Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 2, 1989

УДК 531.38

С. А. Довбыш

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЭЙЛЕРА – ПУАНСО, СВЯЗАННЫЕ С РАСЩЕПЛЕНИЕМ СЕПАРАТРИС

Рассматривается ряд новых качественных динамических эффектов, связанных с явлением расщепления асимптотических поверхностей (сепаратрис) возмущенных перманентных вращений в задаче о движении несимметричного твердого тела с неподвижной точкой в слабом поле силы тяготения (или, более общо, потенциальном осесимметричном поле). Дано определение порядка величины несовпадения сепаратрис и указаны соответствующие оценки. Найдены условия, накладываемые на параметры задачи, при которых имеются инвариантные торы, разделяющие возмущенные гиперболические перманентные вращения. Установлено, что при почти всех значениях параметров задачи имеются квазислучайные движения, обусловленные наличием трансверсально пересекающихся сепаратрис. Обнаружены и исследованы бифуркационные эффекты, характеризующиеся тем, что при стремлении параметра Пуанкаре к нулю качественная картина поведения траекторий меняется бесконечное число раз. Данная работа завершает исследование [1].

1. Расщепление сепаратрис и метод нормальных координат Мозера. Пусть U — область на действительной плоскости $\mathbf{R}^2\,\{x^1,\ x^2\}$, μ — малый параметр: $|\mu| < \varepsilon$. Рассматривается система

$$\frac{dx^1}{d\varphi} = \frac{\partial H}{\partial x^2},\quad \frac{dx^2}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial x^1} \tag{1.1}$$

$$(H\,(x^1,\ x^2,\ \varphi,\ \mu) = H_0\,(x^1,\ x^2) + \mu H_1\,(x^1,\ x^2,\ \varphi) + \ldots)$$

с функцией Гамильтона, 2π-периодической по времени φ и аналитической на прямом произведении

$$U\,\{x^1,\ x^2\} \times S^1\,\{\varphi \bmod 2\pi\} \times (-\varepsilon,\ \varepsilon)$$

Пусть невозмущенная гамильтонова система

$$\frac{dx^1}{d\varphi} = \frac{\partial H_0}{\partial x^2},\quad \frac{dx^2}{d\varphi} = -\frac{\partial H_0}{\partial x^1} \tag{1.2}$$

имеет неподвижные гиперболические точки $x_1,\ x_2,\ x_3 \in U$ (возможно, точки x_1 и x_3 совпадают), соединенные двумя двоякоасимптотическими решениями $x_1^*\,(\varphi)$, $x_2^*\,(\varphi)$, целиком лежащими в области U:

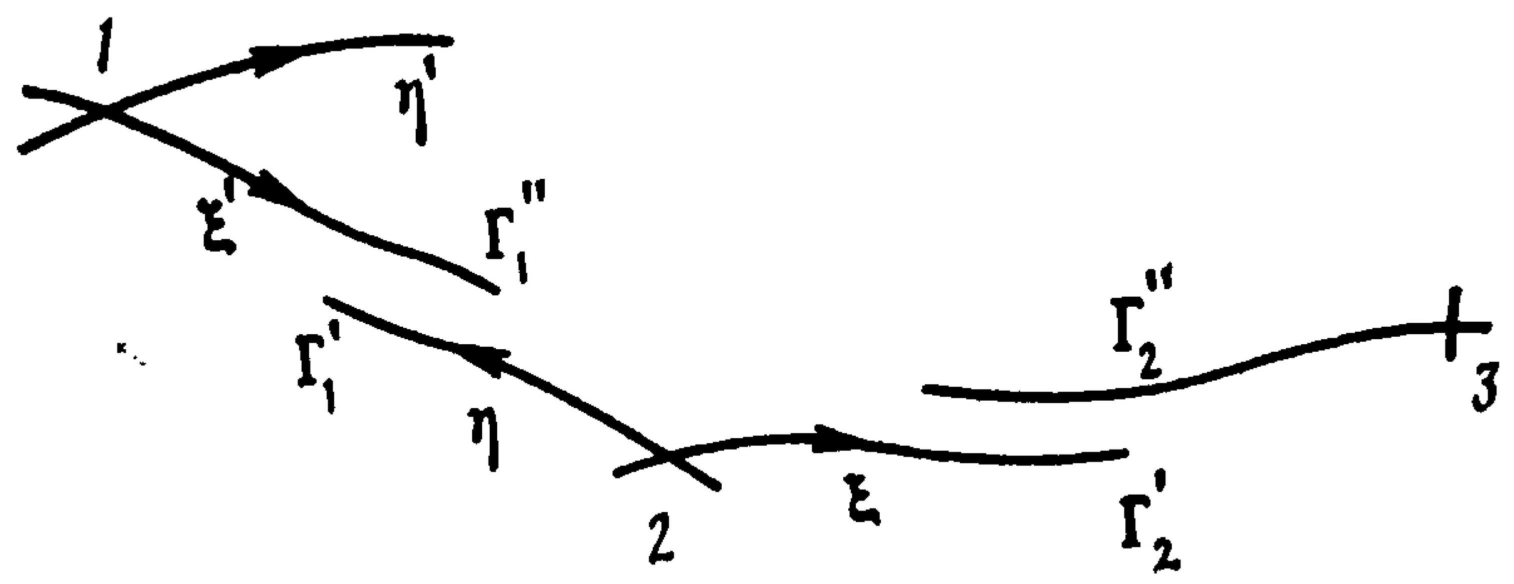
$$\lim_{\varphi\to-\infty} x_k^*(\varphi) = x_k,\quad \lim_{\varphi\to+\infty} x_k^*(\varphi) = x_{k+1};\quad k = 1, 2$$

Решения, асимптотические при $\varphi \to -\infty$ или $\varphi \to +\infty$ к заданному периодическому гиперболическому решению, образуют две инвариантные поверхности, называемые соответственно выходящей и входящей сепаратрисами.

Система (1.2) имеет две пары совпадающих (сдвоенных) асимптотических поверхностей гиперболических периодических решений. Это выходящая сепаратриса Γ_1'' решения $x \equiv x_1$ и входящая сепаратриса Γ_1' решения $x \equiv x_2$, с одной стороны, и выходящая сепаратриса Γ_2' решения $x \equiv x_2$ и входящая сепаратриса Γ_2'' решения $x \equiv x_3$ — с другой.

При малых $\mu \neq 0$ 2π-периодические гиперболические решения $x \equiv x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и их асимптотические поверхности не исчезнут, а лишь немного деформируются. Однако, как обнаружил Пуанкаре, в общем случае при малых значениях параметра $\mu \neq 0$ сепаратрисы перестают быть сдвоенными (расщепляются).

Пусть при малых $\mu > 0$ решения $x \equiv x_i$ переходят в решения $x = x_i(\varphi)$, а возмущенные сепаратрисы Γ_1', Γ_1'' и Γ_2', Γ_2'' расщепляются и не пересекаются, причем Γ_k'' лежат с одной стороны от Γ_k' (сечение плоскостью $\varphi = \text{const}$ изображено на фиг. 1). Были указаны [1] простые достаточные условия несовпадения сепаратрис Γ_k'' при всех малых $\mu > 0$ и полученные результаты использовались при исследовании сепаратрис



Фиг. 1.

возмущенной задачи Эйлера — Пуансо. Доказательства основывались на применении нормальных координат Мозера, описанных ниже.

Имеет место «равномерный вариант» теоремы Мозера [2]: существует замена переменных

$$x = \Phi(\xi, \eta, \varphi, \mu) = \Phi_0(\xi, \eta) + \mu\Phi_1(\xi, \eta, \varphi) + \ldots$$
$$\partial(x^1, x^2)/\partial(\xi, \eta) \equiv 1, \quad \Phi_0(0, 0) = x_2$$

вещественно-аналитическая по ξ, η, φ, μ при достаточно малых $|\xi|$, $|\eta|$, $|\mu|$ и 2π-периодическая по φ, приводящая систему (1.1) к нормальной форме (точкой обозначена производная по ω)

$$d\xi/d\varphi = \partial F/\partial\eta, \quad d\eta/d\varphi = -\partial F/\partial\xi \tag{1.3}$$
$$\omega = \xi\eta, \quad F(\omega, \mu) = F_0(\omega) + \mu F_1(\omega) + \ldots, \quad \dot{F_0}(0) = \Lambda > 0$$

Можно считать, что выходящая сепаратриса $\eta = 0$, $\xi > 0$ совпадает с Γ_2', а входящая сепаратриса $\xi = 0$, $\eta > 0$ — с Γ_1'. Координаты ξ, η, φ носят название нормальных. Их систематическое использование позволяет выявить и исследовать ряд новых динамических эффектов, связанных с расщеплением сепаратрис. При этом используются, во-первых, тот факт, что система (1.3) тривиально интегрируется, и, во-вторых, формулы перехода от нормальных координат, заданных вблизи решения $x = x_i(\varphi)$, к нормальным координатам, заданным вблизи решения $x = x_{i+1}(\varphi)$ [1]. Эти формулы определяются соответственно в окрестностях V_i сепаратрис Γ_i', Γ_i'', не содержащих невозмущенных решений $x \equiv x_i$, $x \equiv x_{i+1}$. Отметим, что в областях типа V_1 и V_2 оказывается удобным вместо ξ, η использовать соответственно координаты J, φ_1 и J, φ_2, где $J = \mu^{-1}\omega$, а фазы φ_1, φ_2 связаны с η, ξ условиями

$$x_1^*(\tau + \varphi_1) = \Phi_0(0, \eta \exp(-\Lambda\tau)) \tag{1.4}$$
$$x_2^*(\tau + \varphi_2) = \Phi_0(\xi \exp(\Lambda\tau), 0) \tag{1.5}$$

Особую роль в формулах перехода играют несобственные, так называемые, характеристические интегралы

$$J_i(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{H_0, H_1\}(x_i^*(\tau - \varphi), \tau)\, d\tau$$

являющиеся 2π-периодическими функциями. В частности, в первом приближении по μ формулы перехода в области V_i, записанные в координатах типа J, φ_1, φ_2, зависят лишь от функций $J_i(\varphi)$ и характеристических показателей Λ_i, Λ_{i+1} невозмущенных гиперболических решений $x \equiv x_i$, $x \equiv x_{i+1}$. Поэтому взаимное расположение сепаратрис Γ_i', Γ_i'' определяется поведением функции $J_i(\varphi)$ [2, 1]. Случай, изображенный на фиг. 1, возможен, только если $J_1(\varphi) \geqslant 0$, $J_2(\varphi) \leqslant 0$.

Далее $R_1, \ldots, R_{12}$ — некоторые аналитические функции, $C_1, \ldots$ $\ldots, C_{11}$ — постоянные.

2. Критерии несовпадения сепаратрис. Порядок величины несовпадения. *Определение 1.* Будем говорить, что две положительные переменные величины (зависящие от μ) имеют один порядок, если их отношение остается заключенным между двумя положительными константами (при всех малых $\mu > 0$).

Определение 2 (см. фиг. 1). Зафиксируем некоторые малые окрестности W_2, W_3 невозмущенных гиперболических решений $x \equiv x_2$, $x \equiv x_3$, границы которых (обозначаемые ∂W_2, ∂W_3) — гладкие поверхности, трансверсально пересекающие невозмущенную сепаратрису x_2^*. Рассмотрим участки $\Gamma_1''^{\sim}$, $\Gamma_2''^{\sim}$ сепаратрис Γ_1'', Γ_2'', лежащие вблизи x_2^* вне выбранных окрестностей x_2, x_3. Величиной несовпадения (ВН) сепаратрис Γ_1'', Γ_2'' назовем точную нижнюю грань таких ρ, что $\Gamma_2''^{\sim}$ лежит в ρ-окрестности $\Gamma_1''^{\sim}$.

Далее будем полагать, что $J_1 \not\equiv 0$ либо $J_2 \not\equiv 0$, т. е. расщепление хотя бы одной из сепаратрис x_1^*, x_2^* улавливается в первом порядке теории возмущений.

Теорема 1. 1) Если в определении 2 заменить x_2^* на x_1^* и окрестность W_3 невозмущенного решения $x \equiv x_3$ — на аналогичную окрестность W_1 решения $x \equiv x_1$, либо выбрать другие малые окрестности решений $x \equiv x_2$, $x \equiv x_3$, либо рассматривать ρ такие, что $\Gamma_1''^{\sim}$ лежит в ρ-окрестности $\Gamma_2''^{\sim}$, то новая ВН сепаратрис Γ_1'', Γ_2'' будет иметь тот же порядок, что и старая.

2) Сепаратрисы Γ_1'', Γ_2'' не совпадают при всех достаточно малых $\mu > 0$, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

А) Ни для какого C_1 не выполнено тождество

$$J_1(\varphi) = -J_2(\varphi - C_1 - \Lambda^{-1} \ln J_1(\varphi)) \tag{2.1}$$

Б) Ни для какого C_1 не выполнено тождество

$$-J_2(\varphi) = J_1(\varphi + C_1 + \Lambda^{-1} \ln(-J_2(\varphi))) \tag{2.2}$$

Условия А, Б эквивалентны и, в частности, имеют место, если выполняется хотя бы один из следующих критериев 1°, 2°, 3°.

1°. $\frac{d}{d\varphi} \ln J_1(\varphi) \geqslant \Lambda$ либо $\frac{d}{d\varphi} \ln(-J_2(\varphi)) \leqslant -\Lambda$

при каком-нибудь φ (это, в частности, имеет место, если $J_1(\varphi) = 0$ или $J_2(\varphi) = 0$ при некотором φ).

2°. Области изменения функций J_1, $-J_2$ не совпадают.

3°. Одна из функций J_1, J_2 не равна постоянной и имеет на своей римановой поверхности нуль либо полюс, а полная аналитическая функция [3], соответствующая второй функции, однозначная (этим условиям удовлетворяют, например, действительные тригонометрические полиномы).

Эквивалентность условий А, Б следует из того факта, что тождества (2.1), (2.2) выполняются при одних и тех же значениях C_1.

В) 4°. $F_0^{\cdot\cdot}(0) \neq 0$ и хотя бы одна из функций J_i не постоянна.

3) При выполнении условий А, Б ВН сепаратрис Γ_1'', Γ_2'' имеет порядок μ.

Если условия А, Б не выполнены, т. е. для некоторого C_1 имеют место тождества (2.1), (2.2), но выполняется критерий 4°, то ВН сепаратрис заключена между некоторыми величинами, имеющими порядки μ и $-\mu^2 \ln \mu$ соответственно. Более того, существуют последовательности положительных $\mu \to 0$, для которых ВН имеют минимальный и максимальный порядки: $-\mu^2 \ln \mu$ и μ.

Эта теорема уточняет и усиливает теорему 1 из работы [1]. Строгое доказательство элементарно, но довольно громоздко. Отметим только, что оно использует идеи [1] и некоторые хорошо известные теоремы анализа.

3. Несовпадение сепаратрис в задаче о движении несимметричного твердого тела в слабом осесимметричном потенциальном силовом поле. Рассматривается движение несимметричного твердого тела вокруг неподвижной точки. Пусть $a < b < c$ — величины, обратные главным моментам инерции тела. Предположим, что силовое поле слабое и разлагается в ряд по степеням малого параметра μ. Если зафиксировать уровень полной энергии $h > 0$ и постоянную площадей H, то при помощи изоэнергетической редукции (известной также как понижение порядка по Уиттекеру [4]) можно перейти к приведенной системе вида (1.1), где $x^1 = l$, $x^2 = L$, $\varphi = g$ — канонические переменные Андуайе — Депри.

При $\mu = 0$ система (1.1) имеет неподвижные точки

$$\gamma_1\colon\ (L = 0,\ l = \pi \bmod 2\pi),\ \gamma_2\colon\ (L = 0,\ l = 0 \bmod 2\pi)$$

соединенные двоякоасимптотическими решениями. Для $\mu = 0$ при соответствующем выборе параметров задачи сепаратрисы могут расщепляться и не пересекаться. В этом случае приходим к ситуации, исследовавшейся в п. п. 1, 2, причем решения $x = x_1(\varphi)$, $x = x_3(\varphi)$ совпадают. При этом сепаратрисы Γ_k'' будут пересекаться по крайней мере по двум различным гомоклиническим решениям, что следует из теоремы Мозера об инвариантных кривых и наличия инвариантной площади у отображения последования системы (1.1) [1].

Ранее рассматривался случай движения в поле силы тяжести [1], когда несобственные интегралы $J_i(\varphi)$, взятые вдоль невозмущенных двоякоасимптотических решений,— тригонометрические непостоянные полиномы [2, 1] и, следовательно, применим критерий 3°. В общем случае интегралы $J_i(\varphi)$ могут уже не являться тригонометрическими полиномами. Однако, как показывает сформулированная ниже теорема, применим критерий 4°, если среди функций $J_i(\varphi)$ есть непостоянные.

Теорема 2. Для задачи Эйлера — Пуансо всегда $F_0^{\cdot\cdot}(0) \neq 0$.

Доказательство основано на том факте, что невозмущенный гамильтониан $-G = H_0(l, L)$ — решение уравнения [2]

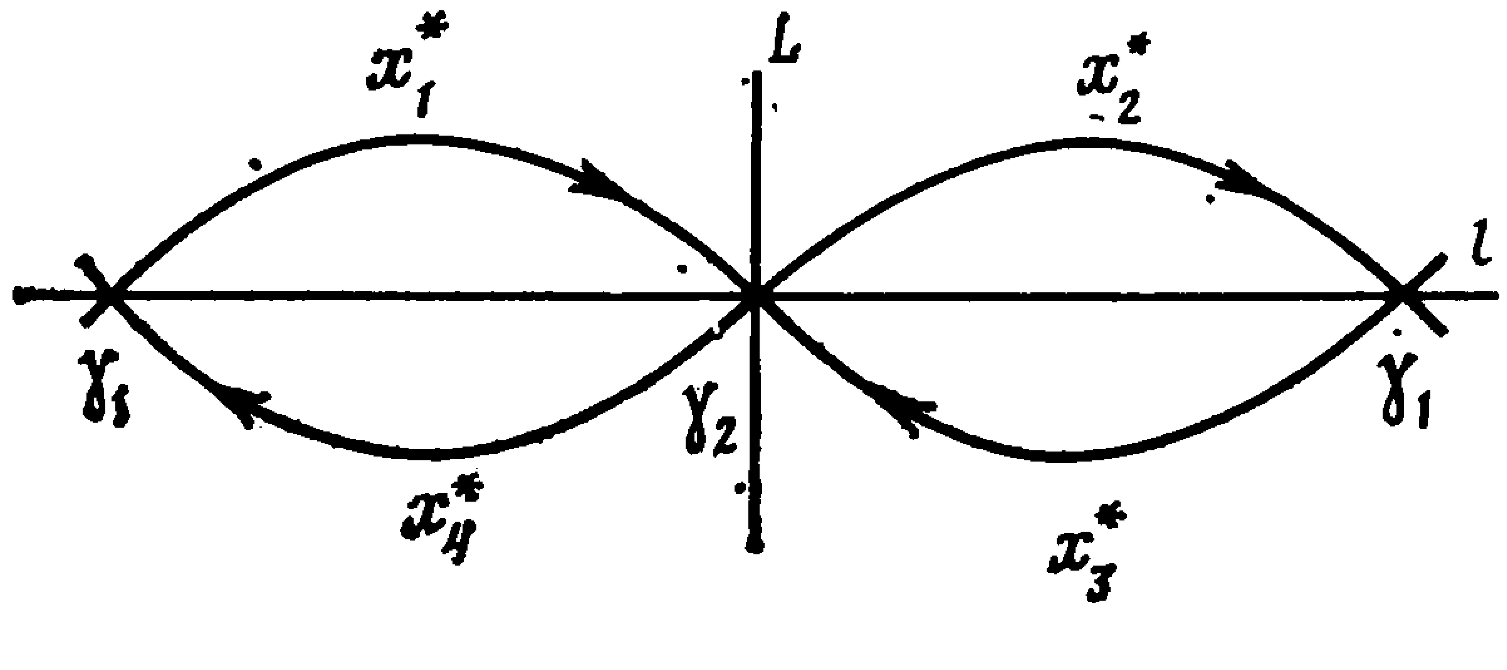
$$^1/_2\,(a \sin^2 l + b \cos^2 l)(G^2 - L^2) + {}^1/_2 cL^2 = h\ \ (h = {}^1/_2 bG_0^2)$$

Справедлива также

Теорема 3. Тождества (2.1), (2.2) не могут выполняться одновременно для всех четырех пар соседних невозмущенных сепаратрис (даже при различных значениях постоянных C_1), если среди функций $J_i(\varphi)$ есть непостоянные. Значит, для некоторой пары сепаратрис справедливы критерии А, Б.

Действительно, тождества (2.1), (2.2) устанавливают однозначное соответствие между интервалами монотонности положительных функций $J_1(\varphi)$, $-J_2(\varphi)$, причем каждому интервалу возрастания (убывания) $J_1(\varphi)$ соответствует более короткий (длинный) интервал возрастания (убывания) $-J_2(\varphi)$. Отсюда очевидным образом следует доказательство.

4. Колмогоровские торы, разделяющие возмущенные гиперболические перманентные вращения. Рассматривается движение несимметричного твердого тела в слабом поле силы тяжести. Обозначим параметры задачи через $\mathrm{pr} = (a, b, c, X_0, Y_0, Z_0, H/G_0)$, где X_0, Y_0, Z_0 — направляющие



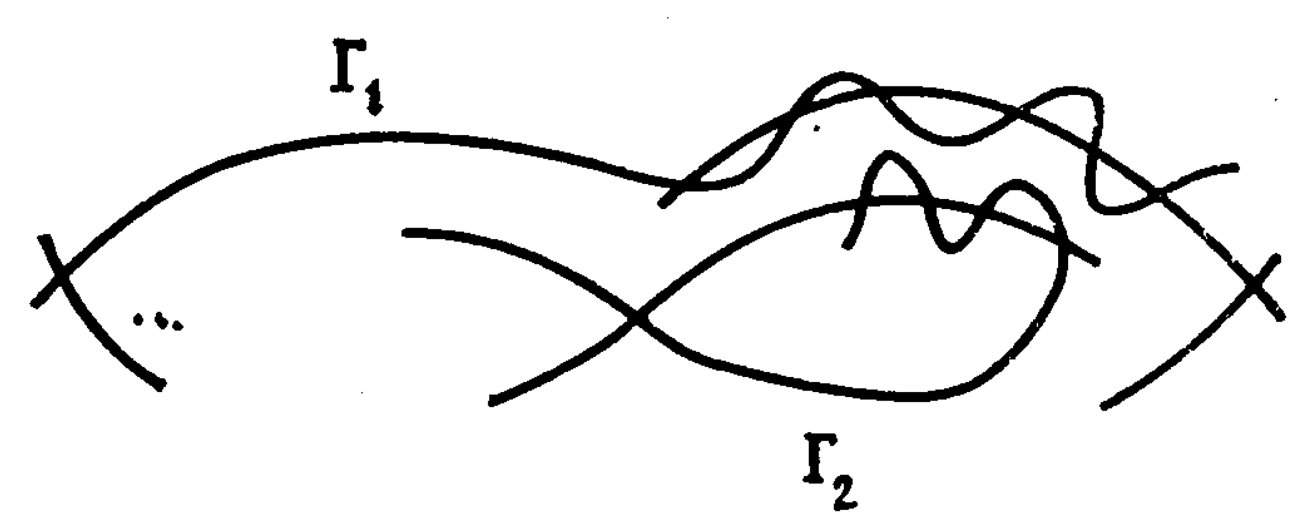
Фиг. 2

косинусы радиуса-вектора центра тяжести в главных осях инерции, связанных с неподвижной точкой (в качестве параметра Пуанкаре μ выступает произведение веса тела на расстояние от центра тяжести до точки подвеса).

Теорема 4. Существует область S_0 в пространстве параметров задачи, такая, что при малых $\mu > 0$ имеются двумерные инвариантные торы, расположенные вблизи невозмущенных сепаратрис и разделяющие возмущенные периодические решения γ_1, γ_2. Поэтому не существует гетероклинических решений.

Доказательство. Обозначим $x_i^*(\varphi)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ невозмущенные двоякоасимптотические решения и выберем их так, чтобы точки $x_i^*(0)$ были равноудалены от неподвижных точек γ_i (фиг. 2). Пусть $J_i(\varphi)$ — соответствующие характеристические интегралы, которые были вычислены в [1]. Отметим, что $(-1)^{i+1} \oint J_i(\varphi) d\varphi = 2\pi J_0$.

В окрестности возмущенного периодического решения γ_i выберем нормальные координаты ξ_i, η_i, пусть $\omega_i = \xi_i \eta_i$. В окрестности x_i^* свяжем с $|\xi_{i \bmod 2}|$ фазу φ_i по формулам вида (1.5). Пусть двумерные площадки Π_i задаются в окрестностях x_i^* условиями $\varphi_i = 0$. На каждой площадке Π_i в качестве координат возьмем $\varphi \bmod 2\pi$, $I_i = \mu^{-1} \omega_{i \bmod 2}$. Пусть $j = (i + 1) \bmod 4$. Пусть для определенности возмущенные сепаратрисы расположены, как изображено на фиг. 3. В этом случае $J_0 > 0$.



Фиг. 3

Лемма. Каждая точка $(I_i, \varphi_i = 0, \varphi)$, $(-1)^i I_i > 0$, лежащая на Π_i, за время

$$\Delta\varphi = -C_2 - \Lambda^{-1} (\ln((-1)^j I_j) + \ln \mu)(1 + \mu R_i(I_j, \mu)) + \\ + \mu R_{4+i}(I_i, \varphi, \mu)$$

фазовым потоком системы (1.1) переносится в точку

$$(I_j,\ \varphi_j = 0,\ \ \varphi + \Delta\varphi)$$
$$(I_j = I_i + \Lambda^{-1} J_i(\varphi) + \mu R_{8+i}(I_i,\ \varphi,\ \mu))$$

лежащую на Π_j, если выполнено условие $(-1)^j I_j > 0$.

Доказательство леммы следует из уравнений (1.3) и формул перехода [1]. В силу симметрии невозмущенной задачи постоянная C_2 не зависит от i.

Итак, можно рассмотреть отображение

$$(I_i,\ \varphi_i = 0,\ \varphi) \to (I_j,\ \varphi_j = 0,\ \varphi + \Delta\varphi)$$

части Π_i в Π_j; точно так же часть Π_j отображается в следующую площадку. Можно рассмотреть отображение T площадки Π_1 в себя — композицию таких последовательных отображений.

Зафиксируем постоянные Λ и $0 < C_3 < {}^1/_2$. Если функции $(-1)^{i+1} J_i(\varphi)$ являются δ-близкими к Λ в некоторой комплексной окрестности вещественной окружности $S^1\{\varphi\}$ (δ-близкими в C^ω-метрике), то при достаточно малых $\mu > 0$, δ отображение T будет определено на кольце $C_3 < -I_1 < 1 - C_3$ и $O(\delta)$-близко в метрике C^ω к отображению T_0:

$$I_1 \to I_1$$
$$\varphi \to \varphi - 4C_2 - 2\Lambda^{-1}(\ln(-I_1) + \ln(1 + I_1)) - 4\Lambda^{-1}\ln\mu$$

Из формул для $J_i(\varphi)$ [1] вытекает, что соответствующим выбором параметров pr задачи можно добиться выполнения этих условий. Отображение T сохраняет интегральный инвариант Пуанкаре — Картана и удовлетворяет всем условиям теоремы Мозера об инвариантных кривых, если δ достаточно мало и $\mu < \mu$ (pr). Траектории системы (1.1), проходящие через инвариантные кривые отображения T, будут заполнять искомые торы.

Существенно, что величина δ может быть выбрана независимо от μ. Аналогичный результат будет иметь место в общей задаче о движении тела в слабом осесимметричном потенциальном силовом поле, если потребовать, чтобы характеристические интегралы $J_i(\varphi)$ мало отличались от ненулевых постоянных.

Известно [5, 6], что пересекающиеся сепаратрисы образуют довольно запутанную сеть, которая не может пересекаться с инвариантными торами и, следовательно, не позволяет им находиться близко к сепаратрисам. Можно доказать следующий результат.

Теорема 5. Если все $J_i(\varphi) \not\equiv 0$ и пары функций $\varepsilon J_i(\varphi)$, $\varepsilon J_j(\varphi)$ (где $j = (i \pm 1) \bmod 4$, $\varepsilon = \mp(-1)^i$) удовлетворяют условиям А, Б, то каждый инвариантный тор задачи, высекающий на плоскости $\varphi = \mathrm{const}$ замкнутую кривую, проходящую вблизи x_k^*, x_l^* (где $l = (k + 1) \bmod 4$, $k = 1, 2, 3, 4$) или $x_1^*, \ldots, x_4^*$, около γ_i будет расположен в области $|\omega_{i \bmod 2}| > C_4|\mu|$, $C_4 > 0$, когда $\mu < \mu$ (pr).

В этом случае, используя вид отображения T_0, можно обнаружить одно интересное явление. Число вращения Пуанкаре [7] на инвариантном торе (предел отношения приращения координаты φ к числу обходов вдоль сепаратрис x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) превосходит $-4(C_2 + \Lambda^{-1}\ln\mu - \Lambda^{-1}\ln 2) + O(\delta)$. Назовем тор, лежащий посередине между расщепляющимися сепаратрисами, «центральным». При возрастании μ инвариантные торы будут двигаться из окрестности центрального в сторону сепаратрис. При уменьшении μ они, наоборот, будут двигаться из окрестностей сепаратрис в сторону центрального тора. Из теоремы 5 вытекает, что число вращения на каждом инвариантном торе не превосходит $-4(C_5 + \Lambda^{-1} \ln \mu)$. Резюмируя, получим, что картина миграции торов при изменении μ выглядит так: тор с фиксированным числом вращения рождается вблизи сепаратрисы (центрального тора), двигается, а потом разрушается вблизи центрального тора (сепаратрисы). Следовательно, при стремлении μ к нулю будет происходить бесконечно много бифуркаций рождения и разрушения инвариантных торов.

5. **Случай, когда тяжелое твердое тело содержит полости, наполненные идеальной несжимаемой жидкостью.** Если в некоторый момент времени движение жидкости потенциальное, т. е. скорость представляется как градиент однозначной функции, то, согласно теореме Томсона, это свойство сохранится и во все другие моменты движения. Движение твердого тела будет описываться уравнениями Эйлера — Пуассона, соответствующими движению тела, масса которого равна суммарной массе системы тело плюс жидкость, а тензор инерции получается из тензора инерции исходного тела прибавлением тензора присоединенных моментов жидкости [8].

Если все три главных момента инерции системы относительно точки закрепления различны, то остаются в силе все результаты п. п. 1—4 и работы [1]. Однако неравенство $a^{-1} < b^{-1} + c^{-1}$, справедливое для моментов инерции тела, в этом случае может нарушаться [9]. Оказывается, благодаря этому исчезает ограничение $\Lambda < 1$ [1] и величина Λ может принимать любые положительные значения. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно использовать формулу [1] $\Lambda = b^{-1} [(b - a)(c - b)]^{1/2}$ и рассмотреть случай, когда тело содержит наполненную жидкостью эллипсоидальную полость. Соответствующие формулы для присоединенных моментов инерции жидкости хорошо известны [8, 10].

В работе [1] было, в частности, доказано, что найдется область S_3 в пространстве параметров задачи, удовлетворяющая следующему условию. Для $\mathrm{pr} \in S_3$ при всех малых $\mu > 0$ возмущенные сепаратрисы расщепляются, не пересекаются и расположены, как показано на фиг. 3, и, кроме того, существуют последовательности положительных чисел $\mu_n^+ \to 0$, $\mu_n^- \to 0$, $n \to \infty$, таких, что при $\mu = \mu_n^-$ выходящая сепаратриса Γ_1 и входящая сепаратриса Γ_2 пересекаются вблизи невозмущенных сепаратрис x_1^*, x_2^*, x_3^*, а при $\mu = \mu_n^+$ — не пересекаются. Благодаря тому, что теперь Λ может быть сколь угодно велико, удается доказать следующий результат.

Теорема 6. Существует область $S_4 \subset S_3$ в пространстве параметров задачи, удовлетворяющая следующему условию. Для $\mathrm{pr} \in S_4$ найдутся последовательности положительных чисел $\mu_n^+ \to 0$, $\mu_n^- \to 0$, $n \to \infty$, таких, что при $\mu = \mu_n^-$ сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 пересекаются вблизи x_1^*, x_2^*, x_3^*, а при $\mu = \mu_n^+$ существуют двумерные инвариантные торы, расположенные вблизи x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^* и разделяющие возмущенные перманентные вращения γ_i. Следовательно, при стремлении $\mu > 0$ к нулю будет происходить бесконечно много бифуркаций рождения и исчезновения гетероклинических решений и разделяющих колмогоровских торов.

Схема доказательства. Прежде всего заметим, что доказательство [1] может быть значительно упрощено. Действительно, при $X_0 = Z_0 = 0$, $Y_0 = 1$ имеем

$$J_i(\varphi) = (-1)^i (a_0 - a_y \cos\varphi), \quad i = 1, 2$$
$$J_i(\varphi) = (-1)^i (a_0 + a_y \cos\varphi), \quad i = 3, 4$$

Зафиксируем $a_0 = -1$, $1/\sqrt{5} < a_y < 1$, а Λ выберем достаточно большим ($\Lambda > \Lambda(a_y)$) (что возможно согласно [1]). В этом случае соответствующие формулы [1] приобретают простой вид и содержат малые члены $O(\Lambda^{-1})$. Последовательность μ_n^- будет соответствовать числу t [1]

$$(t = C_2 + \Lambda^{-1} \ln\mu + 2\pi n + \Lambda^{-1} \ln \Lambda^{-1}, \ n = [-\ln \mu/(2\pi\Lambda)])$$

удовлетворяющему условию $t \bmod \pi = \pi/2$, а последовательность μ_n^+ — числу t, удовлетворяющему условию $t \bmod \pi = 0$. Оказывается, если a_y не принадлежит некоторому множеству (по всей вероятности, пустому), не имеющему предельных точек внутри интервала $[0, 1)$, то достаточно малые числа $\mu > 0$, удовлетворяющие условию $t \bmod 2\pi = 0$, будут образовывать искомую последовательность μ_n^+. Доказательство основано на том факте, что отображение T, построенное в п. 4, будет близко к тождественному.

Перейдем к более точным формулировкам. Пусть $\mu > 0$ достаточно мало и $t \bmod 2\pi = 0$. Проведя несложные вычисления и используя одну идею работы [11], можно найти, что отображение T в координатах $s_1 = s_1(I_1) = \Lambda I_1 + O(\mu)$, $\varphi \bmod 2\pi$ будет точным каноническим, $(O(\Lambda^{-2}) + O(\mu \ln \mu))$-близким вместе с производными вплоть до k-го порядка включительно к отображению сдвига за время Λ^{-1} вдоль траекторий автономной системы

$$\varphi^{\cdot} = -\partial H/\partial s_1, \quad s_1^{\cdot} = \partial H/\partial \varphi \tag{5.1}$$
$$H = \sum_{i=1}^{4} (-1)^i f((-1)^i s_i), \quad f(\tau) = (\ln \tau - 1)\tau$$
$$s_{i+1} = s_1 + G_i(\varphi), \quad G_i(\varphi) = \sum_{j=1}^{i} J_j(\varphi), \quad G_4 \equiv 0$$

Здесь оценка $O(\mu \ln \mu)$ зависит от Λ, оценки $O(\Lambda^{-2})$, $O(\mu \ln \mu)$ являются равномерными на любом компакте из области определения $|a_y \cos\varphi| - 1 < s_1 < 0$ функции H, k — любое выбранное заранее натуральное число. (Добиться малости в C^ω-метрике для больших Λ, вообще говоря, по-видимому, нельзя, так как ширина соответствующей комплексной окрестности зависит от Λ и может стремиться к нулю, когда $\Lambda \to \infty$.)

Траектории системы (5.1) — уровни гамильтониана H. Используя теорему о неявной функции, можно показать, что уровень γ_0: $H = H_0$ задается уравнением $s_1 = g(\varphi)$, где φ пробегает всю окружность S^1, тогда и только тогда, когда H_0 лежит в интервале $(f(1 + a_y) + f(1 - a_y);\ f(2a_y) - 2f(1 - a_y))$, непустом при $0 \leqslant a_y < 1$. Время возврата $T(H_0)$ фазовой точки $(s_1, \varphi) \in \gamma_0$ системы (5.1) в исходное положение непостоянно для $a_y = 0$, а следовательно, в силу аналитического продолжения и для всех $a_y \in (0, 1)$, кроме, может быть, некоторого множества, не имеющего предельных точек внутри $[0, 1)$. Тогда, согласно теореме Мозера об инвариантных кривых малых кручений, отображение T имеет инвариантную замкнутую кривую γ, близкую к некоторому уровню γ_0, если k, Λ достаточно велики и $\mu < \mu(\mathrm{pr})$. Траектории системы 1.1), проходящие через кривую $\gamma \subset \Pi_1$, будут заполнять искомый инвариантный тор, разделяющий возмущенные гиперболические решения γ_1, γ_2. Остается отметить, что все точки в пространстве параметров задачи, близкие к выбранным при доказательстве, также обладают необходимым свойством.

Предположим, что некоторые полости, содержащие жидкость, неодносвязны. Если теперь вместо потенциального движения жидкости рассматривать близкое к нему непотенциальное безвихревое, то в уравнениях Эйлера — Пуассона появятся малые гироскопические члены [8]. В этом случае теорема 6 останется в силе.

6. Трансверсальные гомоклинические решения и квазислучайные движения в динамике тяжелого твердого тела. Известно, что наличие трансверсально пересекающихся сепаратрис приводит при довольно общих предположениях к существованию квазислучайных движений (теорема В. М. Алексеева [12, 13]). В частности, как отметил С. Л. Зиглин, в возмущенной задаче Эйлера — Пуансо будут присутствовать квазислучайные движения, если расщепляющиеся сепаратрисы трансверсально пересекаются. Это выполнено в случае, когда все функции $J_i(\varphi)$ знакопеременны. Предполагая обратное и отбрасывая случай Гесса — Аппельрота, можно прийти к модельной задаче из п. 1, где гиперболические периодические решения $x = x_1(\varphi)$, $x = x_3(\varphi)$ совпадают и

$$J_1(\varphi) = c + \alpha_1 \cos\varphi + \beta_1 \sin\varphi, \quad -J_2(\varphi) = c + \alpha_2 \cos\varphi + \beta_2 \sin\varphi \tag{6.1}$$

причем $J_1(\varphi) \geqslant 0$ для всех φ, а предположение о непересечении сепаратрис Γ_2', Γ_2'' при малых $\mu > 0$ отброшено (если $\min_\varphi J_1(\varphi) = 0$, то сепаратрисы Γ_1', Γ_1'' также могут пересекаться, но этот эффект не улавливается в первом порядке теории возмущений). Согласно замечанию из п. 3, пересечение сепаратрис Γ_k'' состоит по крайней мере из двух гомоклинических решений. Оказывается, в пространстве

$$G = \{(c, \Lambda, l_1, l_2) \in \mathbf{R}^4\colon c^2 \geqslant l_1 > 0,\ l_2 > 0,\ \Lambda > 0\}$$

существует замкнутое множество M_0, не содержащее внутренних точек и удовлетворяющее следующему условию: если

$$(c, \Lambda, l_1, l_2) \in G \setminus M_0$$
$$l_1 = \alpha_1^2 + \beta_1^2, \quad l_2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2$$

то для любого достаточно малого $\mu > 0$ сепаратрисы Γ_k'' имеют по крайней мере одно трансверсальное пересечение (гомоклиническое решение). Учитывая вид выражений для $J_i(\varphi)$ [1] и применяя теорему В. М. Алексеева, придем к сформулированному результату.

Теорема 7. В пространстве параметров pr возмущенной задачи Эйлера — Пуансо существует замкнутое, не содержащее внутренних точек множество M, такое, что для $\mathrm{pr} \notin M$ и $\mu < \mu(\mathrm{pr})$ в задаче имеются квазислучайные решения, обусловленные наличием трансверсального пересечения сепаратрис. Меры множеств M_0, M равны нулю.

Идея доказательства основана, во-первых, на том факте, что вблизи Γ_2 сепаратрисы Γ_1'', Γ_2'' — регулярные аналитические поверхности, которые как поверхности, заданные в пространстве

$$\mathbf{R}^1\{s = \Lambda\mu^{-1}\omega\} \times \{\varphi_2 \in (-C_6, C_6)\} \times S^1\{\varphi\} \tag{6.2}$$

$O(\mu \ln \mu)$-близки в метрике C^ω к поверхностям

$$s = J_1(\psi_1), \quad \psi_2 = \psi_1 - t - \Lambda^{-1} \ln J_1(\psi_1) \tag{6.3}$$
$$s = -J_2(\psi_2); \quad \psi_2 = \varphi - \varphi_2$$

и, во-вторых, на следующем уточнении замечания из п. 3: сепаратрисы Γ_k'' всегда имеют касание четного порядка хотя бы на двух различных гомоклинических решениях. Предполагая, что для сколь угодно малых $\mu > 0$ Γ_k'' могут иметь касание выше первого порядка, и используя предельный переход $\mu \to 0$, можно найти, что из условий $(c, \Lambda, l_1, l_2) \in M_0$ и $l_1 < c^2$ следует существование α_i, β_i таких, что $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = l_i$ и

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_2 = (u - \beta_1)^{-1} u\beta_1 \tag{6.4}$$

$$\beta_1 [\alpha\beta_1^2 - 3u\alpha\beta_1 + 2\alpha u^2 + \Lambda u (c\alpha + l_1)] = 0 \tag{6.5}$$

где $u = \Lambda(c + \alpha) \neq 0$. Из (6.4), (6.5) вытекает, что каждому набору (Λ, c, l_1) соответствует не более семи значений l_2, таких, что $(c, \Lambda, l_1, l_2) \in M_0$. Множество M_0 является подмножеством корней некоторого многочлена.

7. Бифуркации рождения и исчезновения гомоклинических и периодических решений в динамике твердого тела. *Теорема 8.* Зафиксируем $i = 1, 2, 3, 4$; $j = (i+1) \bmod 4$. Существует область S_5 в пространстве параметров возмущенной задачи Эйлера — Пуансо, такая, что для $\mathrm{pr} \in S_5$ и $\mu > 0$

1) при $\mu \to 0$ наблюдается бесконечное число бифуркаций рождения и исчезновения всех гомоклинических решений, проходящих один раз вблизи двух невозмущенных сепаратрис x_i^*, x_j^*;

2) найдется постоянная C_7, такая, что при $\mu \to 0$ наблюдается бесконечное число бифуркаций рождения и исчезновения всех периодических решений γ_N приведенной системы (1.1), которые за период $2\pi N > C_7 - 2\Lambda^{-1} \ln \mu$ один раз проходят вблизи двух невозмущенных сепаратрис x_i^*, x_j^*. При этом каждое такое гомоклиническое или периодическое решение существует до тех пор, пока $\ln \mu$ лежит в некотором интервале, длина которого меньше конечной величины C_8, зависящей от pr;

3) область S_5 можно выбрать так, что при $\mu > 0$, $\mu \to 0$ количества всех гомоклинических и периодических решений, рассматриваемых в пунктах 1), 2), будут бесконечно много раз принимать два различных положительных значения.▌

Схема доказательства. Достаточно рассмотреть задачу, изученную в п. 6. Зафиксируем $\Lambda > 0$, $c > 0$ и выберем числа α, $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_2^\circ \neq 0$ такие, что $l_1 = \alpha^2 + \beta_1^2 < c^2$, причем имеют место равенства (6.4), а равенство (6.5) не соблюдается. Найдем $l_2 = \alpha^2 + \beta_2^2$. Пусть теперь произвольные числа α_i, β_i, входящие в выражения (6.1) для функций $J_i(\varphi)$, удовлетворяют условиям $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = l_i$, где l_i — вычисленные ранее величины. В этом случае при некоторых значениях $\psi_1 = \psi_1^\circ$, $\psi_2 = \psi_2^\circ$, $t = t_0$ имеем

$$\begin{gathered} J_1(\psi_1) = -J_2(\psi_2) = c + \alpha \\ dJ_1(\psi_1)/d\psi_2 = -dJ_2(\psi_2)/d\psi_2 = -\beta_2^\circ \neq 0 \\ d^2J_1(\psi_1)/d\psi_2^2 \neq -d^2J_2(\psi_2)/d\psi_2^2 \\ (\psi_2 = \psi_1 - t - \Lambda^{-1} \ln J_1(\psi_1)) \end{gathered} \tag{7.1}$$

Выполнение условий (7.1) достаточно для того, чтобы $\mathrm{pr} \in S_5$. Если теперь немного изменим величины α_i, β_i, то, используя теорему о неявной функции, можно установить, что условия (7.1) опять будут выполняться для некоторых значений ψ_1, ψ_2, t, близких соответственно к ψ_1°, ψ_2°, t_0. Следовательно, множество S_5 можно выбрать в виде целой области.

Пусть ξ', η', φ — нормальные координаты вблизи решения $x = x_1(\varphi) = x_3(\varphi)$, $J' = \mu^{-1}\xi'\eta'$. С координатой ξ' в области V_1 свяжем фазу φ_2' по формуле вида (1.5), а с координатой η' в области V_2 — фазу φ_1' по формуле вида (1.4).

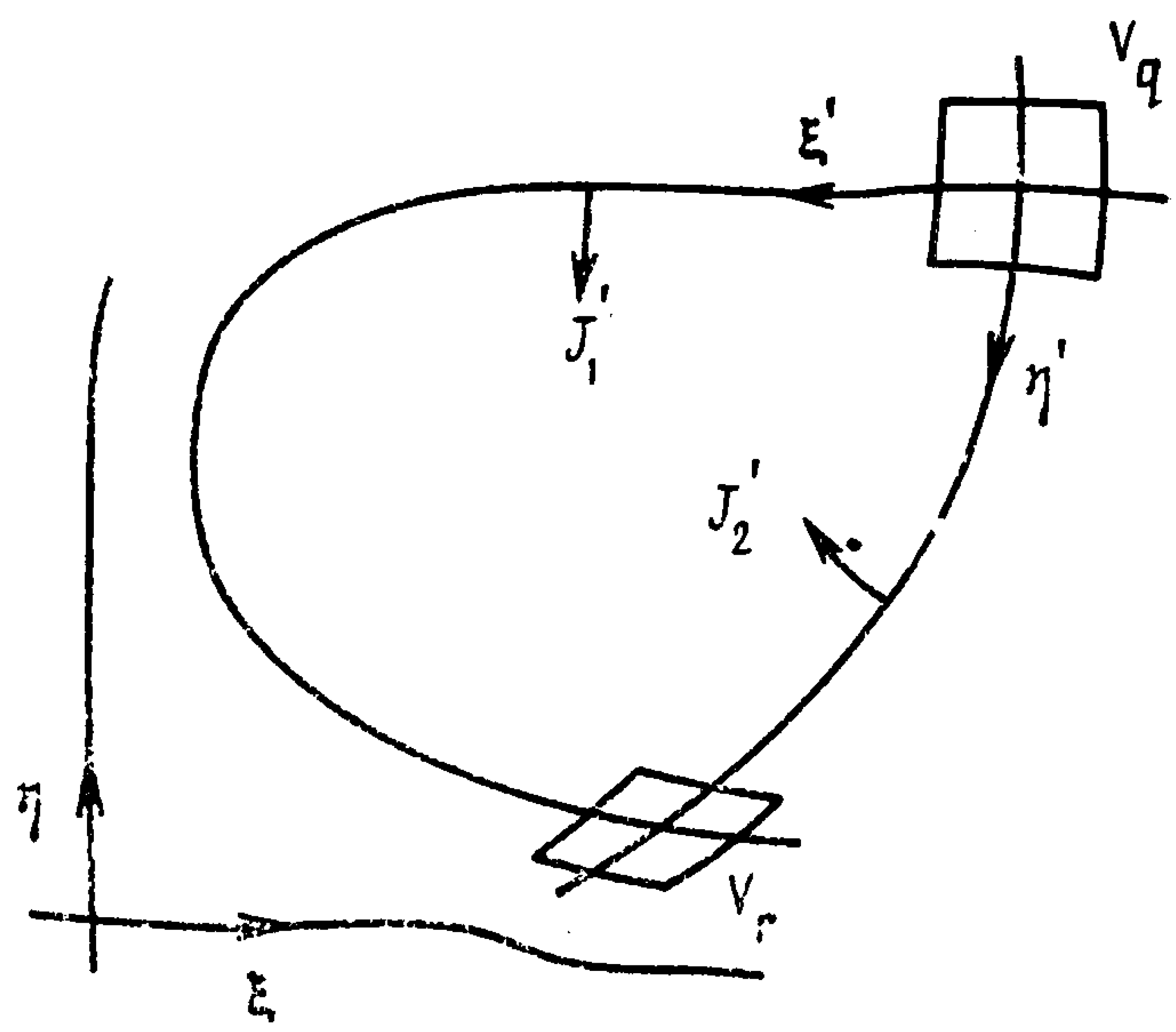
Доказательство достаточности условий (7.1) основано, во-первых, на том факте, что при прохождении значений μ, которым соответствует $t = t_0 \bmod 2\pi$, происходит бифуркация рождения или исчезновения двух линий трансверсального пересечения поверхностей (6.3), во-вторых, на $O(\mu \ln \mu)$-близости Γ_1'', Γ_2'' к поверхностям (6.3) в пространстве (6.2), в-третьих, на том, что решение γ_N лежит в области $0 < J' < C_9$, где $C_9 = C_9(C_7) \to 0$, когда $C_7 \to \infty$, и, в-четвертых, на следующем утверждении.

Лемма. Пусть при некотором значении $t = t_0$ заданные на $\mathbb{R}^1\{s\} \times S^1\{\psi_2\}$ линии (6.3) имеют трансверсальное пересечение. Тогда при достаточно малых $\mu > 0$, которым соответствует $t = t_0 \bmod 2\pi$, и достаточно большом C_7 будут существовать искомые периодические решения γ_N, близкие к соответствующему трансверсальному гомоклиническому решению.

Удобно перейти к рассмотрению отображения последования для системы (1.1), заданного на плоскости $\varphi = \mathrm{const}$. Пусть $q = x_1(\varphi)$, r — лежащая в V_2 точка трансверсального пересечения линий, высекаемых сепаратрисами Γ_k'' на плоскости $\varphi = \mathrm{const}$. Существование решений γ_N гарантируется методом символической динамики [12—14]. Согласно [13, 14], для этого необходимо выбрать окрестности V_q, V_r точек q, r, обладающие некоторыми свойствами (иначе говоря, построить подходящую маршрутную схему [14]). В окрестности точки r заданы координаты $J_2' = J'$, φ_2', а также координаты $J_1' = J'$, φ_1', получаемые продолжением вдоль сепаратрисы Γ_1''. Оказывается, в качестве V_q, V_r можно выбрать криволинейные параллелограммы, заданные соответственно условиями $|\xi'| < \sqrt{\mu}\rho$, $|\eta'| < \sqrt{\mu}\rho$ и $|J_1'| < C_{10}$, $|J_2'| < C_{10}$, где $|\ln \rho - C_{11}| < \pi\Lambda$ при малых $\mu > 0$ (фиг. 4).

Описанный здесь метод построения маршрутной схемы [13, 14], основанный на использовании нормальных координат, применим всегда, когда наличие трансверсально пересекающихся сепаратрис следует из рассмотрения первого порядка теории возмущений (см. примеры в [6]).

Доказательство п. 2) теоремы по существу опирается на тот факт, что каждое периодическое решение будет проходить вблизи некоторого трансверсального гомоклинического решения, а поэтому рождается и разрушается вместе с ним. Отметим, что было численно обнаружено [15] родственное явление рождения периодических решений при образовании трансверсальных гетероклинических решений.



Фиг. 4

Чтобы доказать п. 3) теоремы, достаточно установить, что область S_5 можно сузить так, что для любого $t \in S^1$ поверхности (6.3) касаются не более чем по одной линии $s = \text{const}$, $\psi_2 = \text{const}$, причем касание будет именно первого порядка, а соответствующая касательная плоскость непараллельна оси ψ_2 (см. условия (7.1)). Можно показать, что эти условия выполнены, если в качестве α, β_1 были выбраны числа $\alpha = \sqrt{l_1}A$, $\beta_1 = \sqrt{l_1}B$, где $A^2 + B^2 = 1$, $B \neq 0$, причем B, l_1 достаточно малы ($|B| < B_0$, $l_1 < l_1(B)$). При этом поверхности (6.3) касаются только при двух различных значениях $t \in S^1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Довбыш С. А.* Пересечение асимптотических поверхностей возмущенной задачи Эйлера — Пуансо // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 363—370.
2. *Зиглин С. Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. Моск. мат. о-ва. 1980. Т. 41. С. 287—303.
3. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей // М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 343 с.
4. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика // М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 500 с.
5. *Пуанкаре А.* Избр. тр. Т. 1. Новые методы небесной механики // М.: Наука, 1972. 772 с.
6. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3—67.
7. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 392 с.
8. *Жуковский Н. Е.* О движении тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью // Избр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 31—152.
9. *Харламова Е. И.* Один частный случай интегрируемости уравнения Эйлера — Пуассона // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125. Вып. 5. С. 996—997.
10. *Ламб Г.* Гидродинамика // М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
11. *Нейштадт А. И.* О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 197—204.
12. *Алексеев В. М.* Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. Вып. 4. С. 161—176.
13. *Алексеев В. М.* Квазислучайные колебания и качественные вопросы небесной механики // Лекции 9-й Летней мат. школы, Кацивели, 1971. Киев: Наук. думка, 1976. С. 212—341.
14. *Алексеев В. М.* Квазислучайные динамические системы. I. Квазислучайные диффеоморфизмы // Мат. сб. 1968. Т. 76. Вып. 1. С. 72—134.
15. *Danby J. M. A.* The evolution of periodic orbits close to heteroclinic points // Celest. Mech. 1984. V. 33. № 3. P. 261—270.

Москва

Поступила в редакцию 11.VII.1988