Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 2, 1989

УДК 531.36:534.1

Н. В. Баничук, А. С. Братусь, А. Д. Мышкис

ОБ ЭФФЕКТАХ СТАБИЛИЗАЦИИ И ДЕСТАБИЛИЗАЦИИ В НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

В развитие полученных ранее результатов [1—6] исследуется состояние равновесия линейной автономной неконсервативной механической системы при ее возмущении сколь угодно малыми диссипативными силами. Возмущения, вносимые диссипативными силами, делятся на дефектные и идеальные в зависимости от того, происходит или нет падение критического параметра. Исследуется структура диссипативных операторов, отвечающих обоим случаям. Устанавливаются необходимые условия идеальности и дефектности возмущений, реализуемых малыми силами, линейно зависящими от скоростей системы. Изучается структура матриц, определяющих идеальные возмущения, выводится формула, позволяющая вычислять величину падения критического параметра устойчивости, называемую дефектом возмущения. Рассматриваются примеры.

1. Постановка задачи. Пусть невозмущенная механическая система описывается системой дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot\cdot} + A(p)x = 0 \tag{1.1}$$

где $x = x(t)$ — вектор-функция размерности $n \geqslant 2$, A — вещественная матрица, аналитически зависящая от вещественного параметра p. Тогда квадраты частот и амплитуды нормальных колебаний $x = ue^{i\omega t}$ являются собственными значениями и собственными векторами в задаче

$$A(p)u = \omega^2 u \tag{1.2}$$

Сделаем дополнительные предположения.

1°. Существует такая действительная величина p_0, что собственные значения $\omega_1^2(p)$ и $\omega_2^2(p)$ при $p < p_0$ положительные и простые; при каждом $p > p_0$ по крайней мере одно из них отрицательное или невещественное; при $p = p_0$ система (1.2) имеет двукратное собственное значение $\omega_1^2(p_0) = \omega_2^2(p_0) = \tau_1^2 > 0$ и ему отвечает единственный собственный вектор задачи (1.2) u_1^0.

2°. Все остальные собственные значения $\omega_3^2(p), \omega_4^2(p), \ldots, \omega_n^2(p)$ задачи (1.2) при $p \leqslant p_0$ вещественные, простые и положительные:

$$\omega_j^2 = \tau_j^2 > 0 \quad (j = 3, 4, \ldots, n).$$

Из предположения 1° следует, что матрица $A(p_0)$ — несимметрическая.

Отметим, что для несимметрических матриц наличие единственного собственного вектора, отвечающего кратному собственному значению, типично и наблюдается в реальных механических системах. Из предположений 1° и 2° следует, что при переходе через значение $p = p_0$ система (1.1) из (неасимптотически) устойчивой превращается в неустойчивую.]

Рассмотрим возмущенную систему

$$x^{\cdot\cdot} + \varepsilon B(p)x^{\cdot} + A(p)x = 0 \tag{1.3}$$

где $B(p)$ — вещественная матрица, элементы которой — аналитические функции p, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Появление члена $\varepsilon B(p)x^{\cdot}$ обусловлено учетом малого демпфирования. Нормальные колебания для системы (1.3) удовлетворяют соотношению

$$A(p)u + i\varepsilon\omega B(p)u = \omega^2 u \tag{1.4}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ критическим значением параметра p назовем величину p_ε, являющуюся нижней гранью тех значений параметра p, для которых хотя бы одно собственное значение задачи (1.4) имеет отрицательную мнимую часть (если таких p нет, то полагаем $p_\varepsilon = -\infty$). Здесь критичность понимается в том смысле, что при $p < p_\varepsilon$ система (1.3) устойчива (во всяком случае, если все $\omega_{j,\varepsilon}$ простые), тогда как при всех достаточно малых значениях разности $p - p_\varepsilon > 0$ она неустойчива. Множество точек $(\varepsilon, p_\varepsilon)$ в плоскости εp задает некоторую кривую, отделяющую область устойчивости системы (1.3) от области неустойчивости. Далее будем называть ее критической кривой. В силу предположений 1° и 2° значение p_0, введенное выше, служит критическим значением p_ε при $\varepsilon = 0$.

Обозначим p_d нижний предел величин p_ε при $\varepsilon \to +0$. Из аналитичности всех рассматриваемых функций следует, что этот предел существует.

Известно [7], что равновесие, устойчивое при потенциальных силах, становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией. Для неконсервативных систем данное свойство не имеет места. Здесь малое демпфирование может приводить к дестабилизирующему эффекту [1—6]. Известно, что для рассматриваемых в работе систем справедливо неравенство $p_d \leqslant p_0$.

Значение $d_A(B) = p_0 - p_d$ назовем дефектом (дестабилизации) матрицы B по отношению к матрице A. Если $d_A(B) = 0$, то матрицу B назовем идеальной по отношению к матрице A, а соответствующие возмущения системы (1.1) — идеальными; матрицы, для которых $d_A(B) > 0$, будем называть дефектными, а соответствующие возмущения системы (1.1) — дестабилизирующими. Ранее было показано, что $p_d \leqslant p_0$ [2,4—6]. Величина дефекта характеризует дестабилизирующее влияние на систему (1.1) члена $\varepsilon B(p)\dot{x}(t)$ при малом $\varepsilon > 0$.

2. Уравнение критической линии. Рассмотрим характеристическое уравнение для системы (1.4) (I — единичная матрица):

$$\Delta = \det(A(p) + i\varepsilon\omega B(p) - \omega^2 I) = 0 \tag{2.1}$$

Представляют интерес те значения ε, p, при которых это уравнение имеет по крайней мере одно вещественное решение. Так как все величины, участвующие в характеристическом уравнении (2.1), кроме $i\varepsilon\omega$, вещественны, то справедливо представление

$$\Delta = P(\omega^2, \varepsilon\omega, p) + i\varepsilon\omega Q(\omega^2, \varepsilon\omega, p)$$

Здесь $P(z, y, p)$ ($Q(z, y, p)$) — многочлен по z и y суммарной степени n (соответственно $n-1$), четной степени по y, с коэффициентами, аналитически зависящими от p. Если при некоторых $\varepsilon > 0$ и p уравнение (2.1) имеет по крайней мере одно вещественное решение ω, то, так как $\omega \neq 0$, для этих ε, p имеем $P(\omega^2, \varepsilon\omega, p) = 0$, $Q(\omega^2, \varepsilon\omega, p) = 0$. Отсюда можно исключить ω, составив, например, результант левых частей [8, с. 187], рассматриваемых как многочлен от ω^2. Важно отметить, что поскольку P — вещественная часть детерминанта, зависящего от $i\varepsilon$, то P является многочленом четных степеней по ε. Аналогичное соображение приводит к такому же выводу относительно многочлена Q. В итоге получаем уравнение вида

$$R(\varepsilon^2,\ p) = 0 \tag{2.2}$$

где $R(y, p)$ — многочлен по y с коэффициентами, аналитически зависящими от p. На каждой из линий, задаваемых уравнением (2.2), характеристическое уравнение (2.1) имеет вещественное решение. Из определения критического значения p_ε ясно, что $R(\varepsilon^2, p_\varepsilon) = 0$.

Назовем возмущение системы (1.1) членами $\varepsilon Bx^{\cdot}$ в виде (1.3) регулярным, если для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ множество решений уравнения (2.2), отвечающих вещественным значениям ω, ограниченно в полосе $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и для каждого решения уравнения $R(0, p_0^*) = 0$ выполнено неравенство $R_p'(0,\ p_0^*) \neq 0$.

Далее будем полагать возмущения регулярными. Для критической линии имеем $R(0, p_d) = 0$, $R_p'(0, p_d) \neq 0$ (по определению p_d — нижний предел значений p_ε при $\varepsilon \to +0$). В силу теоремы о неявной функции в указанной полосе при достаточно малом ε_0 критическая линия задается уравнением вида

$$p_\varepsilon = p_d + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^4 p_4 + \ldots \tag{2.3}$$

с аналитической правой частью. Величины p_d, p_2, p_4 не зависят от ε, в частности $p_2 = -R_y'(0,\ p_d)/R_p'(0,\ p_d)$. Вдоль критической линии решения уравнения (2.1) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Im} \omega_i(\varepsilon, p) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{2.4}$$

Из теоремы о непрерывной зависимости корней алгебраических уравнений следует, что «левая» граница области устойчивости системы (1.3) целиком принадлежит одному из интервалов устойчивости системы (1.1). Поэтому для каждой критической линии значение p_d находится внутри или на границе одного из таких интервалов.

Отметим также, что в силу теоремы о неявной функции и непрерывности корней алгебраического уравнения от его коэффициентов критическая линия непрерывно зависит от элементов матриц A и B. Таким образом, в указанном смысле она обладает свойством устойчивости.

Уравнение (2.2) задает не только критическую линию, но совокупность всех линий, на которых решение (2.2) вещественно. Совокупность этих линий (D-линии) образует «D-разбиение» полосы $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ плоскости εp на области, внутри каждой из которых степень неустойчивости системы (1.3) (т. е. число значений ω_j, для которых $\operatorname{Im} \omega_j < 0$) остается постоянной: если это число равно нулю, то система устойчива. Однако в дальнейшем будем рассматривать лишь критическую линию, разделяющую области устойчивости и неустойчивости.

3. Разложения в ряды. Пусть $p_d = p_0$. Из предположений 1°, 2° и регулярности возмущения следует, что на критической кривой, выходящей из точки p_0, справедливы следующие разложения по степеням $\varepsilon^{1/2}$ для величин квадратов первых двух частот и соответствующих мод [9]:

$$\omega_{1,\varepsilon}^2 = \tau_1^2 + \varepsilon^{1/2}\mu_{11} + \varepsilon\mu_{12} + \ldots, u_1^\varepsilon = u_1^0 + \varepsilon^{1/2}u_1^1 + \varepsilon u_1^2 + \ldots \tag{3.1}$$

Здесь u_1^0 — единственный собственный вектор задачи (1.2), отвечающий при $p = p_0$ двукратному собственному значению $\omega_1^2(p_0) = \omega_2^2(p_0) = \tau_1^2$.

Остальные возмущенные квадраты частот и моды могут быть представлены в виде разложения по степеням ε:

$$\omega_{j,\varepsilon}^2 = \tau_j^2 + \varepsilon\mu_{j1} + \varepsilon^2\mu_{j2} + \ldots, \quad u_j^\varepsilon = u_j^0 + \varepsilon u_j^1 + \varepsilon^2 u_j^2 + \ldots; \quad j = 3, 4, \ldots, n \tag{3.2}$$

где u_j^0 — собственные векторы задачи (1.2), отвечающие при $p = p_0$ собственным значениям $\omega_j^2(p_0) = \tau_j^2$ ($j = 3, 4, \ldots, n$). Не умаляя общности, можно считать, что собственные векторы нормированы следующим образом:

$$(u_j^\varepsilon, u_j^0) = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{3.3}$$

Здесь и далее круглые скобки означают скалярное произведение вещественных векторов.

Из (3.1) и (3.2) получаем разложения для величин возмущенных частот

$$\omega_{j,\varepsilon} = \pm\tau_j \pm \frac{\varepsilon^\alpha}{2\tau_j}\mu_{j1} \pm \frac{\varepsilon^{2\alpha}}{2\tau_j}\left(\mu_{j2} - \frac{\mu_{j1}^2}{4\tau_j}\right) + \ldots$$
$$\alpha = {}^1/_2,\ j = 1;\ \alpha = 1,\ j = 3, 4, \ldots, n;\ \tau_j = \sqrt{\omega_{j,0}^2} > 0 \tag{3.4}$$

верхний знак соответствует одной ветви функции, а нижний — другой. Величины μ_{jk} определяют добавки к исходным невозмущенным собственным значениям ω_j^2 и подлежат определению.

Разложим коэффициенты уравнения (1.4) по степеням p и воспользуемся представлением (2.3) $p_d = p_0$. Собирая члены при одинаковых степенях ε, получим уравнения для определения величины μ_{11} и векторов u_1^1, u_1^2

$$L_0u_1^0 = 0, \qquad L_0u_1^1 = \mu_{11}u_1^0$$
$$L_0u_1^2 = \mu_{11}u_1^1 + \mu_{12}u_1^0 \mp i\tau_1B_0u_1^0 \tag{3.5}$$
$$(L_0 = A(p_0) - \tau_1^2I,\ A_0 = A(p_0),\ B_0 = B(p_0))$$

Для простых собственных значений имеем

$$L_0u_j^0 = 0, \quad L_0u_j^1 = \mu_{j1}u_1^0 \mp i\tau_jB_0u_j^0; \quad j = 3, 4, \ldots n \tag{3.6}$$

Равенства (3.5) и (3.6) получены с учетом того, что в (2.3) $p_d = p_0$, т. е. при условии, что возмущение, реализуемое матрицей B, идеальное. Если $p_d < p_0$, т. е. возмущение дефектное, то в силу сделанных предположений значению p_d соответствуют лишь простые собственные значения. Поэтому разложения рассматриваемых величин по степеням ε будут иметь вид (3.2), а соответствующие уравнения для элементов этих разложений — (3.6). В этих соотношениях значение p_0 надо заменить на p_d.

4. Необходимое условие идеальности возмущения. *Утверждение 1.* Если матрица B реализует идеальное возмущение системы (1.1) в виде (1.3), то

$$(B_0u_1^0, v_1^0) = 0 \tag{4.1}$$

где u_1^0 — собственный вектор задачи (1.2), отвечающий двукратному собственному значению $\omega_1^2(p_0) = \omega_2^2(p_0) = \tau_1^2 \neq 0$, а v_1^0 — собственный вектор сопряженной задачи

$$A_0^Tv_1^0 = \tau_1^2v_1^0 \quad (A_0^T = A^T(p_0)) \tag{4.2}$$

Доказательство. Из предположения 1° следует, что

$$(u_1^0, v_1^0) = 0 \tag{4.3}$$

В самом деле, это получается, если равенство $A_0w = \tau_1^2w + u_1^0$, связывающее собственный вектор u_1^0 с присоединенным w, скалярно умножить на v_1^0 и воспользоваться равенством $(A_0w, v_1^0) = (w, A_0^Tv_1^0)$.

Рассмотрим второе уравнение в (3.5). Покажем, что оно разрешимо относительно u_1^1. Действительно, в силу (4.3) альтернатива Фредгольма для этого уравнения выполняется. Существует вещественная матрица $G(p_0) = G_0$, такая, что

$$u_1^1 = \mu_{11} G_0 u_1^0 \tag{4.4}$$

Матрица G_0 обратна к матрице $A_0 - \tau_1^2 I$ на подпространстве векторов, удовлетворяющих условию $(u, u_1^0) = 0$. Последнее равенство для вектора u_1^1 выполнено в силу условия нормировки (3.3).

Условие разрешимости третьего уравнения (3.5) при учете (4.4) дает равенство

$$\mu_{11}^2 (G_0 u_1^0, v_1^0) = \pm i\tau_1 (B_0 u_1^0, v_1^0) \quad (\tau_1 \neq 0) \tag{4.5}$$

Из вещественности скалярных произведений $(G_0 u_1^0, v_1^0)$ и $(B_0 u_1^0, v_1^0)$ следует, что величина μ_{11} (коэффициент перед $\varepsilon^{1/2}$ в разложении квадрата частоты $\omega_{1,\varepsilon}^2$) будет вещественной, тогда и только тогда, когда выполняется (4.1).

5. Асимптотика критической кривой при идеальном возмущении. Пусть $p^1(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon^2 p_2^1 + \varepsilon^4 p_4^1 + \ldots$ — некоторая кривая в плоскости εp вида (2.3) с произвольными коэффициентами p_2^1, p_4^1, на которой система (1.3) устойчива. Из (4.5), (4.1) следует, что вдоль этой кривой $\mu_{11} = 0$, а из (4.4) имеем $u_1^1 = 0$. Далее полагаем, что $(G_0 u_1^0, v_1^0) \neq 0$. Третье уравнение в (3.5) разрешимо, поскольку вектор v_1^0 ортогонален его правой части. Тогда

$$u_1^2 = \mu_{12} G_0 u_1^0 \mp i\tau_1 G_0 B_0 u_1^0 \tag{5.1}$$

Аналогично уравнениям в (3.5) запишем уравнение, получающееся при помощи членов порядка ε^2:

$$L_0 u_1^4 = \mu_{12} u_1^2 + \mu_{14} u_1^0 - p_2^1 A_0^1 u_1^0 \mp i\tau_1 B_0 u_1^2 \mp (^1/_2)\, i\tau_1^{-1} B_0 u_1^0$$
$$A_0^1 = (A(p))'_{p=p_0}$$

При учете равенства (5.1) условие разрешимости этого уравнения дает квадратное уравнение относительно величины μ_{12}:

$$\mu_{12}^2 (G_0 u_1^0, v_1^0) \mp i\tau_1 T_1 \mu_{12} - T_2 = 0$$
$$T_1 = (B_0 G_0 u_1^0, v_1^0) + (G_0 B_0 u_1^0, v_1^0), \quad T_2 = \tau_1^2 (B_0 G_0 u_1^0, v_1^0) +$$
$$+ p_2^1 (A_0^1 u_1^0, v_1^0)$$

Из анализа решений этого уравнения следует, что для того, чтобы вдоль кривой $p^1(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $\operatorname{Im} \omega_{1,\varepsilon} > 0$, необходимое для устойчивости системы (1.3), должны быть справедливы условия $T_1 > 0$ (< 0) и $T_2 > 0$ (< 0) при $(G_0 u_1^0, v_1^0) > 0$ (< 0), причем если при $(G_0 u_1^0, v_1^0) > 0$ (< 0) выполняется неравенство $T_2 < 0$ (< 0), то для достаточно малого ε_0 имеем $\operatorname{Im} \omega_{1,\varepsilon} < 0$ в полосе $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Следовательно, при $T_2 = 0$ кривая $p^1(\varepsilon)$ отделяет в этой полосе область, в которой $\operatorname{Im} \omega_{1,\varepsilon} < 0$, от области, в которой $\operatorname{Im} \omega_{1,\varepsilon} > 0$. Условие $T_2 = 0$ при $(A_0^1 u_1^0, v_1^0) \neq 0$ эквивалентно равенству $p_2^1 = -\tau_1^2 (B_0 G_0 B_0 u_1^0, v_1^0)/(A_0^1 u_1^0, v_1^0)$.

Рассмотрим, как будут вести себя вдоль кривой $p^1(\varepsilon)$ другие (простые) частоты $\omega_{j,\varepsilon}$ ($j = 3, 4, \ldots, n$). Для этого используем равенства (3.6). Условие разрешимости второго уравнения в (3.6) дает соотношение $\mu_{j1} (u_j^0, v_j^0) = \pm i\tau_j (B_0 u_j^0, v_j^0)$ ($j = 3, 4, \ldots, n$). Для выполнения в достаточно малой полосе $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ условия $\operatorname{Im} \omega_{j,\varepsilon} > 0$ необходимо, чтобы

$$(B_0 u_j^0, v_j^0)(u_j^0, v_j^0) > 0, \quad j = 3, 4, \ldots, n$$

В итоге получим следующее

Утверждение 2. Пусть выполняется необходимое условие идеальности (4.1), $(A_0^1 u_1^0, v_1^0) \neq 0$, $(G_0 u_1^0, v_1^0) > 0$ (< 0) и справедливы неравенства

$$T_1 = (B_0 G_0 u_1^0, v_1^0) + (G_0 B_0 u_1^0, v_1^0) > 0 \qquad (< 0) \tag{5.2}$$

$$(B_0 u_j^0, v_j^0)(u_j^0, v_j^0) > 0, \qquad j = 3, 4, \ldots, n \tag{5.3}$$

Тогда при достаточно малом ε_0 критическая кривая, выходящая из точки p_0 и отделяющая область асимптотической устойчивости системы (1.3) от области неустойчивости, имеет в полосе $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ представление

$$p_\varepsilon = p_0 - \frac{\tau_1^2 (B_0 G_0 B_0 u_1^0, v_1^0)}{(A_0^1 u_1^0, v_1^0)} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \tag{5.4}$$

Отметим, что в особом случае $(G_0 u_1^0, v_1^0) = 0$ равенство (5.4) формально сохраняется.

6. Структура матриц, реализующих идеальные возмущения. Пусть l_1 и l_2 — некоторые вещественные числа. Рассмотрим множество матриц B_0, для которых $B_0 u_1^0 = l_1 u_1^0$, $B_0^T v_1^0 = l_2 v_1^0$. Равенство (3.1) при этом удовлетворяется, так как выполнено условие (4.3). Для существования в достаточно малой полосе $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ критической кривой, выходящей из точки p_0, достаточно, чтобы удовлетворялись неравенства (5.2), (5.3). Имеем $T_1 = (l_1 + l_2)(G_0 u_1^0, v_1^0)$. Следовательно, требуемое неравенство (5.2) будет выполнено, если соответствующим образом подобрать знак суммы $l_1 + l_2$. При этом число свободных параметров (элементов) матрицы B_0 равно $n^2 - 2n$. Подбирая их соответствующим образом, можно удовлетворить $n - 2$ оставшихся неравенств (5.3) при $n > 2$.

В случае $n = 2$ предположения 1° и 2° п. 1 будут выполнены, если $k_1 k_2 + 1 = 0$, $k_1 k_2 \neq 0$, $k_1 \neq k_2$, где $k_1 = 2a_{12}/(a_{22} - a_{11})$, $k_2 = 2a_{21}/ /(a_{22} - a_{11})$. Здесь a_{ij} коэффициенты матрицы $A(p_0)$ $(i, j = 1, 2)$. В этом случае

$$\lambda_1 = \lambda_2 = (a_{11} + a_{22})/2, \quad u_1^0 = (k_1, 1), \quad v_1^0 = (k_2, 1)$$

Поскольку $(u_1^0, v_1^0) = 0$, то из условия (4.1) следует, что u_1^0, v_1^0 — собственные векторы матриц B_0, B_0^T соответственно. Отсюда приходим к системе уравнений для коэффициентов матрицы B_0:

$$b_{11} k_1 + b_{12} = l_1 k_1, \quad b_{11} k_2 + b_{21} = l_2 k_2, \quad b_{12} k_2 + b_{22} = l_2, \quad b_{21} k_1 + b_{22} = l_1$$

Условие разрешимости этой системы $k_1 k_2 + 1 = 0$ выполнено. Общее решение имеет вид

$$b_{11} = t, \quad b_{12} = k_1 (l_1 - t), \quad b_{21} = k_2 (l_2 - t), \quad b_{22} = l_1 + l_2 - t$$

где t, l_1, l_2 — вещественные числа. Для выполнения неравенства (5.2) в этом случае нужно выбрать знак суммы $l_1 + l_2$ в зависимости от знака скалярного произведения $(G_0 u_1^0, v_1^0)$.

Для построения G_0 достаточно найти решение задачи $(A_0 - \lambda) u = f$ при условии $(f, v_1^0) = 0$, $(u, u_1^0) = 0$. Полагая $u = C v_1^0$, получим, что $C = (f, u_1^0)/(A_0 v_1^0, u_1^0)$. Равенство $u = G_0 f$ примет вид $u = ((f, u_1^0)/(A_0 v_1^0, u_1^0)) v_1^0$. Отсюда следует, что

$$(G_0 u_1^0, v_1^0) = (1 + k_1^2)(1 + k_2^2)(a_{22} - a_{11})/(a_{21} - a_{12})^2$$

Таким образом, если $a_{22} - a_{11} > 0$ (< 0), то сумма $l_1 + l_2$ должна быть положительна (отрицательна).

При $t = (k_1 l_2 - k_1 l_1)/(k_2 - k_1)$ получим общую структуру симметрических матриц, реализующих идеальное возмущение. Асимптотическая формула (5.4) при этом имеет вид

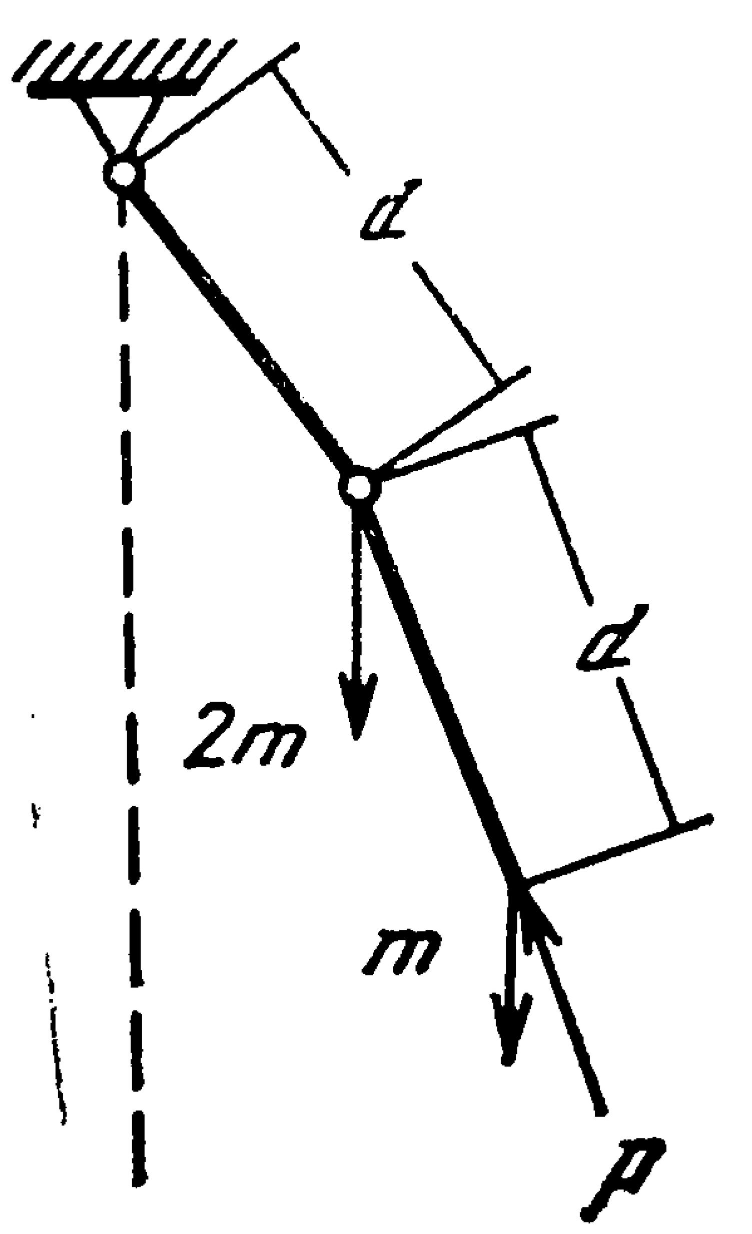
$$p_\varepsilon = p_0 - \frac{\tau_1^2 l_1 l_2 (G_0 u_1^0, v_1^0)}{(A_0^1 u_1^0, v_1^0)} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \tag{6.1}$$

Отметим, что ранее [10, 11] были описаны отдельные классы матриц, реализующих идеальные возмущения.

Пример. Рассмотрим один из вариантов задачи Циглера о действии несущей силы на стержневую систему с двумя степенями свободы [12] (фигура). Уравнение состояния можно привести к виду (1.1), причем матрица $A(p)$ определяется равенством

$$A(p) = \frac{1}{2m^2d^5}\left\|\begin{matrix} 3r-p & p-2r \\ p-5r & 4r-p \end{matrix}\right\|, \quad r = \frac{c}{d} \tag{6.2}$$

При $p_0 = r(7-2\sqrt{2})/2$ собственное значение (1.2) двукратное: $\tau_1^2 = \omega_1^2 = \omega_2^2 = \sqrt{2}\ (\omega_1^2 = 2m^2d^5\lambda)$ и ему соответствует единственный собственный вектор $u_1^0 = (3-2\sqrt{2},\ 1)$. Собственный вектор сопряженной задачи (4.2) имеет вид $v_1^0 = (-(3+2\sqrt{2}),\ 1)$, т. е. $k_2 = -(3+2\sqrt{2})$, $k_1 = 3-2\sqrt{2}$. Для простоты выкладок далее положим $r=1$. Структура идеальных симметрических возмущений, определенных выше, приводит к матрицам вида



$$B_0 = \left\|\begin{matrix} b_- & l_1-l_2 \\ l_1-l_2 & b_+ \end{matrix}\right\|, \quad b_\pm = 3(l_1 \pm l_2) \pm 2\sqrt{2}\,(l_1-l_2)$$

Так как $(A_0^1u_1^0, v_1^0) = -4\sqrt{2}$ и $(G_0u_1^0, v_1^0) = 1/4$, то величина $l_1 + l_2$ должна быть строго больше нуля. Асимптотика критической линии, задаваемой формулой (6.1), представляется в виде

$$p_\varepsilon = (7-2\sqrt{2})/2 + l_1l_2\varepsilon^2/16 + o(\varepsilon^2)$$

7. Необходимое условие дефектности. Вычисление дефекта. *Утверждение 3.* Пусть матрица B реализует дефектное возмущение системы (1.1) Тогда необходимо, чтобы

$$(u_i^0, v_i^0)(B_du_i^0, v_i^0) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7.1}$$

Здесь u_i^0 и v_i^0 — решения задач на собственное значение

$$A_du_i^0 = \omega_i^2u_i^0,\ A_d^Tv_i^0 = \omega_i^2v_i^0,\ A_d = A(p_d),\ B_d = B(p_d)$$

Доказательство утверждения 3 основывается на соображениях, приведенных при выводе неравенства (5.3) утверждения 2, с заменой p_0 на p_d.

Далее полагаем, что для всех точек $p_d < p_0$, для которых выполнено неравенство (7.1), $(u_i^0, v_i^0) \neq 0$. Случай $(u_i^0, v_i^0) = 0$ приводит к условию $(B_0u_i^0, v_i^0) = 0$, рассмотренному ранее.

Следствие 1. Пусть $p^1(\varepsilon) = p_d^1 + \varepsilon^2p_2^1 + \ldots$ — некоторая кривая вида (2.3) в плоскости εp, выходящая из точки p_d^1 на оси p. Если выполнено неравенство (7.1) при $p = p_d^1$ как строгое (противоположное) (7.1), то при достаточно малом ε_0 система (1.3) будет асимптотически устойчива (неустойчива) в полосе $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ вдоль кривой $p^1(\varepsilon)$.

Для заданной матрицы $B(p)$ рассмотрим множество $Q_B(p)$ значений параметра p, такое, что

$$Q_B(p) = \{p : p < p_0,\ (u(p), v(p))(B(p)\,u(p), v(p)) \geqslant 0\} \tag{7.2}$$

где $u(p)$ и $v(p)$ — собственные векторы задач

$$A(p)u(p) = \omega^2(p)\,u(p),\ A^T(p)\,v(p) = \omega^2(p)\,v(p) \tag{7.3}$$
$$(u(p),\ v(p)) \neq 0$$

Пусть $p^*(B)$ — верхняя грань всех значений $p \in Q_B(p)$. Если множество $Q_B(p)$ пусто, то будем считать $p^*(B) = -\infty$.

Утверждение 4. Дефект матрицы $B(p)$ вычисляется по формуле

$$d_A(B) = p_0 - p^*(B) \quad (p_d = p^*(B))$$

Доказательство. Из определения множества $Q_B(p)$ равенствами (7.2) и (7.3) и предыдущего результата следует, что $p_d \in Q_B(p)$. Точка p_d не может быть изолированной точкой множества $Q_B(p)$. Действительно, в этом случае условие (1.7) реализуется лишь в виде равенства, причем в достаточно малой двухсторонней окрестности точки p_d должно выполняться неравенство, противоположное (7.1). Но тогда из следствия 1 вытекает, что кривая (2.3) не отделяет область устойчивости от области неустойчивости, что противоречит ее определению.

Из определения $p^*(B)$ имеем $p_d \leqslant p^*(B)$. Пусть $p_d < p^*(B)$ и $\delta = p^*(B) - p_d > 0$. Так как p_d не является изолированной точкой множества $Q_B(p)$, то найдется такая точка $p_d^1 \in Q_B(p)$, что $p_d < p_d^1 < p^*(B)$, в которой неравенство (7.1) выполнится как строгое. Из следствия 1 имеем, что при достаточно малом ε_0 система (1.3) будет асимптотически устойчива в полосе $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ вдоль кривой $p_\varepsilon^1 = p_d^1 + \varepsilon^2 p_2^1 + \ldots$ Однако так как $p_\varepsilon^1 > p_\varepsilon$ (величина p_ε определена в (2.3)) в достаточно малой полосе $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то это противоречит определению критической кривой p_ε.

Пример. Рассмотрим задачу о действии следящей силы на стержневую систему. Следуя Циглеру [1], предположим, что шарниры системы обладают заданными вязкоупругими свойствами. Это соответствует учету в системе (1.1) с матрицей $A(p)$, заданной в (6.2), членов с $\varepsilon B x^{\cdot}(t)$, где $B = \| b_{ij} \|$, $b_{11} = 3/2$, $b_{12} = -1$, $b_{21} = -5/2$, $b_{22} = 2$. В разд. 6 показано, что $p_0 = 2{,}0857r$ $(r = c/d)$. Непосредственно проверяется, что условие (4.1) не выполняется, поэтому возмущение, реализуемое матрицей B, будет дефектным.

Вычисления при помощи критерия Рауса — Гурвица дают величину $p_d = 1{,}4642$. Вычислим это значение, воспользовавшись результатом утверждения 4. Для простоты выкладок положим $r = 1$. Собственные векторы задач (7.3) имеют вид

$$u_i = (1, z_i/(2-p)), \quad v_i = (1, z_i/(5-p))$$
$$z_i = 2\omega_i^2(p) - p + 3, \quad i = 1, 2 \quad (p \neq 2,\ p \neq 5)$$

Отметим, что $(u_i(p), v_i(p)) > 0$ при $p < 2$. При этих значениях параметра p для выполнения неравенств (7.2) достаточно, чтобы удовлетворялось хотя бы одно неравенство из двух пар неравенств $24 - 7p \geqslant \sqrt{D_2} \mp 4\sqrt{D_1}$, $24 - 7p \leqslant \mp(\sqrt{D_2} + 4\sqrt{D_1})$, где $D_1 = 4p^2 - 28p + 41$, $D_2 = p^2 + 56p - 80$. Область определения этих неравенств (с точностью до четырех знаков) $p \leqslant -37{,}3938$, $1{,}3938 \leqslant p \leqslant 2{,}0857$. Второе из первой пары неравенств (при выборе знака плюс) не выполняется ни при каких p из области определения. Верхняя грань решений оставшихся неравенств равна $1{,}4642$. При $2 < p < 2{,}0857$ имеем $(u_i(p), v_i(p)) < 0$ $(i = 1, 2)$ и неравенства (7.2) не выполняются для таких значений p. В итоге $p_d = p^*(B) = 1{,}4642$, что совпадает с известным ранее значением.

Отметим, что в случае $n = 2$ можно получить общие формулы, исходя из элементов матриц A и B. Действительно, повторяя рассуждения из п. 2, получим, что

$$R(\varepsilon^2, p) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11} + b_{22})^2 - (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12})[(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) + (b_{11} + b_{22})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\varepsilon^2] \tag{7.4}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \frac{1}{4}\{(b_{11} + b_{22}) \pm \delta\Delta^{-1/2}\} \quad (p < p_0) \tag{7.5}$$

$$\delta = 2(a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12}) + (a_{11} - a_{22})(b_{11} - b_{22})$$

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}$$

$$(\omega_{1,2})_{\varepsilon=0} = \pm\sqrt{\lambda_1(p)}, \ (\omega_{3,4})_{\varepsilon=0} = \pm\sqrt{\lambda_2(p)}, \quad 0 < \lambda_1(p) < \lambda_2(p)$$

λ_1 и λ_2 — собственные значения невозмущенной задачи (1.2) при $p_d \leqslant p_0$. В формуле (7.5) верхний знак относится к λ_2, а нижний — к λ_1. Из формулы (7.5) следует, что если при $p < p_0$

$$|\delta| < (b_{11} + b_{22})\Delta^{1/2} \tag{7.6}$$

то для всех (ε, p) $(\varepsilon > 0)$, достаточно близких к $(0, p)$, система (1.3) асимптотически устойчива, если же неравенство (7.6) меняется на противоположное, то неустойчива.

Предположим, что множество решений уравнений $R(\varepsilon^2, p) = 0$ в некоторой полосе $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ ограничено. Тогда, если неравенство (7.6) справедливо для всех $p < p_0$, рассматриваемое возмущение идеально; если же для некоторых $p < p_0$ справедливо противоположное неравенство, то p_d равно верхней грани тех p, для которых (7.6) справедливо (если таких нет, то $p_d = -\infty$). Отметим, что предположение 1° п. 1 означает выполнение следующих соотношений:

$$\begin{gathered}\Delta > 0,\ a_{11} + a_{22} > 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \quad (p < p_0)\\ \Delta = 0,\ a_{12} \neq a_{21} \qquad (p = p_0)\\ \Delta < 0 \qquad (p > p_0)\end{gathered} \tag{7.7}$$

Так как для $p = p_0$ правая часть (7.6) обращается в нуль, то при

$$\delta\,|_{p=p_0} \neq 0 \tag{7.8}$$

рассматриваемое возмущение дефектно. Таким образом, при выполнении предположения 1° дефектность возмущения оказывается типичной. Это же вытекает и из условия (4.1).

Нетрудно проверить, что для любой матрицы A, удовлетворяющей условиям (7.7), можно подобрать симметрическую положительно определенную матрицу B так, чтобы неравенство (7.8) выполнилось. Другими словами, механические системы рассматриваемого типа всегда можно дестабилизировать как угодно малыми диссипативными силами с полной диссипацией. Отметим еще, что вдоль любой критической кривой должно быть

$$\operatorname{sgn}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}) = \operatorname{sgn}(b_{11} + b_{22})$$

Так, в разобранном выше примере условие (7.6) приобретает вид $|14p - 41| < 7(4p^2 - 28p + 41)^{1/2}$. Это неравенство выполняется только при $p < 41/28$; таким образом, $p_d = 41/28 = 1{,}4643$. То же получается из равенства (7.4): $R(\varepsilon^2, p) = 0$, при $p_d = 41/28$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing.-Arch. 1952. B. 20. H. 1. P. 49—56.
2. *Bolotin V. V.*, *Zinzher N. I.* Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces // Intern. J. Solids and Struct. 1969. V. 5. № 9. P. 965—989.
3. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
4. *Андрейчиков И. П.*, *Юдович В. И.* Об устойчивости вязкоупругих стержней // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 2. С. 78—87.
5. *Денисов Г. Г.*, *Новиков В. В.* Об устойчивости упругих систем с малым внутренним трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 41—47.
6. *Милославский А. И.* О дестабилизирующем воздействии малого демпфирования на абстрактные неконсервативные системы // Успехи. мат. наук. 1986. Т. 41. № 1. С. 199—200.
7. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965, 207 с.
8. *Мишина А. П.*, *Проскуряков И. В.* Высшая алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 300 с.
9. *Вишик М. И.*, *Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3—80.
10. *Done G. T. S.* Damping configurations that have a sabilizing influence on nonconservative systems // Intern. J. Solids and Struct. 1973. V. 9. № 2. P. 203—215.
11. *Walker J. A.* A note on stabilizing damping configurations for linear nonconservative systems // Intern. J. Solids and Struct. 1978. V. 9. № 12. P. 1543—1545.
12. *Пановко Я. Г.*, *Сорокин С. В.* О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 135—139.

Москва

Поступила в редакцию
21.IV.1988