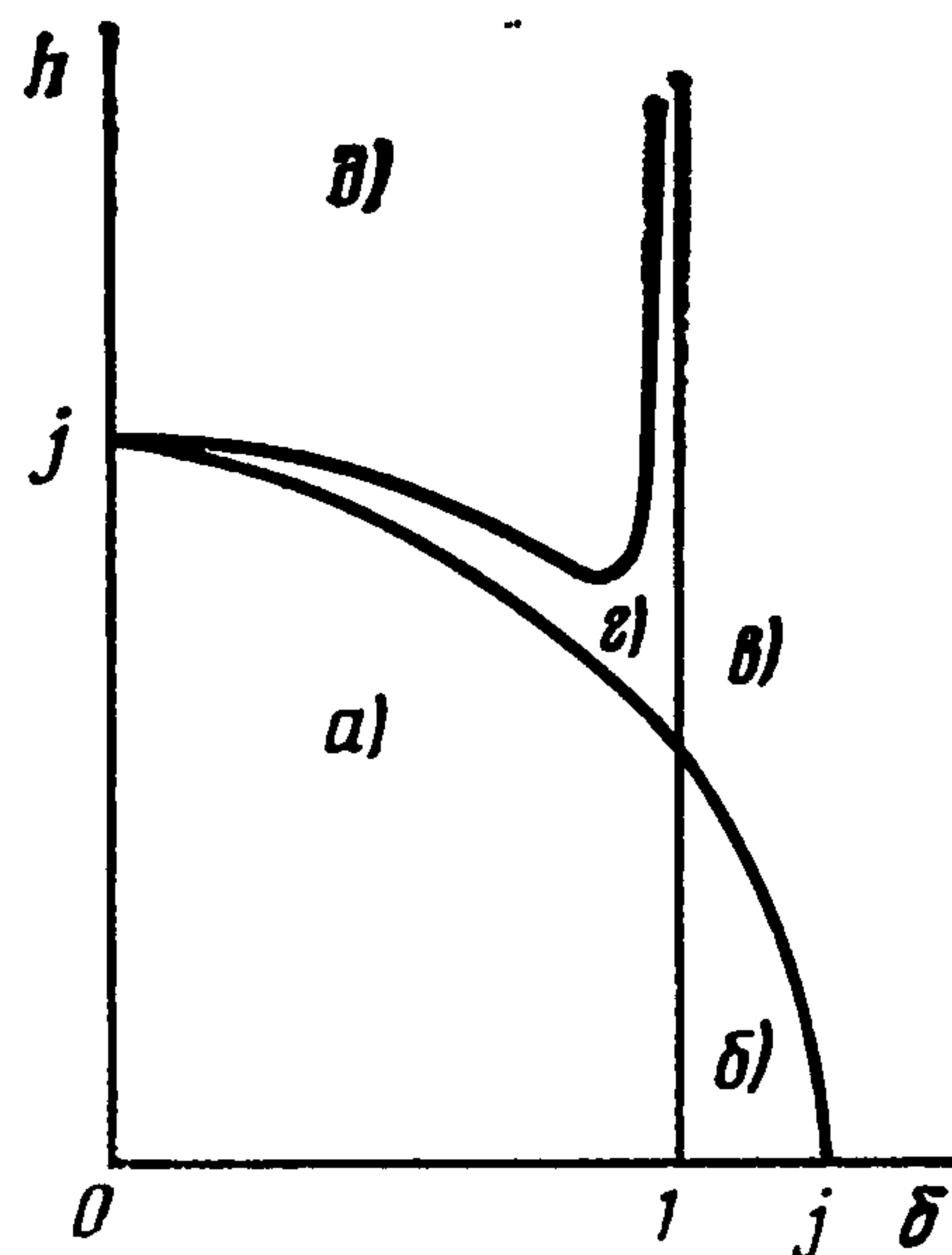
В этих условиях правая часть в (2.7) положительна, значение угловой скорости в точке  $\theta = \theta_2^*$  на фазовой кривой  $\theta' (c_2^*, \theta)$  конечно:

$$\theta' (c_2^*, \theta_2^*) = \pm \left\{ \frac{j [\delta (r^2 - j) - h \sqrt{r^2 - j^2}]}{r^2 \sqrt{r^2 - j^2}} \right\}^{1/2} \quad (2.9)$$

В условиях (2.8) существует фазовая кривая  $\theta' (c_2^*, \theta)$ , непрерывная в критической точке  $\theta_2^*$ . Можно показать, что на этой кривой в точке  $\theta_2^*$  непрерывно и конечно ускорение корпуса  $\theta'' (c_2^*, \theta_2^*) = j\delta(1-j)/(3\sqrt{r^2-j^2})$ , непрерывны и конечны управление и сила реакции, т. е. сохраняется связь.

Сравнивая условия (2.6), (2.8), отметим, что если  $\delta < 1$ ,  $r > j$ , т. е. существуют и стационарные, и критические точки, то через критическую точку  $\theta_2^*$  можно пройти с конечной угловой скоростью в том и только том случае, если нижнее положение равновесия  $\theta_1^\circ$  устойчиво. И наоборот. Все фазовые кривые разрывны в точке  $\theta_2^*$  тогда и только тогда, когда существует неустойчивая стационарная точка  $\theta_1^\circ$  ( $\cos \theta_1^\circ < 0$ ).

Проведенный анализ показывает, что поверхности  $\delta = 1$ ,  $h = (j - \delta^2)/\sqrt{1 - \delta^2}$ ,  $\sqrt{\delta^2 + h^2} = j$  ( $r = j$ ) разбивают пространство параметров  $(j, \delta, h)$  на подпространства, каждому из которых отвечает качественно новый тип фазового портрета. Проекция этого разбиения [на] плоскость  $j = \text{const}$  представлена на фиг. 2. На фиг. 3, а—д изображены соответствующие фазовые портреты.



Фиг. 2

Опишем эти портреты подробнее.

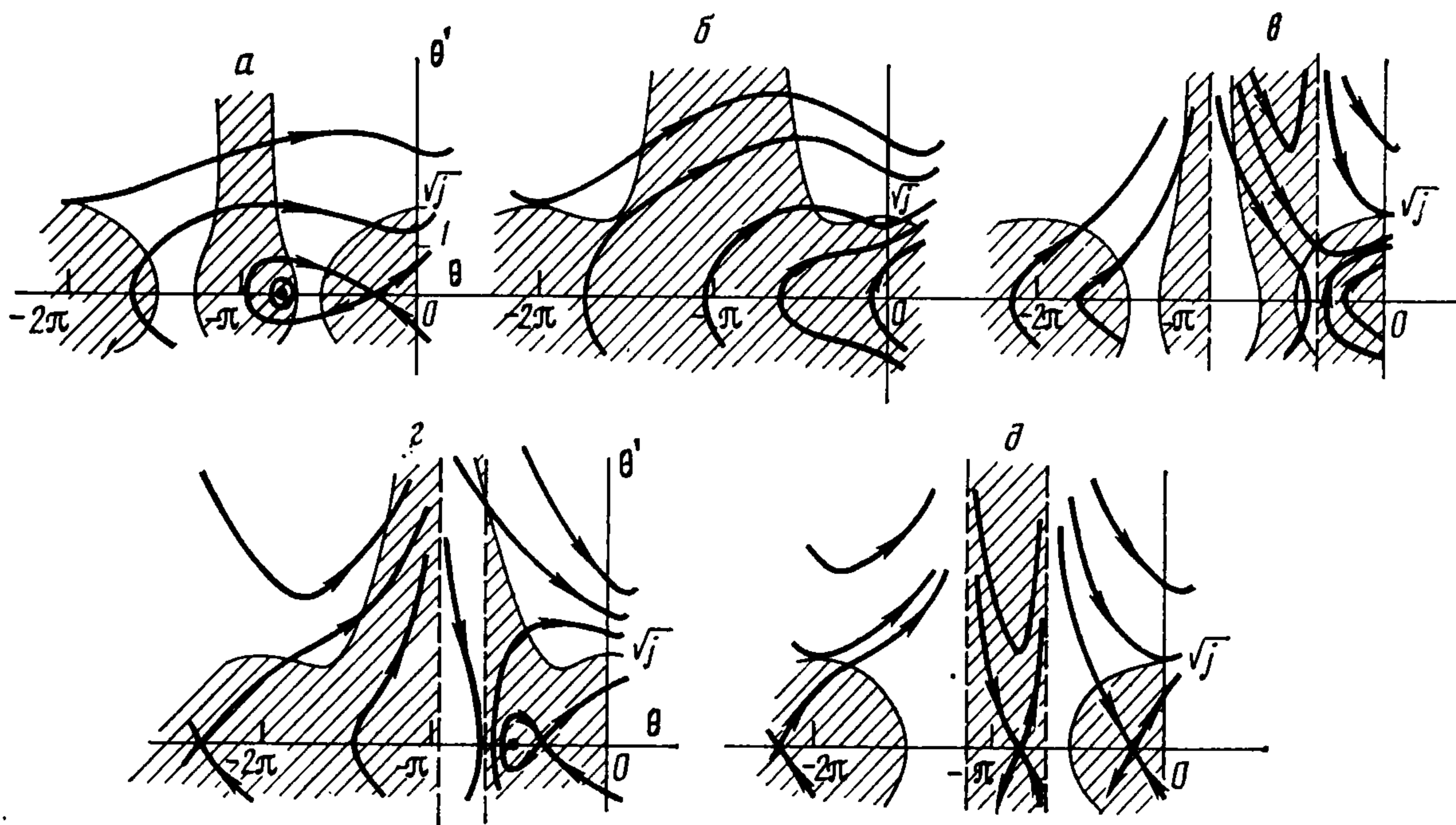
а)  $r < j$ ,  $\delta < 1$  (фиг. 2). Существуют две стационарные точки: устойчивая  $\theta_1^\circ$  и неустойчивая  $\theta_2^\circ$ . Критических точек нет. Фазовый портрет для этого случая изображен на фиг. 3, а. В окрестности устойчивого положения равновесия расположена область колебательных движений корпуса. За ее пределами все фазовые траектории являются траекториями неограниченной раскрутки корпуса.

б)  $r < j$ ,  $\delta > 1$  (фиг. 2). Стационарные точки отсутствуют, область колебательных движений исчезает. Точек разрыва нет. Все движения аппарата сводятся к неограниченной раскрутке корпуса (фиг. 3, б).

в)  $r > j$ ,  $\delta > 1$ . Стационарных точек нет, появляются критические точки  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ . Существует фазовая кривая, непрерывная в точке  $\theta_2^*$  (фиг. 3, в). Все фазовые траектории разрывны: начав движение из любого положения, тело за конечное время приобретает бесконечно большую угловую скорость. Проследим, чисто формально, поведение фазовых траекторий после «прохождения» критических точек. Выделим на плоскости  $(\theta, \theta')$  с помощью фазовой траектории  $\theta' (c_2^*, \theta)$  внутреннюю (разорванную при  $\theta = \theta_1^*$ ) и внешнюю части. Траектории внутренней части — аналоги замкнутых траекторий фиг. 3, а. Это своего рода «колебания» около критической точки  $\theta_1^*$ . Остальные траектории — аналоги траекторий неограниченной раскрутки (за каждый полный оборот тело должно преодолеть два критических положения).

г)  $r > j$ ,  $\delta < 1$ ,  $h < (j - \delta^2)/\sqrt{1 - \delta^2}$  (фиг. 2). Две стационарные точки  $\theta_1^\circ$ ,  $\theta_2^\circ$ , одна из которых устойчива, и две критические точки  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$ , через одну из которых проходит непрерывная фазовая кривая. Фазовый портрет приведен на фиг. 3, г. Отметим, что в работе [1] этот фазовый портрет, а также портрет для случая  $r = j$ ,  $\delta = 1$  изображен неверно.

д)  $h > (j - \delta^2)/\sqrt{1 - \delta^2}$ . Две неустойчивые стационарные точки, две критические точки. Их взаимное положение на  $[-2\pi, 0]$  таково:  $\theta_1^* < \theta_1^\circ < \theta_2^* < \theta_2^\circ$



Фиг. 3

(фиг. 3, д). Все траектории разрывны в точке  $\theta_2^*$ . Все движения приводят к нарушению сервосвязи.

3. **Области связанного движения.** Приведенные на фиг. 3 фазовые портреты описывают движение системы с двусторонней связью опорной ноги с поверхностью. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что нога в точке  $S$  не закреплена. Движение с неудерживающей связью вдоль фазовых траекторий фиг. 3 осуществимо, если в процессе движения  $R_Z > 0$ .

Из (1.6) при  $\theta = \theta_{1,2}^0$  получим, что в стационарных точках  $R_Z = 1$ . Следовательно, в этих точках и, в силу непрерывности  $R_Z$ , в их достаточно малых окрестностях вертикальная реакция положительна. В частности, если система находится в положении устойчивого равновесия  $\theta = \theta_1^0$  или совершает достаточно малые колебания в окрестности этого положения, то неудерживающая связь ноги с поверхностью сохраняется: аппарат сколь угодно долго стоит на одной ноге, балансируя корпусом около нижнего (не вертикального) положения  $\theta_1^0$ .

Определение знака  $R_Z$  во всех остальных (не колебательных) движениях системы требует дополнительного исследования.

Запишем значение (1.8)  $R_Z$  вдоль фазовых траекторий в виде

$$R_Z = \left[ (f(\theta) - \theta'^2) \left( \Phi \cos \theta - \frac{d\Phi}{d\theta} \sin \theta \right) \right] / (j\Phi) \quad (3.1)$$

$$f(\theta) = j [\Phi - (\delta + \sin \theta) \sin \theta] / \left( \Phi \cos \theta - \frac{d\Phi}{d\theta} \sin \theta \right) \quad (3.2)$$

Из соотношения (3.1) видно, что смена знака  $R_Z$  происходит при  $f(\theta) = \theta'^2$  или при  $\Phi(\theta) = 0$ . Иначе говоря, в плоскости  $(\theta, \theta')$  кривая

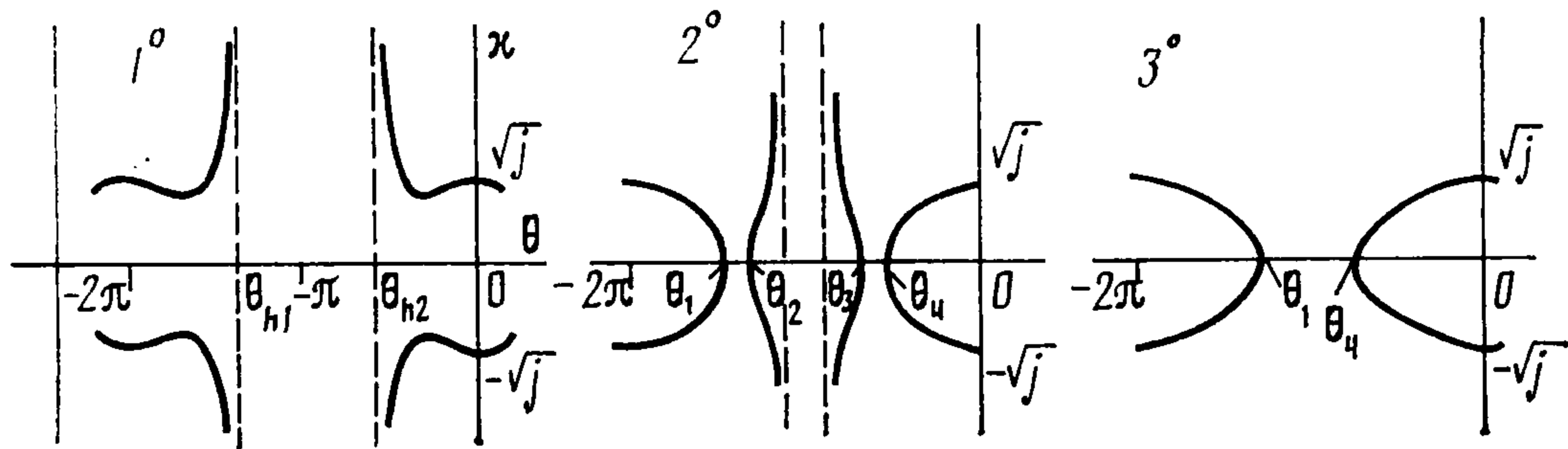
$$\theta' = \kappa(\theta) = \pm \sqrt{f(\theta)} \quad (3.3)$$

и критические прямые  $\theta = \theta_{1,2}^*$  там, где они определены, являются границами областей связанного движения (областей, в которых сохраняется связь  $R_Z > 0$ ). |

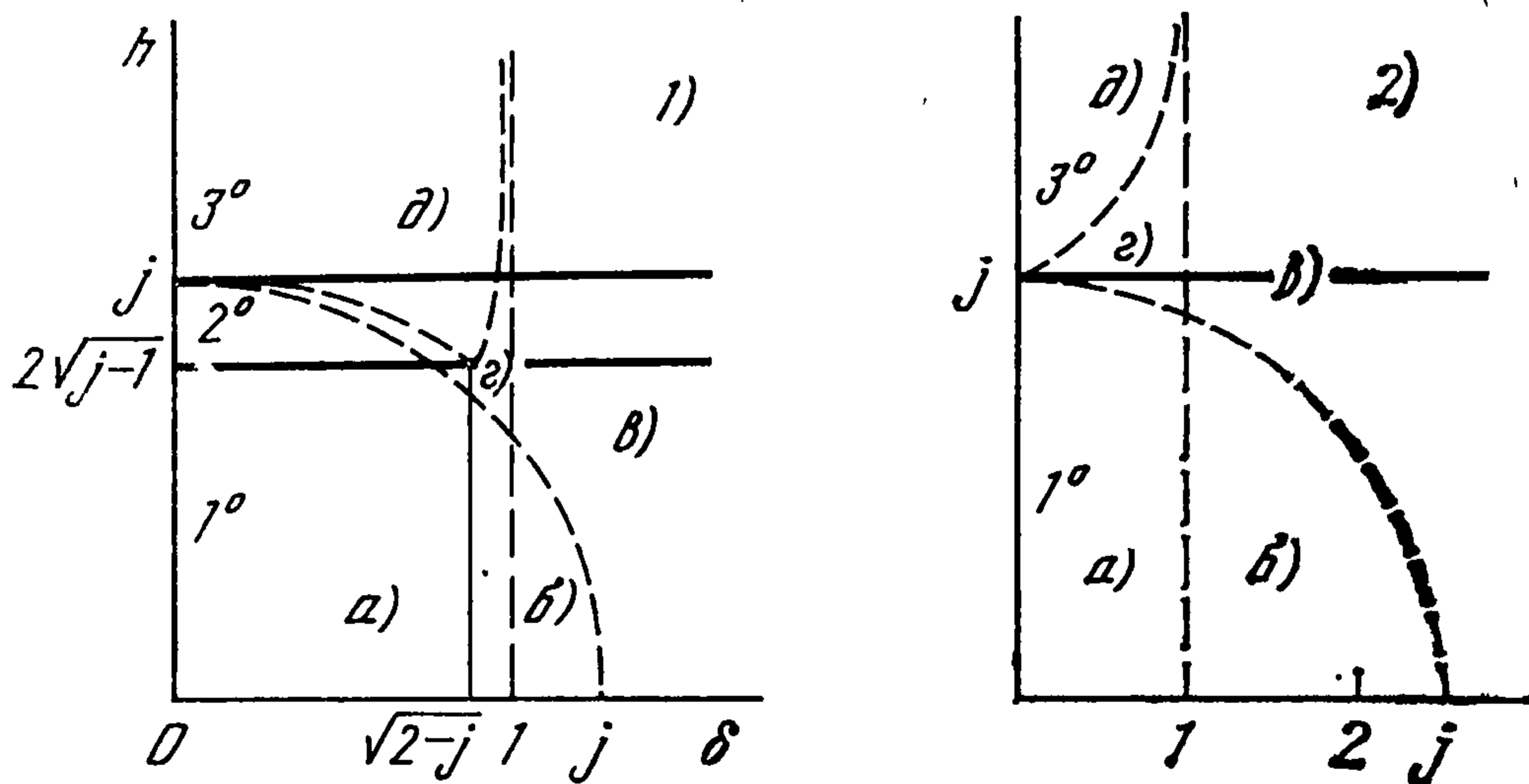
Из (3.2), (2.7) получим

$$f(\theta_i^*) = j(\delta + \sin \theta_i^*) / \frac{d\Phi}{d\theta}(\theta_i^*) = \theta_i'^2(c_i^*, \theta_i^*), \quad i = 1, 2$$

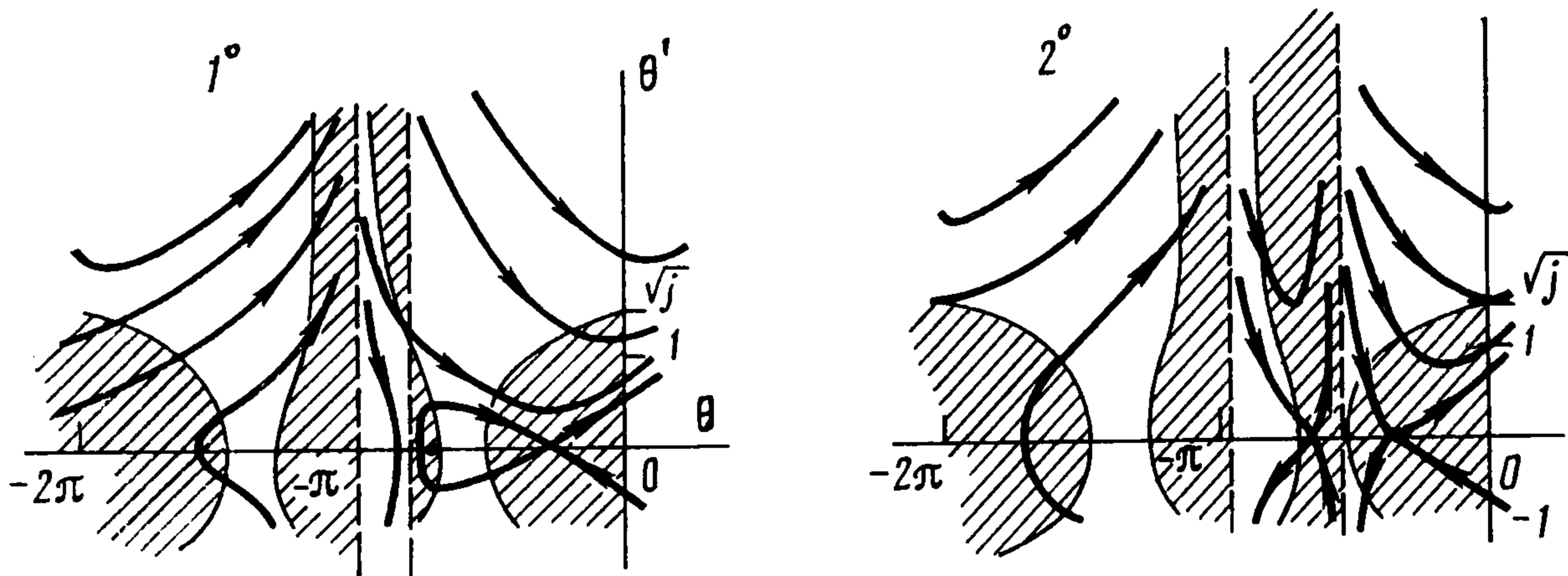
Следовательно,  $f(\theta_1^*) < 0$  для любых  $j, \delta, h$ , т. е. кривая  $\kappa(\theta) = \pm \sqrt{f(\theta)}$  не имеет общих точек с прямой  $\theta = \theta_1^*$ . Если выполнено условие (2.8), то  $f(\theta_2^*) > 0$ , в противном случае  $f(\theta_2^*) < 0$ . Это означает,



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

что кривая  $\kappa(\theta)$  пересекает критическую прямую  $\theta = \theta_2^*$  в том и только в том случае, когда через прямую  $\theta = \theta_2^*$  проходит непрерывная фазовая траектория  $\theta'(c_2^*, \theta)$ . Обе кривые —  $\theta'(c_2^*, \theta)$  и  $\kappa(\theta)$  — пересекают прямую  $\theta = \theta_2^*$  в одной точке.

Подставим в формулу (3.2) выражение (1.3) для  $\Phi(\theta)$ :

$$f(\theta) = j(\cos^2 \theta + h \cos \theta + j - 1)/(h + j \cos \theta) \quad (3.4)$$

На фиг. 4 представлены варианты поведения кривой  $\kappa(\theta)$  для разных значений  $j, h$ .

Опишем эти варианты при  $j \leq 2$ . Пусть для определенности  $\theta \in [-2\pi, 0]$ .

1°.  $0 < h < 2\sqrt{j-1}$ . Функция  $f(\theta)$  не имеет корней. При  $\theta = \theta_{h1} = -2\pi - \theta_{h2}$  или  $\theta = \theta_{h2} = -\arccos(-h/j)$  знаменатель в (3.4) обращается в нуль, функция  $f(\theta)$  меняет знак. Кривая  $\kappa(\theta)$  определена на отрезках  $[-2\pi, \theta_{h1}]$  и  $[\theta_{h2}, 0]$  (фиг. 4, 1°).

2°.  $2\sqrt{j-1} < h < j$ . Функция  $f(\theta)$  разрывна в точках  $\theta_{h1}, \theta_{h2}$  и имеет на отрезке  $[-2\pi, 0]$  четыре корня:  $\theta_1 = -2\pi - \theta_4, \theta_2 = -2\pi - \theta_3, \theta_{3,4} = -\arccos[1/2(\mp h - \sqrt{h^2 - 4j + 4})]$ . Кривая  $\kappa(\theta)$  представлена на фиг. 4, 2°.

3°.  $h \geq j$ . Функция  $f(\theta)$  непрерывна и имеет корни  $\theta_1, \theta_4$ . Кривая  $\kappa(\theta)$  определена на отрезках  $[-2\pi, \theta_1]$  и  $[\theta_4, 0]$  (фиг. 4, 3°).

При  $j \geq 2$  различаются два вида кривой  $\kappa(\theta)$ : 1°.  $h < j$  (фиг. 4, 1°) и 3°.  $h \geq j$  (фиг. 4, 3°).

Отметим еще, что

$$\kappa(0) = \pm \sqrt{j}, \quad \frac{d\kappa}{d\theta}(0) = 0 \quad (3.5)$$

Проведенное исследование позволяет выделить на фазовой плоскости области  $R_Z > 0$ . На фазовых портретах фиг. 3 эти области отмечены штриховкой. Структура областей определяется значениями параметров  $j, \delta, h$  и зависит, во-первых, от взаимного расположения линий  $\kappa(\theta)$ ,  $\theta = \theta_{1,2}^*$ , во-вторых, от вида кривой  $\kappa(\theta)$ !

Если  $r < j$  (не существует критических положений), структура областей связанного движения наиболее проста (фиг. 3, а, б). Знак  $R_Z$  совпадает со знаком числителя в выражении (3.1):  $R_Z > 0$ , если

$$(f(\theta) - \theta'^2)(h + j \cos \theta) > 0 \quad (3.6)$$

Последнее неравенство выполнено, если  $\theta \in [\theta_{h1}, \theta_{h2}]$  или  $\theta'^2 < f(\theta)$ . Строение областей связанного движения легко понять, сравнивая фиг. 3, б с фиг. 4, 1 и фиг. 3, а с фиг. 4, 2.

Если  $r \geq j$ , то при  $\theta \in [\theta_1^*, \theta_2^*]$  области  $R_Z > 0$  определены неравенством, противоположным (3.6), при  $\theta \notin [\theta_1^*, \theta_2^*]$  — условием (3.6). Соответствующие примеры приведены на фиг. 3, в—д!

Проследим, как меняются области связанного движения при изменении параметров  $\delta, h$  в плоскости  $j = \text{const}$ . На фиг. 5 представлено сечение пространства  $(j, \delta, h)$  такой плоскостью: на фиг. 5,1) для  $j < 2$ , на фиг. 5,2) для  $j \geq 2$ . Сплошными линиями обозначены границы подпространств (полос) 1—3°, которым отвечают разные виды кривой  $\kappa(\theta)$  (фиг. 4). Штриховыми линиями отмечены границы участков а — в, которым отвечают разные типы фазовых портретов (фиг. 3). Пересечение полос 1—3° с участками а — в будем обозначать соответствующей цифрой и буквой.

Из (3.4) видно, что при  $j = \text{const}, h = \text{const}$  вид кривой  $\kappa(\theta)$  неизменен. Опишем эволюцию областей связанного движения вдоль прямых  $h = \text{const}$ .

Пусть для определенности  $\theta \in [-2\pi, 0]$ .

1°.  $h = h_1 = \text{const}$ ;  $0 < h_1 < 2\sqrt{j-1}$ ,  $j < 2$  или  $0 < h_1 < j$ ,  $j \geq 2$  (полоса 1° на фиг. 5, фиг. 4,1° для кривой  $\kappa(\theta)$ ). Прямая  $h = h_1$  пересекает либо участки 1°а, 1°б, 1°в, либо 1°а, 1°г, 1°в (фиг. 5).

1°а, 1°б ( $\delta < \sqrt{j^2 - h^2}$ ). Области  $R_Z > 0$ , отвечающие этим участкам, совершенно одинаковы. На фиг. 3, б приведен пример такой области для участка 1°б.

1°в, 1°г ( $\delta \geq \sqrt{j^2 - h^2}$ ). При  $\delta = \sqrt{j^2 - h^2}$  (на границе участков 1°б — 1°г или участков 1°а — 1°г) в фазовой плоскости появляется критическая прямая  $\theta = \theta_1^* = \theta_2^*$ , совпадающая с правой вертикальной асимптотой функции  $f(\theta)$ :  $\theta_1^* = \theta_2^* = \theta_{h2}$ . При увеличении  $\delta$  от  $\sqrt{j^2 - h^2}$  до  $+\infty$  прямая  $\theta = \theta_1^*$  движется влево от  $\theta = \theta_{h2}$  до  $\theta = -\pi$ , а прямая  $\theta = \theta_2^*$  — вправо от  $\theta = \theta_{h2}$  до  $\theta = 0$  (фиг. 3, в). Прямая  $\theta = \theta_1^*$  не пересекает кривую  $\kappa(\theta)$  и располагается между асимптотами:  $\theta_{h1} < \theta_1^* < \theta_{h2}$ , а прямая  $\theta = \theta_2^*$  — пересекает и располагается правее асимптот:  $\theta_2^* > \theta_{h2}$ . Прохождение параметра  $\delta$  через значение  $\delta = 1$  приводит к изменению типа фазового портрета, но не меняет общий вид области  $R_Z > 0$ . Область  $R_Z > 0$ , отвечающая участку 1°г, представлена на фиг. 3, г. Чтобы построить область  $R_Z > 0$  для участка 1°в, нужно нанести аналогичную штриховку на фазовый портрет фиг. 3, в.

2°.  $h = h_2 = \text{const}$ ;  $2\sqrt{j-1} < h_2 < j$ ,  $j < 2$  (полоса 2° на фиг. 5,1), фиг. 4,2° для кривой  $\kappa(\theta)$ ).

Основное отличие случая  $j < 2$  от  $j \geq 2$  [фиг. 5,1), фиг. 5,2)] состоит в том, что при  $j = \text{const}, j < 2$  функция

$$h(\delta) = (j - \delta^2)/\sqrt{1 - \delta^2} \quad (3.7)$$

имеет минимум:  $\delta = \sqrt{2-j}$ ,  $h_{\min} = 2\sqrt{1-j}$ . Наличие этого минимума, а точнее, тот факт, что кривая (3.7) может располагаться ниже прямой  $h = j$ , обеспечивает существование характерных для полосы 2° кривой  $\kappa(\theta)$  (фиг. 4,2°) и областей связанного движения, отсутствующих при  $j \geq 2$  (фиг. 3, а, в, фиг. 6,1°, 2°).§

Все области  $R_Z > 0$ , отвечающие прямой  $h = h_2$ , многосвязны. При  $\delta \leq 1$  (участки 2°а, 2°г, 2°д) движение обладает стационарными точками. Можно доказать, что не-

устойчивая стационарная точка  $\theta_2^\circ$  расположена правее всех корней функции  $f(\theta)$  (фиг. 4, 2°):  $\theta_2^\circ > \theta_4$ , а для точки  $\theta_1^\circ$  выполняются следующие неравенства: если точка устойчива ( $h < (j - \delta^2)/\sqrt{1 - \delta^2}$ ) и  $\delta < \sqrt{2 - j}$ , то  $\theta_1^\circ < \theta_3$ ; если точка неустойчива ( $h \geq (j - \delta^2)/\sqrt{1 - \delta^2}$ ), то  $\theta_3 \leq \theta_1^\circ \leq \theta_4$ ; если точка устойчива и  $\delta > \sqrt{2 - j}$ , то  $\theta_1^\circ > \theta_4$ .

Обозначим  $\delta_1, \delta_2$  точки пересечения прямой  $h = \text{const}$  с кривой (3.7):  $\delta_1 < \sqrt{2 - j}$ ,  $\delta_2 > \sqrt{2 - j}$ .

Перечислим участки, пересекаемые прямой  $h = h_2$ , и опишем соответствующие им области  $R_Z > 0$ .

2°а ( $0 < \delta < \sqrt{j^2 - h^2}$ ). Критические прямые отсутствуют. Устойчивая стационарная точка  $\theta_1^\circ$  расположена левее корня  $\theta_3$  (фиг. 3, а).

2°б ( $\sqrt{j^2 - h^2} < \delta \leq \delta_1$ ). Две критические прямые, одна из которых ( $\theta = \theta_2^*$ ) пересекает кривую  $\kappa(\theta)$ :  $\theta_{h_2} < \theta_2^* < \theta_3$  (фиг. 6, 1°). Устойчивая стационарная точка расположена следующим образом:  $\theta_2^* < \theta_1^\circ < \theta_3$ . При  $\delta \rightarrow \delta_1$  имеем  $\theta_2^* \rightarrow \theta_3$ ,  $\theta_1^\circ \rightarrow \theta_3$ ; на границе участков 2°б, 2°в ( $\delta = \delta_1$ ) все три точки совпадают:  $\theta_2^* = \theta_1^\circ = \theta_3$ .

2°в ( $\delta_1 < \delta < \delta_2$ ). Область  $R_Z > 0$  представлена на фиг. 6, 2°. Критическая прямая  $\theta = \theta_2^*$  не имеет общих точек ни с фазовыми траекториями, ни с кривой  $\kappa(\theta)$ :  $\theta_3 < \theta_2^* < \theta_4$ . При возрастании значений  $\delta$  от  $\delta = \delta_1$  до  $\delta = \delta_2$  прямая  $\theta = \theta_2^*$  монотонно перемещается из положения  $\theta = \theta_3$  в положение  $\theta = \theta_4$ . Неустойчивая стационарная точка  $\theta_1^\circ$  расположена следующим образом:  $\theta_3 < \theta_1^\circ < \theta_4$ . При  $\delta \rightarrow \delta_2$  имеем  $\theta_1^\circ \rightarrow \theta_4$ ,  $\theta_2^* \rightarrow \theta_4$ ; на границе участков 2°в, 2°г ( $\delta = \delta_2$ ) все три точки совпадают:  $\theta_1^\circ = \theta_2^* = \theta_4$ .

2°г ( $\delta_2 \leq \delta \leq 1$ ); 2°д ( $\delta > 1$ ). Прямая  $\theta = \theta_2^*$  пересекает кривую  $\kappa(\theta)$  справа от корня  $\theta_4$  (фиг. 3, в). Если  $\delta_2 < \delta \leq 1$ , устойчивая стационарная точка расположена справа от критической точки  $\theta_2^*$ . При  $\delta > 1$  стационарные точки исчезают, структура областей  $R_Z > 0$  принципиально не изменяется. На фиг. 3, в приведен пример области  $R_Z > 0$  для участка 2°д.

3°.  $h = h_3 = \text{const}$ ;  $h_3 \geq j$  (полоса 3° на фиг. 5, фиг. 4, 3° для кривой  $\kappa(\theta)$ ). Кривая  $\kappa(\theta)$  определена на отрезках  $[-2\pi, \theta_1]$  и  $[\theta_4, 0]$ . Критические прямые существуют при любых значениях  $\delta$ .

3°а ( $0 < \delta \leq \delta_2$ ). Область  $R_Z > 0$  представлена на фиг. 3, д. При  $\delta = 0$  прямые  $\theta = \theta_{1,2}^*$  симметричны относительно  $-\pi$ :  $\theta_1^* = -2\pi - \theta_2^*$ ,  $\theta_2^* = -\arccos(-j/h)$ ,  $\theta_2 < \theta_1^* < \theta_2^* < \theta_4$ . При монотонном возрастании  $\delta$  обе прямые движутся вправо, в частности, при  $\delta = \delta_2$  имеем  $\theta_2^* = \theta_4$ .

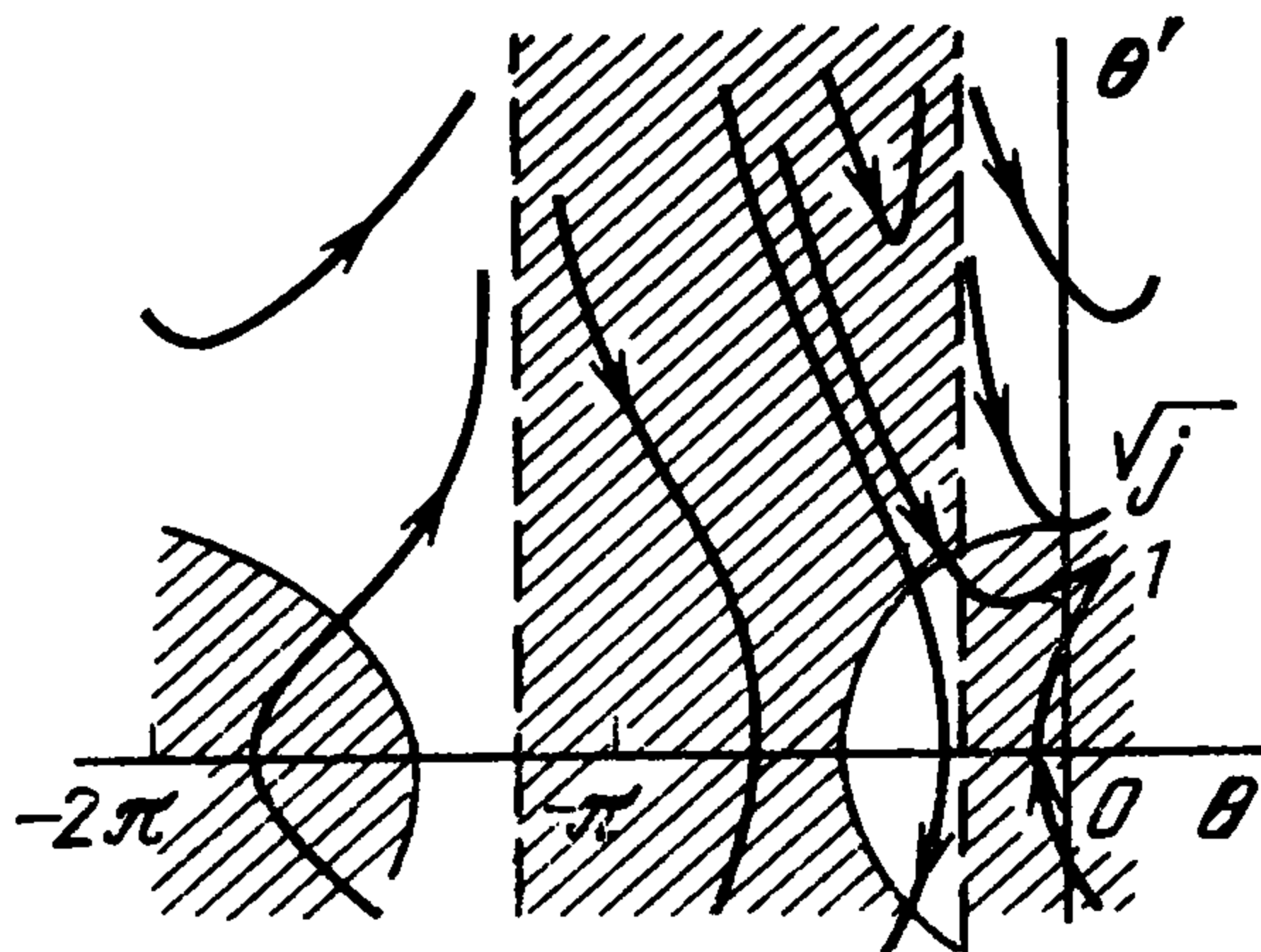
3°б ( $\delta_2 < \delta \leq 1$ ), 3°в ( $\delta > 1$ ). Область  $R_Z > 0$  для участка 3°в представлена на фиг. 7. При  $\delta \rightarrow +\infty$  имеем  $\theta_1^* \rightarrow -\pi$ ,  $\theta_2^* \rightarrow 0$ .

4. Долгая раскрутка. Из примеров фиг. 3, б и 7 видно, что все неколебательные, а также некоторые из колебательных движений аппарата приводят к нарушению связей.

Если в начальный момент  $\tau = 0$  корпус располагается между критическими углами,  $\theta(0) \in (\theta_1^*, \theta_2^*)$ , то за конечный промежуток времени он должен попадать в критическое положение — сохранить неподвижность точки  $O$  в последующие моменты времени невозможно; кроме того, в критических положениях происходит смена знака  $R_Z$  — сохранить неподвижность точки опоры тоже невозможно (фиг. 3, в—д, фиг. 6, 7).

В остальных случаях неколебательных движений ( $\theta(0) \notin [\theta_1^*, \theta_2^*]$ ) вертикальная реакция за конечное время убывает до нуля, а затем становится отрицательной (фиг. 3, б, 7).

В тот момент, когда  $R_Z$  обращается в нуль, нога отрывается от поверхности, аппарат начинает падать. Угол поворота, который успевает совершить корпус до падения, зависит от размеров и структуры области



Фиг. 7

связанного движения. Если область  $R_z > 0$  односвязна (фиг. 3, б), угол поворота может быть достаточно большим. Условия односвязности области:  $r < j$ ; при  $j < 2$   $h < 2\sqrt{j-1}$ . Учитывая, что  $j = j_c + 1$ , а  $j_c = J_c/(M\rho^2) = K^2/\rho^2$ , где  $j_c$  — центральный момент инерции корпуса,  $K$  — центральный радиус инерции, запишем эти условия в размерном виде

$$d^2 + H^2 < K^2 \quad (4.1)$$

Если  $H < 2K$ , то  $K < \rho$ .

Фазовые траектории внутри односвязной области  $R_z > 0$  являются траекториями либо ограниченных колебаний, либо неограниченной раскрутки. Представляет интерес достаточно долгая раскрутка корпуса, например в течение несколько полных оборотов. Из (4.1) следует, что такая возможность обеспечивается при достаточно малых опорном сдвиге  $d$  и высоте  $H$  или при выборе аппарата с достаточно большим центральным радиусом инерции  $K$ . При  $j \rightarrow \infty$  область связанного движения покрывает всю фазовую плоскость (фиг. 3, б). Это возможно лишь при  $K \rightarrow \infty$  ( $\rho$  — фиксированно) или, что более физично, при  $\rho \rightarrow 0$  ( $K$  — фиксированно). Только в этом последнем случае, разобранным ранее [3], раскрутка корпуса длится бесконечно долго.

Все описанные выше режимы стояния можно рассматривать как предельные случаи режимов ходьбы при стремлении к нулю длины шага и скорости ходьбы. Исследованные движения могут быть использованы в качестве порождающих при решении задач ходьбы.

**5. Режим ходьбы на месте.** Если  $j$  конечно, ( $K$  конечно,  $\rho \neq 0$ ), любое движение корпуса через верхнее вертикальное положение приводит к падению аппарата (фиг. 3, б, 7). В некоторых случаях падение можно предотвратить, если отказаться от условия неизменности опорной точки и вовремя, например при  $\theta = 0$ , сменить опорную ногу. Повторяя этот процесс, можно организовать режим ходьбы на месте двуногого шагающего аппарата. Корпус аппарата в таком режиме должен колебаться около положения  $\theta = 0$ .

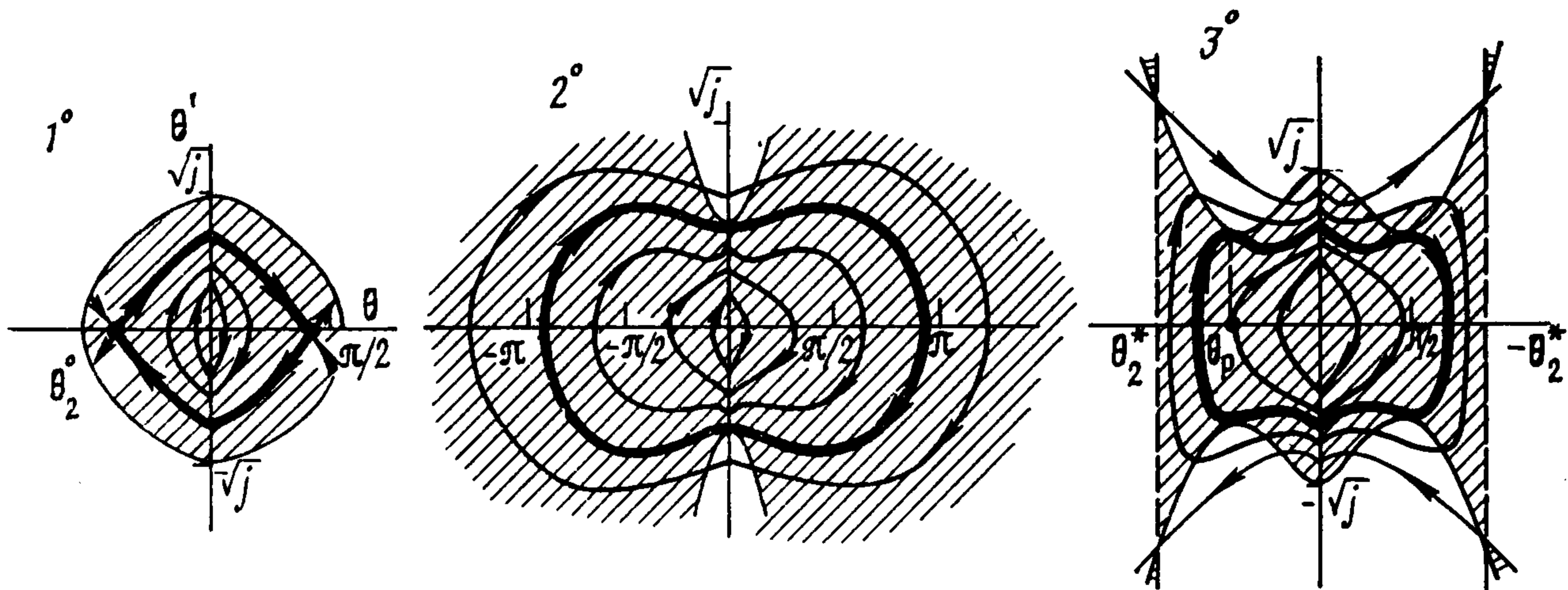
Опишем способ построения одноопорной ходьбы на месте. Пусть опорная точка находится на оси  $NY$ :  $S(0, y_s, 0)$ . На фиг. 3, а — г изображены фазовые портреты движения корпуса при  $y_s = \delta$ ,  $\delta > 0$  (аппарат стоит на левой ноге). При  $y_s = -\delta$  (аппарат стоит на правой ноге) фазовые портреты симметричны приведенным относительно оси  $\theta = 0$ . Представим фазовые портреты склеенного следующим образом движения: при  $y_s = \delta$   $\theta < 0$ , при  $y_s = -\delta$   $\theta > 0$ . Иначе говоря, будем управлять координатой точки опоры по закону:  $y_s = \delta \operatorname{sign} \theta$  (для того чтобы при  $\theta = 0$  сменить опорную ногу, необходимо в суставе  $O$  опорной ноги при  $\theta = 0$  отключить управление, а в суставе  $O$  переносной ноги — включить). В дальнейшем будем рассматривать только склеенные фазовые портреты.

Из фиг. 3 видно, что на всех пяти типах склеенных портретов должны существовать замкнутые фазовые траектории — траектории колебаний корпуса около верхнего вертикального положения. Назовем областью колебаний такую часть склеенной фазовой плоскости, на которой все фазовые траектории являются замкнутыми траекториями периодических движений около  $\theta = 0$ . Область колебаний по определению не содержит критических и стационарных точек. Обозначим  $\theta'(\pm c_\gamma, 0)$  фазовые тра-

ектории, проходящие через точки  $(\pm\theta_v, 0)$  фазовой плоскости,

$$\theta_v = \begin{cases} \theta_2^\circ & \text{при } \delta \leq 1 \\ -\infty & \text{при } \delta > 1, r < j \\ \theta_2^* & \text{при } \delta > 1, r \geq j \end{cases}$$

Траектории  $\theta'(\pm c_v, \theta)$  служат при  $\theta \in (\theta_v, -\theta_v)$  границами области колебаний; все виды областей колебаний представлены на фиг. 8. Если  $\delta > 1, r < j$ , область колебаний не ограничена (фиг. 8, 2°), если  $\delta > 1, r \geq j$ , роль границ играют траектории  $\theta'(\pm c_2^*, \theta)$  и соединяющие



Фиг. 8

их отрезки прямых  $\theta = \pm\theta_2^*$  (фиг. 8, 3°). Область колебаний, вообще говоря, выходит за пределы области  $R_z > 0$  (фиг. 8, 2°, 3°).

Выделим внутри пересечения областей колебаний и связанного движения область связанных колебаний, которую будем называть областью управляемости. На фиг. 8 границы областей управляемости отмечены жирными линиями. Все траектории из области управляемости отвечают периодическому движению корпуса при ходьбе на месте. Предполагается, что в течение первого шага аппарат опирается на левую ногу:  $y_s = \delta, \theta < 0$ , в течение второго шага — на правую:  $y_s = -\delta, \theta > 0$  и т. д. Если время одного шага равно  $\tau_k$ , то корпус в процессе движения совершает  $2\tau_k$  — периодические колебания, наклоняясь на каждом шаге в сторону опорной ноги.

Основные характеристики колебаний корпуса зависят от вида области управляемости и определяются значениями параметров  $j, \delta, h$ . Исследуем виды областей управляемости при различных значениях параметров.

Фазовые траектории колебаний могут покинуть область связанного движения только через границу  $\kappa(\theta)$  (фиг. 8). Направление траекторий в различных точках плоскости  $\theta, \theta'$  определяется векторным полем уравнения (1.2):

$$\mathbf{w} = \{w_\theta, w_{\theta'}\} \\ w_\theta = \theta', \quad w_{\theta'} = [j(\delta + \sin \theta) - (d\Phi/d\theta)\theta'^2]/\Phi(\theta) \quad (5.1)$$

Из (5.1) следует, что при  $\theta'^2 = j(\delta + \sin \theta)(d\Phi/d\theta)^{-1}$  фазовые траектории имеют горизонтальные касательные. Условие

$$\theta' = \eta(\theta) = \pm [j(\delta + \sin \theta)(d\Phi/d\theta)^{-1}]^{1/2} \quad (5.2)$$

определяет на фазовой плоскости непрерывную кривую  $\eta(\theta)$ . Можно доказать, что для  $\theta \in (\theta_v, -\theta_v)$  выполняется неравенство  $|\eta(\theta)| < |\kappa(\theta)|$  и при  $\delta \leq 1$   $|\theta'(c_v, \theta)| < |\eta(\theta)|$ . Следовательно,  $|\theta'(c_v, \theta)| < |\kappa(\theta)|$ , т. е. область колебаний принадлежит области связанного движения, область управляемости совпадает с областью колебаний.

При  $\delta > 1$  граница области связанного движения может находиться внутри области колебаний.

Рассмотрим в некоторой окрестности кривой  $\kappa(\theta)$  функцию  $G(\theta, \theta') = f(\theta) - \theta'^2$ . Внутри области связанного движения  $G(\theta, \theta') > 0$ , за пределами области  $G(\theta, \theta') \leq 0$ . Обозначим  $\Delta(\theta, \theta')$  производную функции  $G(\theta, \theta')$  по направлению векторного поля (5.1):  $\Delta(\theta, \theta') = (w \cdot \text{grad } G)$ . Опуская промежуточные вычисления, выпишем значение  $\Delta(\theta, \theta')$  на кривой  $\kappa(\theta)$

$$\Delta_{\kappa} = \Delta(\theta, \kappa(\theta)) = -2j\theta'p(\cos\theta)\sin\theta/(h + j\cos\theta)^2$$

$$p(\cos\theta) = 3j\cos^2\theta + 2h(2 + j)\cos\theta + 3h^2 - j(j - 1) \quad (5.3)$$

Значение  $\text{sign } \Delta_{\kappa}$  характеризует поведение фазовых траекторий на границе области  $R_Z > 0$ : если  $\Delta_{\kappa} > 0$ , функция  $G(\theta, \theta')$  возрастает вдоль фазовой траектории, траектория входит в область  $R_Z > 0$ , если  $\Delta_{\kappa} < 0$ , функция  $G(\theta, \theta')$  убывает и траектория выходит из указанной области. Направление фазовых траекторий на границе  $\kappa(\theta)$  определяет при  $\delta > 1$  вид области управляемости.

Пусть  $\theta \in [-\pi, 0]$ ,  $\theta' > 0$ . В этой части фазовой плоскости  $\text{sign } \Delta_{\kappa} = \text{sign } [p(\cos\theta)]$ .

Исследование показывает, что если  $h < (j - 4)/3$ ,  $j > 4$ , функция  $p(\cos\theta) < 0$  для любых  $\theta$ ; если  $h > j$ , функция  $p(\cos\theta) > 0$  для любых  $\theta$ . Если  $(j - 4)/3 \leq h \leq j$ , функция  $p(\cos\theta)$  имеет на интервале  $[-\pi, 0]$  корни, из которых один, наибольший, характеризует вид области управляемости при  $\delta > 1$ . Обозначим этот корень  $\theta_p$ . Имеем

$$\cos\theta_p = (-h(j + 2) + \{(j - 1)[h^2(j - 4) + 3j^2]\}^{1/2})/(3j) \quad (5.4)$$

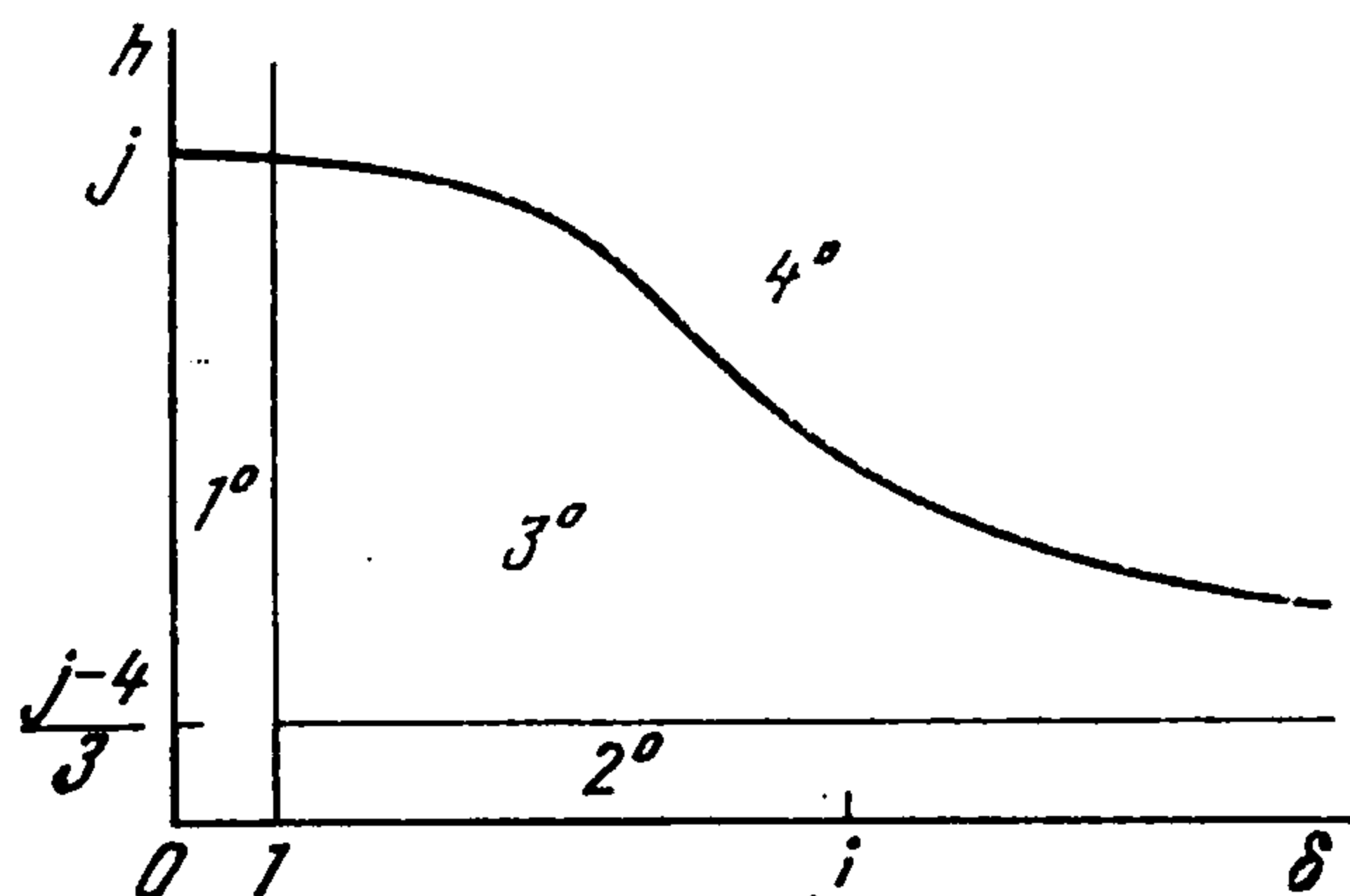
$dp(\cos\theta_p)/d\theta > 0$ , при  $\theta \in (\theta_p, 0]$  функция  $p(\cos\theta) > 0$ . Функция  $p(\cos\theta)$  меняет знак на интервале  $(\theta_p, 0)$  только в том случае, когда  $\theta_p \in (\theta_v, 0)$ . При  $\delta > 1$ ,  $r < j$  это условие выполнено. При  $\delta > 1$ ,  $r \geq j$  ( $\theta_v = \theta_2^*$ ) условие требует дополнительной проверки.

Уравнение

$$\cos\theta_p = \cos\theta_2^* \quad (5.5)$$

позволяет при любых  $j, h$ ,  $h < j$  определить значение  $\delta_p(j, h)$ , такое, что для  $1 < \delta < \delta_p(j, h)$  корень  $\theta_p \in (\theta_v, 0)$ , для  $\delta \geq \max\{1, \delta_q(j, h)\}$  корень  $\theta_p \in (\theta_v, 0)$ . Правая часть уравнения (5.5) определена выражением (5.4), левая — выражением (2.1).

Поверхности  $\delta = 1$ ,  $\delta = \delta_p(j, h)$ ,  $h = (j - 4)/3$  (при  $j > 4$ ) разбивают пространство параметров  $(j, \delta, h)$  на подпространства, каждому из которых



Фиг. 9

соответствует свой тип области управляемости. На фиг. 9 представлена проекция этого разбиения на плоскость  $j = \text{const}$  при  $j > 4$ . Примеры областей управляемости приведены на фиг. 8.

Опишем различные виды областей управляемости.

1°.  $\delta \leq 1$ . Область управляемости совпадает с областью колебаний (фиг. 8, 1°).

Амплитуды колебаний ограничены значением  $|\theta_2^{\circ}| \leq \pi/2$ , угловая скорость — значением  $|\theta'(c_2^{\circ}, 0)| < \sqrt{j}$ . Время шага не ограничено: аппарат может стоять на одной ноге в течение конечного, но сколь угодно большого промежутка времени, если амплитуда колебаний сколь угодно близка к  $|\theta_2^{\circ}|$ .

2°.  $\delta > 1$ ,  $h < (j - 4)/3$ ,  $j > 4$ . При любых  $\theta$  функция  $p(\cos \theta) < 0$  — фазовые траектории при  $\theta \in (-\pi, 0)$  могут только выходить из области связанного движения. Границей области управляемости служит траектория  $\theta'(\pm c_j, \theta)$ , проходящая через точки  $(0, \pm \sqrt{j})$ . На фиг. 8,2° приведен пример для  $r < j$ .

На граничной траектории достигается максимально возможная при  $\theta = 0$  угловая скорость

$$\max_{\delta, h, c} |\theta'(c, 0)| \sqrt{j} = |\theta'(c_j, 0)|$$

Отметим, что при  $\delta > 1$  величина  $\sqrt{j}$  ограничивает значение  $\theta'(c, \theta)$  только в момент смены ног ( $\theta = 0$ ); в течение шага ( $\theta \neq 0$ ) угловая скорость  $\theta'(c, \theta)$  может превышать значение  $\sqrt{j}$  (фиг. 8,2°). Отметим также, что при  $\delta > 1$  время шага и период колебаний ограничены.

Из (1.6), (1.7) следует, что при движении вдоль граничной траектории  $\theta'(\pm c_j, \theta)$  смена опорной ноги осуществляется под действием непрерывного управления: при  $\theta = 0$   $q = 0$ ; отрыв опорной ноги и постановка переносной ноги происходит мягко: при  $\theta = 0$   $R_z = 0$ .

3°.  $h > (j - 4)/3$ ,  $1 < \delta < \delta_p(j, h)$ . Функция  $p(\cos \theta)$  имеет корень  $\theta_p \in (\theta_v, 0)$ . При  $\theta \in (-\pi, \theta_p)$  траектории колебаний могут только выходить из области  $R_z > 0$ , при  $\theta \in (\theta_p, 0)$  — только входить. Траектория, проходящая через точки  $\pm \theta_p$ ,  $\kappa(\pm \theta_p)$  касается кривой  $\kappa(\theta)$ . Именно эта траектория является границей области управляемости. На фиг. 8,3° приведен пример для  $r \geq j$ .

4°.  $h > (j - 4)/3$ ,  $\delta \geq \max\{1, \delta_p(j, h)\}$ . При  $\theta \in (\theta_v, 0)$  функция  $p(\cos \theta) > 0$ . Траектории колебаний не могут выйти из области  $R_z > 0$ . Область управляемости совпадает с областью колебаний. Амплитуда колебаний может превышать значение  $\pi/2$ , например, при  $\delta_p(j, h) < \delta < j$  имеем  $|\theta_v| = |\theta_2^*| > \pi/2$ .

Построенные режимы ходьбы на месте можно рассматривать как предельный случай пространственных режимов ходьбы при стремлении к нулю длины шага и скорости ходьбы. Вводя дополнительное условие на параметры системы ( $j = 1$ ,  $j_c = 0$ ), можно построить модель пространственной ходьбы, в которой построенные режимы используются в качестве основных<sup>2</sup>. Движение аппарата в такой модели осуществляется вдоль оси  $NX$  (фиг. 1), поперечные колебания центра масс не зависят от продольного движения; эти колебания описываются уравнением (1.2) и представляют собой частный случай ( $j = 1$ ) построенных колебаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В., Лавровский Э. К. О задаче стояния шагающего аппарата // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 591—601.
2. Белецкий В. В. Двухногая ходьба — модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 286 с.
3. Белецкий В. В. Динамика двухногой ходьбы. I, II // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 3—14; № 4. С. 3—13.

Москва

Поступила в редакцию  
5.VII.1988

<sup>2</sup> См. сноску на с. 226.