Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 2, 1989

УДК 531.36:534.1

С. Б. Куксин

ТЕОРЕМА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К УРАВНЕНИЯМ КАРМАНА

Для колебательных процессов в пространственно-многомерных консервативных системах доказана теорема усреднения типа Крылова — Боголюбова — Митропольского. В качестве примера рассмотрены уравнения Кармана.

1. Постановка задачи. Колебательные процессы в распределенных консервативных системах можно описывать при помощи гамильтоновых уравнений в бесконечномерном фазовом пространстве Z, в котором введена симплектическая структура [1—3]. Как и в конечномерном случае [4], запись уравнений в гамильтоновой форме эквивалентна записи в виде вариационных принципов (для уравнений механики сплошных сред последняя существенно более популярна, см., например, [5]).

Задание симплектической структуры на Z эквивалентно заданию скобки Пуассона $[H_1, H_2]$ функционалов $H_1, H_2 : Z \to \mathbf{R}$ (см. [2—4]). В простейшем случае Z — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot, \cdot\rangle$ и скобка Пуассона равна

$$[H_1, H_2](u) = \langle\nabla H_1(u), J\nabla H_2(u)\rangle, \quad u \in Z \tag{1.1}$$

Здесь J — антисамосопряженный оператор в Z (возможно, неограниченный) и ∇ — градиент относительно скалярного произведения в Z, т. е.

$$H_1(u + \varepsilon v) = H_1(u) + \varepsilon\langle\nabla H_1(u), v\rangle + o(\varepsilon)$$

При такой симплектической структуре функционалу H на Z отвечает следующее гамильтоново уравнение:

$$u^{\cdot} = J\nabla H(u), \quad u = u(t) \in Z \tag{1.2}$$

В большинстве примеров $Z = L_2(\Omega; \mathbf{R}^N)$, где Ω — n-мерная область $(n \geqslant 1)$ и H — функционал вариационного исчисления [1, 2, 5]. Тогда $\nabla H(u) = \delta H/\delta u\,(x)$ — вариационная производная H. Более сложный пример бесконечномерного симплектического пространства приведен ниже в п. 3 в связи с уравнениями Кармана.

Рассмотрим задачу о малых колебаниях в системе (1.2). Для этого выделим из H квадратичный член и сделаем замену $u = \varepsilon z$. Получим для $z(t)$ уравнение с гамильтонианом $H_0(z) = \langle Az, z\rangle/2 + \varepsilon H_\Delta(z, \varepsilon)$, где A — самосопряженный оператор

$$z^{\cdot} = J(Az + \varepsilon\nabla H_\Delta(z, \varepsilon)) \tag{1.3}$$

Предположим, что оператор JA имеет мнимый спектр.

Усредненным решением m-го приближения $(m \geqslant 0)$ уравнения (1.3) называется кривая $z_*(t)$, которая при $0 \leqslant t \leqslant L(\varepsilon)$, где $\varepsilon L(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, отличается от точного решения $z(t)$ на $o(\varepsilon^m)$ [6].

В случае, когда уравнение (1.3) описывает колебания пространственно-одномерных систем, задача его усреднения интенсивно изучалась (см., например, [7, 8] и библиографию этих работ); В. П. Маслов и его ученики усредняли решения уравнений вида (1.2) с быстро осциллирующими начальными условиями [9, 10].

Цель работы — усреднение уравнений (1.3) без предположения пространственной одномерности. Точнее, построение усредненных траекторий (1.3), отвечающих нерезонансным условно-периодическим решениям невозмущенного линейного уравнения

$$\dot{z} = JAz \tag{1.4}$$

(т. е. таким решениям уравнения (1.4), при которых возбуждено конечное число мод). К задаче о поиске решений уравнения (1.3), близких к условно-периодическим решениям (1.4), приводит также изучение колебаний в неавтономных гамильтоновых системах следующего вида:

$$\dot{z} = JAz + \varepsilon J\nabla H_\Delta(z, \omega_1 t, \ldots, \omega_n t) \tag{1.5}$$

$$\omega_j \in \mathbf{R}, \; j = 1, \ldots, n$$

где гамильтониан $H_\Delta(z, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ 2π-периодичен по $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.

Действительно, введем вспомогательные циклические переменные $q_1, \ldots, q_n$, $q = (q_1, \ldots, q_n) \in T^n = \mathbf{R}^n/(2\pi\mathbf{Z}^n)$, и переменные $(I_1, \ldots, I_n) = I \in \mathbf{R}^n$. Система (1.5) эквивалентна автономной гамильтоновой системе с гамильтонианом $I\cdot\omega + \langle Az, z\rangle/2 + \varepsilon H_\Delta(z, q)$ на расширенном фазовом пространстве $T^n \times \mathbf{R}^n \times Z$

$$\dot{q}_j = \omega_j, \; \dot{I}_j = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial q_j}H_\Delta(z, q), \; \dot{z} = J(Az + \varepsilon\nabla_z H(z, q)) \tag{1.6}$$

Система (1.6) в свою очередь эквивалентна некоторой автономной системе вида (1.3) на пространстве $\mathbf{R}^{2n} \times Z$, которая рассматривается в окрестности условно-периодического решения линейной системы (см. ниже уравнения (4.1)).

Предположим, что в Z найдется ортонормированный базис $\{\varphi_j^\pm \mid j = 1, 2, \ldots\}$ со следующими свойствами:

А) $J\varphi_j^\pm = \mp\lambda_{jJ}\varphi_j^\mp, \quad A\varphi_j^\pm = \lambda_{jA}\varphi_j^\mp, \quad \forall j \geqslant 1$

Б) $\lambda_{jA} = K_A j^{d_A} + o(j^{d_A}), \quad \lambda_{jJ} = K_J j^{d_J} + o(j^{d_J}), \quad d_A, d_J \geqslant 0$

В частности, оператор JA имеет чисто мнимый спектр $\{\pm i\lambda_j \mid j \geqslant 1\}$, где $\lambda_l = \lambda_{lA}\lambda_{lJ} = K_0 j^{d_1} + o(j^{d_1})$, $d_1 = d_A + d_J$. Поэтому все решения уравнения (1.4) — почти периодические функции времени, а решения, при которых возбуждено лишь конечное число мод,— условно-периодические.

Например, решения, при которых возбуждено n первых мод, имеют вид

$$z(t) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2I_k}\,(\cos(\lambda_k t + \nu_k)\varphi_k^+ + \sin(\lambda_k t + \nu_k)\varphi_k^-) \tag{1.7}$$

$$\nu_k \in [0, 2\pi), \quad \lambda_k = \lambda_{kA}\lambda_{kJ}, \quad I_k > 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

Траектория (1.7) лежит на n-мерном торе

$$T^n(I) = \{y_1^+\varphi_1^+ + y_1^-\varphi_1^- + \ldots + y_n^-\varphi_n^- \mid y_j^{+2} + y_j^{-2} = 2I_j, \forall j\} \subset Z$$

Оказывается (см. п. 2, теорема 1), что если выполнены некоторые условия нерезонансности и начальное условие u_0 уравнения (1.3) удалено от тора $T^n(I)$ на расстояние порядка ε^a, $0 < a \leqslant 1$, то усредненной траекторией порядка m, где $0 \leqslant m < a$, является кривая вида (1.7). Характеризующий кривую вектор частот $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ заменяется на близкий вектор $\omega^1 \in \mathbf{R}^n$, который находится в результате усреднения по $T^n(I)$ величин, строящихся по возмущению εH_Δ.

В качестве примера системы (1.3) в п. 3 рассматриваются уравнения Кармана, описывающие малые колебания тонкой пластины ([11], гл. 1,

§ 4; [12])

$$u_1^{\cdot\cdot} + a_1\Delta^2 u_1 - \sqrt{\varepsilon}\,[u_1, u_2]' = 0,\ a_2\Delta^2 u_2 + \sqrt{\varepsilon}\,[u_1, u_1]' = 0 \qquad (1.8)$$

$$a_1, a_2 > 0,\ u_1 = u_1(t, x),\ u_2 = u_2(t, x),\ x = (x, x_2)$$

$$[u, v]' = D_1^2 u D_2^2 v + D_2^2 u D_1^2 v - 2D_1 D_2 u D_1 D_2 v,\ D_i = \partial/\partial x_i$$

Здесь $\Delta^2 = \Delta\Delta$ — итерированный Лапласиан (по переменным x).

Система (1.8) приводима к виду (1.3) и из теоремы 1 следует, что если начальные условия $u_1(0)$, $u_1^{\cdot}(0)$ с точностью до ε^a, $0 < a \leqslant 1$, могут быть приближены суммами n собственных функций оператора Δ^2, то решение существует и единственно при $0 \leqslant t \leqslant L(\varepsilon)$, где $L(\varepsilon) \gg \varepsilon^{-1}$. Действие нелинейного добавка на решение «в главном» сводится к изменению собственных частот линейной системы на величины порядка ε при сохранении собственных функций, если только исходный набор частот являлся нерезонансным.

2. Формулировка теоремы. Через C, C_1, C_2, ... ниже обозначаются различные положительные постоянные, не зависящие от ε, а $U_a(B)$ — открытый шар радиуса $a > 0$ с центром в нуле гильбертова пространства B.

Пусть Y — замыкание в Z линейной оболочки векторов $\{\varphi_k^{\pm} \mid k \geqslant n + 1\}$. Для $z = \sum z_k^{\pm}\varphi_k^{\pm} \in Z$ положим

$$\| z \|_s^2 = \sum_{j=1}^{n} | z_j^{\pm} |^2 j^{2s}, \quad s \in \mathbf{R} \qquad (2.1)$$

$$y(z) = y_1^{+}\varphi_{n+1}^{+} + y_1^{-}\varphi_{n+1}^{-} + y_2^{+}\varphi_{n+2}^{+} + \ldots, \quad y_k^{\pm} = z_{n+k}^{\pm}$$

и в плоскостях с координатами (z_l^+, z_l^-), $l = 1, \ldots, n$, введем полярные координаты ξ_l, q_l

$$\xi_l = (z_l^{+2} + z_l^{-2})/2 - I_l, \quad q_l = \operatorname{Arg}(z_l^+ + iz_l^-), \quad l = 1, \ldots, n$$

В окрестности тора $T^n(I)$ в Z введем координаты (q, ξ, y), причем

$$q \in T^n = \mathbf{R}^n/(2\pi\mathbf{Z}^n), \quad \xi \in O_\delta(\mathbf{R}^n), \quad y \in O_\delta(Y), \quad \delta > 0$$

В координатах (q, ξ, y) решения (1.7) имеют простой вид: $q_k = \nu_k + t\lambda_k$, $\xi = \mathrm{const}$, $y = 0$. Пусть Z_s — пространство элементов вида $z = \sum z_k^{\pm}\varphi_k^{\pm}$, для которых конечна норма $\| z \|_s$ (см. (2.1)), и $Y_s = Y \cap Z_s$ (в частности, $Z_0 = Z$, $Y_0 = Y$). В силу условия Б) операторы J и A при любом $t \in \mathbf{R}$ определяют непрерывные отображения $J : Z_{t+d_J} \to Z_t$, $A : Z_{t+d_A} \to Z_t$.

Определение. Пусть $M \geqslant 1$. Вектор $\eta \in \mathbf{R}^n$ называется M-нерезонансным, если найдется $\rho > 0$, такое, что

$$| \eta \cdot s | \geqslant \rho | s |^{-n}, \quad \forall s \in \mathbf{Z}^n, \quad s \neq 0 \qquad (2.2)$$

$$| \eta \cdot s \pm \lambda_k | \geqslant \rho (1 + | s |)^{-M}, \quad \forall k \geqslant n + 1, \quad \forall s \in \mathbf{Z}^n \qquad (2.3)$$

Иначе вектор η называется M-резонансным.

Предложение 1. Если $d_1 > 0$, $\lambda_k \neq 0$ при всех $k \geqslant n + 1$ и $M > n + d_1^{-1} - 1$, то множество всех M-резонансных векторов имеет меру нуль.

Доказательство. Достаточно доказать, что при $\rho < \min(1, \inf\{| \lambda_k |\})$ и любом $L > 0$ множество точек $\eta \in O_L(\mathbf{R}^n)$, нарушающих условие (2.2) либо (2.3), имеет меру не большую, чем $C\rho$, $C = C(L)$.

Множество точек $\eta \in O_L(\mathbf{R}^n)$, нарушающих условие (2.3), является объединением слоев вида

$$\Pi_{k,s}^{\pm} = \{\omega \in O_L(\mathbf{R}^n) \mid | \omega \cdot s \pm \lambda_k | < \rho (1 + | s |)^{-M}\}, \quad s \neq 0$$

Если $|s| < \sigma_k$, где $\sigma_k = \max(1, (\lambda_k - 1)/L)$, то $\Pi^{\pm}_{k,s} = \varnothing$. Если же $|s| \geqslant \sigma_k$, то мера слоя не превосходит $C_1\rho\,|s|^{-M-1}$. Поэтому

$$\operatorname{mes} \bigcup_s \Pi^{\pm}_{k,s} \leqslant C_1\rho \sum_{|s|\geqslant\sigma_k} |s|^{-M-1} \leqslant C_2\rho\sigma_k^{-M+n-1}$$

и в силу условия Б) мера объединения всех непустых слоев не превосходит

$$C_3\rho\Big(1 + \sum_{k\geqslant n+1} k^{-d_1(M-n+1)}\Big) \leqslant C_4\rho$$

Аналогично оценивается мера множества точек $\eta \in O_L(\mathbf{R}^n)$, нарушающих условие (2.2).

Пусть $Z_d{}^C$ — комплексификация пространства Z_d ($d \in \mathbf{R}$).

Теорема 1. Пусть выполнены условия А), Б), $d_1 = d_A + d_J > 0$, $\lambda_k \neq 0$ при $k \geqslant n+1$ и

1) существует $d_0 > 0$ такое, что $H_\Delta(\cdot, \varepsilon)$ и $\nabla H_\Delta(\cdot, \varepsilon)$ продолжаются до аналитических отображений

$$H_\Delta(\cdot, \varepsilon): Z_{d_0}{}^C \to \mathbf{C}, \quad \nabla H_\Delta(\cdot, \varepsilon): Z_{d_0}{}^C \to Z^C_{d_0+d_J} \tag{2.4}$$

ограниченных на ограниченных множествах равномерно по $\varepsilon \in (0, 1]$;

2) вектор $\omega^0 = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ является M-нерезонансным при некотором $M \geqslant 1$.

Пусть $\rho > 0$ — отвечающее вектору ω° число, входящее в определение M-нерезонансности. Тогда найдутся не зависящие от ρ и ε постоянные $K_1{}^\circ$ и K_2 такие, что если в (1.3) $z(0) = z_0 = (q_0, \xi_0, y_0)$ и при некотором a, $0 < a \leqslant 1$,

$$|\xi_0| + \|y_0\|_{d_0} \leqslant \varepsilon^a\rho^{-2} \tag{2.5}$$

то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение уравнения (1.3) будет таким, что $z(t)$ и $z^\cdot(t)$ ограничены в Z_{d_0} и $Z_{d_0-d_J}$ соответственно; оно существует и единственно при $0 \leqslant t \leqslant L(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\ln\varepsilon^{-1}/K_1$, $K_1 \geqslant K_1{}^\circ$. Для него справедлива оценка

$$\|z(t) - (q_0 + t\omega^1, 0, 0)\|_{d_0} \leqslant K_2\varepsilon^{a-\varkappa}\rho^{-2}, \; 0 \leqslant t \leqslant L(\varepsilon) \tag{2.6}$$

где $\omega^1 \in \mathbf{R}^n$ — вектор с компонентами

$$\omega_j^1 = \lambda_j + \varepsilon\lambda_{jJ}\int_{T^n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}H_\Delta(q, 0, 0; \varepsilon)\,dq = \int_{T^n}[q_j, H_0(\cdot; \varepsilon)](q, 0, 0)\,dq \tag{2.7}$$

и $\varkappa = \varkappa(K_1) > 0$, $\varkappa \to 0$ при $K_1 \to \infty$.

Замечания. 1°. Если $M > n + d_1^{-1} - 1$, то в силу предложения 1 мера множества векторов ω°, не удовлетворяющих условию 2), равна нулю.

2°. Вторая половина условия 1) понимается в том смысле, что оценка (4.2) (см. п. 4) выполнена равномерно по $\varepsilon \in (0, 1]$.

3°. Усреднения высокого порядка построены только для некоторых пространственно-одномерных систем вида (1.3) [7, 8]. Для подобных систем $\lambda_j = K_0 j^{d_1} + o(j^{d_1-1})$, $d_1 \geqslant 1$. В работе автора [13] доказано, что в таком случае «нерезонансным» условно-периодическим решениям системы (1.4) отвечают близкие условно-периодические решения системы (1.3).

3. Приложения к уравнениям Кармана. Для простоты ограничимся случаем периодических по x решений системы (1.8)

$$u_j(t, x_1 + 2\pi, x_2) \equiv u_j(t, x_1, x_2 + 2\pi) \equiv u_j(t, x), \; j = 1, 2 \tag{3.1}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u_j(t, x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 \equiv 0, \quad j = 1, 2 \tag{3.2}$$

В силу (3.1) функции $u_1(t, \cdot)$, $u_2(t, \cdot)$ можно считать определенными на двумерном торе $T_x^2 = \mathbf{R}_x^2/2\pi\mathbf{Z}^2$. Обозначим G_2 «оператор Грина», т. е. оператор, обратный к Δ^2 на T_x^2 при условиях (3.2). Тогда из (1.8) получаем

$$u_1^{\cdot\cdot} + a_1\Delta^2 u_1 + \varepsilon a_2^{-1}[u_1, G_2([u_1, u_1]')]' = 0 \qquad (3.3)$$

Обозначим L_0^2 пространство функций из $L^2(T_x^2)$ с нулевым средним. Оператор Δ^2 определяет самосопряженный положительный оператор N_2 в L_0^2 с областью определения $H_0^4(T_x^2)$ и линейный изоморфизм $N_2 : H_0^2(T_x^2) \to H_0^{-2}(T_x^2)$ (здесь $H_0^j(T_x^2)$ — подпространство $H^j(T_x^2)$, состоящее из функций с нулевым средним; H^j — пространства Соболева). Обозначим $N_1 = \sqrt{N_2}$, $G_1 = N_1^{-1}$. Тогда $G_2 = G_1^2$.

Положим $Z^\circ = H_0^2(T_x^2)$, $\|u\|^2 = \iint (N_1 u)^2\, dx$; $Z = Z^\circ \times Z^\circ$, $\|(u, v)\|_0^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Определим в Z антисамосопряженный оператор J и функционал H_Δ

$$J(u, v) = (N_1 v, -N_1 u) \qquad (3.4)$$

$$H_\Delta(u, v) = \iint (G_1([u, u]'))^2\, dx \qquad (3.5)$$

Лемма 1. Функционал H_Δ аналитичен на Z и

$$\nabla H_\Delta(u, v) = 4(G_2[u, G_2[u, u]']', 0) \qquad (3.6)$$

Доказательство. Для $u \in Z^\circ$ пусть функционал $H_{\Delta 0}(u)$ равен правой части (3.5). Для доказательства леммы достаточно доказать аналитичность функционала $H_{\Delta 0}$ на Z° и найти его градиент. Аналитичность $H_{\Delta 0}$ вытекает из оценки $|H_{\Delta 0}(u)| \leqslant C\|u\|^4$ (см. [12, 13]). Для u, $v \in Z^0$ имеем

$$dH_{\Delta 0}(u)v = 4\iint G_1([u, u]')\, G_1([u, v]')\, dx = 4\iint G_2([u, u]')[u, v]'\, dx$$

Известно [12, 13], что трилинейная форма

$$(u, v, w) \mapsto \iint [u, v]'(x)\, w(x)\, dx$$

симметрична. Поэтому

$$dH_{\Delta 0}(u)v = \iint v(x)[u, W]'(x)\, dx = \langle v, G_2[u, W]'\rangle$$

где $W = 4G_2[u, u]'$. Значит, $\nabla H_{\Delta 0}(u) = G_2[u, W]'$, откуда следует (3.6).

Рассмотрим гамильтониан

$$H_0(z) = {}^1/_2\|z\|_0^2\sqrt{a_1} + {}^1/_4\varepsilon(a_2\sqrt{a_1})^{-1} H_\Delta(z),\ z = (u, v) \qquad (3.7)$$

Он имеет вид гамильтониана системы (1.3), если в качестве A выбрать оператор $\sqrt{a_1}I$ (I — единичный оператор в Z). В силу леммы 1

$$\nabla H_0(u, v) = (\sqrt{a_1}u + \varepsilon(a_2\sqrt{a_1})^{-1} G_2[u, G_2[u, u]']', \sqrt{a_1}v)$$

Значит, гамильтониану H_0 отвечает система

$$u^\cdot = \sqrt{a_1}A_1 v,\ v^\cdot = -A_1(\sqrt{a_1}u + \varepsilon a_2^{-1}G_2[u, G_2[u, u]']' \qquad (3.8)$$

Если (u, v) — решение системы (3.8), то $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (3.3). Таким образом, система (1.8) эквивалентна уравнению (1.3) с гамильтонианом (3.7), если скобку Пуассона (1.1) определить при помощи оператора (3.4). Пусть $\{\psi_j \mid j \geqslant 1\}$ — полный набор собственных функций оператора N_2 и $N_2\psi_j = \mu_j^2\psi_j$. В силу известной асимптотики спектра эллиптического дифференциального оператора, $\mu_j = K_* j + o(j)$. Поэтому, если $\varphi_j^+ = (\psi_j, 0)$, $\varphi_j^- = (0, \psi_j)$, то $J\varphi_j^\pm = \mp\mu_j\varphi_j^\mp$, $j = 1, 2, \ldots$, и операторы A и J, отвечающие системе (3.8), удовлетворяют условиям А), Б), где $\lambda_{jJ} = \mu_j$, $\lambda_{jA} = \sqrt{a_1}$, $d_A = 0$, $d_J = d_1 = 1$.

Лемма 2. При натуральных s норма в Z_s эквивалентна норме в $H_0^{2s+2}(T_x^2) \times H_0^{2s+2}(T_x^2)$.

Лемма 3. Отображение ∇H_Δ: $Z_m \to Z_{m+2}$ аналитично, если $m \geqslant 2$.

Доказательство леммы 2 следует из неравенств

$$C^{-1}\|(u, v)\|_s^2 \leqslant \|J^s(u, v)\|_0^2 \leqslant C\|(u, v)\|_s^2$$

так как

$$\|N_1^s u\|^2 = \iint |N_1^{s+1} u|^2\,dx = \iint |\Delta^{s+1} u|^2\,dx$$

что эквивалентно квадрату нормы в $H_0^{2s+2}(T_x^2)$.

Для доказательства леммы 3 обозначим $|\cdot|_s$ норму в $H_0^s(T_x^2)$. Тогда $|G_2(u)|_{s+4} \leqslant C|u|_s$ при всех s. Если $s \geqslant 2$, то $|[u, v]'|_s \leqslant C_1|u|_{s+2}|v|_{s+2}$, откуда следует аналитичность при $m \geqslant 4$ отображения $\nabla H_{\Delta 0}$: $H_0^m(T_x^2) \to H_0^{m+2}(T_x^2)$. Отсюда и из леммы 2 получаем нужное утверждение.

Таким образом, система (3.8) удовлетворяет условиям теоремы 1 при $d_0 \geqslant 2$ и если вектор $\omega^0 = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ нерезонансный, то усредненными решениями системы (3.8) являются кривые вида (1.7), где $\lambda_k = \omega_k^1$. Усредненными решениями уравнения (3.3) будут кривые

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2I_k}\sin(\omega_k^1 t + \nu_k)\,\psi_k(x)$$

4. Доказательство теоремы 1. Для краткости опускается зависимость гамильтонианов от параметра ε; все оценки из п. 4 справедливы равномерно по $\varepsilon \in (0, 1]$.

В системе (1.3) перейдем от переменной z к переменным $(q, \xi, y) \in O_{s,\delta} = T^n \times O_\delta(\mathbf{R}^n) \times O_\delta(Y_s)$, причем

$$q_j^{\boldsymbol{\cdot}} = \lambda_{jJ}\left(\lambda_{jA} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi_j}H_\Delta(q, \xi, y)\right), \quad \xi_j^{\boldsymbol{\cdot}} = -\varepsilon\lambda_{jJ}\frac{\partial}{\partial q_j}H_\Delta(q, \xi, y)$$

$$y^{\boldsymbol{\cdot}} = J(Ay + \varepsilon\nabla_y H_\Delta(q, \xi, y)) \tag{4.1}$$

Касательное пространство к $O_{s,\delta}$ в произвольной точке отождествим Z_s.

Выделим из H_Δ линейные по ξ и по y члены

$$H_\Delta = g(q) + \xi\cdot h_1(q) + \langle y, \eta(q)\rangle + H_2(q, \xi, y)$$

Изменив при необходимости H_Δ на постоянную, можем считать, что $\bar{g} = 0$ (черта сверху означает усреднение по $q \in T^n$). Запишем гамильтониан системы (4.1) в следующем виде:

$$H = (\lambda_A^n + \varepsilon\bar{h}_1)\cdot\xi + {}^1/_2\langle Ay, y\rangle + \varepsilon H_1$$

$$\lambda_A^n = (\lambda_{1A}, \ldots, \lambda_{nA}), \quad H_1 = H_2 + H_3$$

$$H_3 = g(q) + \xi\cdot h(q) + \langle y, \eta(q)\rangle, \quad h = h_1 - \bar{h}_1$$

Функционал H_Δ продолжим по аналитичности в некоторую комплексную область вида

$$O^C_{d_0,\delta_1} = U_{\delta_1} \times O_{\delta_1}(\mathbf{C}^n) \times O_{\delta_1}(Y_{d_0}{}^C), \quad \delta_1 > 0$$

$$U_{\delta_1} = \{q \in \mathbf{C}^n/2\pi\mathbf{Z}^n \mid |\operatorname{Im} q| < \delta_1\}$$

где Y_s^C — комплексификация пространства Y_s. В силу условия 1) теоремы 1 всюду в $O^C_{d_0,\delta_1}$ справедлива оценка

$$|H_\Delta(q, \xi, y)| + \|\nabla_y H_\Delta(q, \xi, y)\|_{d_0+d_J} \leqslant C \tag{4.2}$$

Из (4.2) и оценки Коши вытекает утверждение.

Лемма 4. Найдется $\delta_2 > 0$ и постоянные C_1, C_2, C_3 такие, что при $q \in U_{\delta_2}$ и $(q, \xi, y) \in O^C_{d_0, \delta_2}$ справедливы оценки

$$
\begin{gathered}
|g(q)| + |h(q)| + |\bar{h}_1| + \|\eta(q)\|_{d_0+d_J} \leqslant C_1 \\
|H_2(q, \xi, y)| \leqslant C_2(|\xi|^2 + \|y\|_{d_0}^2) \qquad (4.3) \\
|\nabla_\xi H_2(q, \xi, y)| + \|\nabla_y H_2(q, \xi, y)\|_{d_0+d_J} \leqslant C_3(|\xi| + \|y\|_{d_0})
\end{gathered}
$$

Определим вспомогательный гамильтониан $\varepsilon\Xi$, где

$$\Xi = g_0(q) + \xi \cdot h_0(q) + \langle y, \eta_0(q)\rangle$$

Ему отвечает каноническое преобразование S, являющееся сдвигом за единичное время по траекториям гамильтоновой системы с гамильтонианом $\varepsilon\Xi$

$$q_j^{\cdot} = \varepsilon F_j^q(q), \quad \xi_j^{\cdot} = \varepsilon F_j^\xi(q, \xi, y), \quad y^{\cdot} = \varepsilon F^y(q) \qquad (4.4)$$

$$F_j^q = \lambda_{jJ} h_{0j}(q), \quad F^y = J\eta_0(q)$$

$$F_j^\xi = -\lambda_{jJ}\left(\xi \cdot \frac{\partial h_0(q)}{\partial q_j} + \frac{\partial g_0(q)}{\partial q_j} + \left\langle y, \frac{\partial \eta_0(q)}{\partial q_j}\right\rangle\right) \qquad (4.5)$$

Преобразование S каноническое и переводит систему (4.1) в систему с гамильтонианом $H^1(q, \xi, y) = H(S(q, \xi, y))$ (см. [3, 4]). Запишем S в следующем виде: $q \mapsto q + \varepsilon q^1$, $\xi \mapsto \xi + \varepsilon\xi^1$, $y \mapsto y + \varepsilon y^1$. Тогда $q^1 = F^q + \varepsilon\ldots$, $\xi^1 = F^\xi + \varepsilon\ldots$, $y^1 = F^y + \varepsilon\ldots$. Поэтому если обозначить $(q, \xi, y) = z$, $(q^1, \xi^1, y^1) = z^1$ и $\lambda_A^n + \varepsilon\bar{h}_1 = \omega^2$, то преобразованный гамильтониан запишется так:

$$
\begin{gathered}
H^1(z) = \omega^2 \cdot \xi + \frac{1}{2}\langle Ay, y\rangle + \varepsilon\left(-\left(\sum_{j=1}^n \xi \cdot \left(\frac{\partial h_0}{\partial q_j}\lambda_{jJ}\omega_j^2\right) + \right.\right. \\
\left. + \frac{\partial g_0}{\partial q_j}\lambda_{jJ}\omega_j^2 + \left\langle y, \frac{\partial \eta_0}{\partial q_j}\lambda_{jJ}\omega_j^2\right\rangle\right) + \langle Ay, J\eta_0(q)\rangle + \\
\left. + g(q) + \xi \cdot h(q) + \langle y, \eta(q)\rangle\right) + \varepsilon H_2(z) + O(\varepsilon^2)
\end{gathered}
$$

Обозначим $\omega^1 \in \mathbf{R}^n$ вектор с компонентами $\omega_j^1 = \omega_j^2\lambda_{jJ}$. Так как $h_{1j}(q) = \partial H_\Delta(q, 0, 0)/\partial\xi_j$ и для произвольного функционала H' $[q_j, H'] = \lambda_{jJ}\partial H/'/\partial\xi_j$, то $\lambda_{jJ}h_{1j}(q) = [q_j, H_0](q, 0, 0)$. Поэтому вектор ω^1 имеет вид, указанный в (2.7).

Приравняв нулю содержимое квадратных скобок, получим для g_0, h_0 и η_0 гомологические уравнения

$$\partial g_0(q)/\partial\omega^1 \equiv \omega^1 \cdot \nabla g_0(q) = g(q) + \varepsilon\Delta g(q), \quad \partial h_0(q)/\partial\omega^1 = h(q) + \varepsilon\Delta h(q) \qquad (4.6)$$

$$\partial\eta_0(q)/\partial\omega^1 - AJ\eta_0(q) = \eta(q) + \varepsilon\Delta\eta(q) \qquad (4.7)$$

где $\varepsilon\Delta g$, $\varepsilon\Delta h$ и $\varepsilon\Delta\eta$ — допустимые малые невязки.

Лемма 5. При некотором $\delta_3 > 0$

а) найдутся аналитичные в U_{δ_3} функции g_0, Δg, h_0 и Δh, удовлетворяющие (4.6), такие, что всюду в U_{δ_3}

$$|\Delta g(q)| + |\Delta h(q)| \leqslant C\varepsilon, \quad |g_0(q)| + |h_0(q)| \leqslant C\rho^{-1} \qquad (4.8)$$

б) найдутся аналитичные в U_{δ_3} отображения η_0, $\Delta\eta$, удовлетворяющие (3.7), и такие, что всюду в U_{δ_3}

$$\|\eta_0(q)\|_{d_0+d_J+d_1} \leqslant C\rho^{-1}, \quad \|\Delta\eta\|_{d_0+d_J} \leqslant C\varepsilon \qquad (4.9)$$

Доказательство. Ограничимся доказательством более сложного утверждения б). Для этого положим $W_j^\pm = (\varphi_j^+ \pm i\varphi_j^-)/\sqrt{2}$. Тогда $AJW_j^\pm = \pm i\lambda_j W_j^\pm$. Разложим отображения η_0, η и $\Delta\eta$ по базису $W_j^{\pm}: \eta(q) = \sum \eta_k^{\pm}(q) W_k^{\pm}$ и т. д. Функции аргумента s будут обозначать преобразование Фурье по q:

$$\eta_k^{\pm}(q) = \sum_{s \in Z^n} \eta_k^{\pm}(s) e^{iq\cdot s}$$

и т. д. Из леммы 4 и известных оценок убывания коэффициентов Фурье аналитичных функций ([14], § 4.2) следует, что $\| \eta(s) \|_{d_0+d_J} \leqslant C\exp(-\delta_2 |s|)$. Поэтому найдется число $C_* = C_*(\delta_2 - \delta_3)$, такое, что если

$$\Delta\eta = \sum_{|s|>M_*} \eta(s) e^{iq\cdot s}, \quad M_* = C_* \ln \varepsilon^{-1} \tag{4.10}$$

то $\Delta\eta$ удовлетворяет оценке (4.9). Тогда величина $\eta_{0k}^{\pm}(s)$ равна нулю при $|s| > M_*$, а при $|s| \leqslant M_*$

$$\eta_{0k}^{\pm}(s) = -i\eta_k^{\pm}(s)/(\omega^1\cdot s \mp \lambda_k) \tag{4.11}$$

Так как

$$|\omega^1\cdot s \mp \lambda_k| \geqslant |\omega^0\cdot s \mp \lambda_k| - \varepsilon |\omega^3\cdot s|, \quad \omega_j^3 = \bar{h}_{1j}\lambda_{jJ}$$

то в силу условия 2) теоремы

$$|\omega^1\cdot s \mp \lambda_k| \geqslant {}^1/_2\rho(1+|s|)^{-M} + {}^1/_2\rho(1 + C_* \ln \varepsilon^{-1})^{-M} - C_1\varepsilon \ln \varepsilon^{-1}$$

Поэтому если ε достаточно мало, то модуль знаменателя в (4.11) не меньше, чем ${}^1/_2\rho(1+|s|)^{-M}$ и

$$\| \eta_0(q) \|_{d_0+d_J} + \| \partial\eta_0(q)/\partial\omega^1 \|_{d_0+d_J} \leqslant C_2\rho^{-1}, \quad q \in U_{\delta_3}, \ \delta_3 < \delta_2$$

(см. [14]). Следовательно, из оценки для $\Delta\eta$ и вида уравнения (4.7) вытекает, что $\| AJ\eta_0(q) \|_{d_0+d_J} \leqslant C_3\rho^{-1}$ при $q \in U_{\delta_3}$. Теперь оценка для $\eta_0(q)$ следует из условия Б).

Пусть, как и выше, S — оператор сдвига по траекториям (4.4) и $S(z) = z + \varepsilon z^1$. Тогда если $z(t)$ — траектория (4.4) с начальным условием z, то

$$z^1 = \int_0^1 F(z(t))\,dt, \quad F = (F^q, F^{\xi}, F^y)$$

Поэтому из леммы 5 вытекает утверждение.

Лемма 6. Найдется $\delta_4 > 0$ такое, что отображение S: $O_{s,\delta_4} \to O_{s,\delta_3}$ аналитично при $s \in [-s_1, s_2]$, $s_1 = d_0 + d_J + d_1$, $s_2 = d_0 + d_J + d_A$. При этом

$$|q^1| \leqslant C\rho^{-1}, \quad |\xi^1| \leqslant C\rho^{-1}(1 + \|y\|_{-s_1}), \quad \|y^1\|_{s_2} \leqslant C\rho^{-1}$$
$$\forall s \in [-s_1, s_2], \quad \|dS(z)\|_{Z_s, Z_s} \leqslant 2, \quad \|dS(z) - I - \varepsilon dF(z)\|_{Z_s, Z_s} \leqslant C\varepsilon^2\rho^{-2}$$

(напомним, что ε считается достаточно малым и касательное пространство к $O_{s,\delta}$ отождествлено с Z_s).

Пусть $z \in O_{s,\delta_4}$, $S(z) = z + \varepsilon z^1$. Тогда

$$\begin{aligned} H(S(z)) &= \omega^2\cdot\xi + {}^1/_2\langle Ay, y\rangle + \varepsilon[(\xi^1 - F^{\xi})\cdot\omega^2]_1 + \\ &+ \varepsilon[\langle Ay, y^1 - F^y\rangle]_2 + {}^1/_2\varepsilon^2[\langle Ay^1, y^1\rangle]_3 + \varepsilon[-\partial g_0/\partial\omega^1 + g]_4 + \\ &+ \varepsilon[(-\partial h_0/\partial\omega^1 + h)\cdot\xi]_5 + \varepsilon[\langle\partial\eta_0/\partial\omega^1 - AJ\eta_0 - \eta, y\rangle]_6 + \\ &+ \varepsilon[H_1(z + \varepsilon z^1) - H_1(z)]_7 + \varepsilon H_2(z) \end{aligned}$$

Функционал в скобках $[\cdot]_j$ (вместе с множителем перед скобками) обозначим $\Delta_j H$. Из лемм 5, 6 получаем утверждение.

Лемма 7. При $z \in O_{d_0,\delta_5}$, где $\delta_5 < \delta_4$, для $j = 1, \ldots, 7$ справедливы оценки

$$|\Delta_j H| + \| \nabla_y \Delta_j H \|_{d_0+d_J} \leqslant C\varepsilon^2\rho^{-2}$$

Таким образом,

$$H(S(z)) = \omega^2 \cdot \xi + {}^1/_2 \langle Ay, y\rangle + \varepsilon^2 H_4(z) + \varepsilon H_2(z)$$

где функционалы $H_2(z)$ и $H_4(z)$ аналитичны в O_{d_0, δ_5} и

$$|H_4(z)| + \|\nabla_y H_4(z)\|_{d_0+d_J} \leqslant C\rho^{-2} \qquad (4.12)$$

Выпишем преобразованную систему уравнений:

$$q_j^{\cdot} = \omega_j^1 + \varepsilon\lambda_{jJ}(\partial/\partial\xi_j)(\varepsilon H_4 + H_2) \qquad (4.13)$$

$$\xi_j^{\cdot} = -\varepsilon\lambda_{jJ}(\partial/\partial q_j)(\varepsilon H_4 + H_2) \qquad (4.14)$$

$$y^{\cdot} = J(Ay + \varepsilon^2\nabla_y H_4 + \varepsilon\nabla_y H_2) \qquad (4.15)$$

В силу аналитичности отображений $J\nabla_y H_4$ и $J\nabla_y H_2$ (см. (4.12) и лемму 4) эта система является возмущением системы $q^{\cdot} = \omega^1$, $\xi^{\cdot} = 0$, $y^{\cdot} = JA_y$ посредством векторного поля, удовлетворяющего условию Липшица. Так как невозмущенная система определяет группу изометрических преобразований области O_{d_0, δ_6}, $\delta_6 < \delta_5$, то решение системы (4.13) —(4.15) единственно и существует по крайней мере до момента достижения границы области O_{d_0, δ_6} (например, в силу [15], с. 105). Пусть $(q(t), \xi(t), y(t)) = z'(t)$ — решение системы такое, что $S(z'(0)) = z_0 = (q_0, \xi_0, y_0)$. Из (4.14) в силу леммы 4, оценки (4.12) и оценки Коши имеем:

$$d|\xi(t)|/dt \leqslant \varepsilon C(\varepsilon\rho^{-2} + |\xi|^2 + \|y\|_{d_0}^2) \qquad (4.16)$$

Пусть P — линейный оператор, переводящий $\varphi_j^{\pm}$ в $j^{d_0}\varphi_j^{\pm}$, $j = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\|Py\|_0^2 = \langle P^2 y, y\rangle = \|y\|_{d_0}^2, \ \langle JAy, Py\rangle \equiv 0 \qquad (4.17)$$

Умножив уравнение (4.25) на $P^2 y(t)$ скалярно в Y и учитывая (4.17), получим

$${}^1/_2 d\langle y, P^2 y\rangle/dt = \varepsilon^2 \langle J\nabla_y H_4, P^2 y\rangle + \varepsilon\langle J\nabla_y H_2, P^2 y\rangle$$

В силу (4.12) и леммы 4 правая часть этого равенства не превосходит $C\varepsilon\|y\|_{d_0}(\varepsilon\rho^{-2} + |\xi| + \|y\|_{d_0})$. Отсюда

$$d\|y\|_{d_0}/dt \leqslant C_1(\varepsilon^2\rho^{-2} + \varepsilon|\xi| + \varepsilon\|y\|_{d_0}) \qquad (4.18)$$

Предположим, что $\|y(t)\|_{d_0} + |\xi(t)| \leqslant 1$. Тогда из (4.16), (4.18) следует неравенство

$$(d/dt)(|\xi(t)| + \|y(t)\|_{d_0}) \leqslant C_2\varepsilon(|\xi| + \|y\|_{d_0} + \varepsilon\rho^{-2})$$

Отсюда, по лемме Гроноулла,

$$|\xi(t) + \|y(t)\|_{d_0} \leqslant (\varepsilon\rho^{-2} + |\xi(0)| + \|y(0)\|_{d_0})e^{C_2\varepsilon t} - \varepsilon\rho^{-2} \qquad (4.19)$$

В силу условия (2.5) и леммы 6 $|\xi(0)| + \|y(0)\|_{d_0} \leqslant C_3\rho^{-2}\varepsilon^a$. Поэтому если $0 < 2b < a \leqslant 1$, то при $0 \leqslant t \leqslant L(\varepsilon) = b\ln\varepsilon^{-1}/(\varepsilon C_2)$ имеем

$$|\xi(t)| + \|y(t)\|_{d_0} \leqslant C_4(\varepsilon^a\rho^{-2})\varepsilon^{-b} \qquad (4.20)$$

Следовательно, если ε достаточно мало, то решение $z'(t)$ существует по крайней мере при $0 \leqslant t \leqslant L(\varepsilon)$. Если $z_*(t) = (q_0 + \omega^1 t, 0, 0)$, то из (4.20) и (4.13) следует, что

$$\|z'(t) - z_*(t)\|_{d_0} \leqslant C_5\varepsilon^{a-b}\rho^{-2}$$

Поэтому в силу оценок леммы 6

$$\|S(z'(t)) - z_*(t)\|_{d_0} \leqslant \|S(z'(t)) - S(z_*(t))\|_{d_0} + \|S(z_*(t)) - z_*(t)\|_{d_0} \leqslant$$
$$\leqslant 2\|z'(t) - z_*(t)\|_{d_0} + C_6\varepsilon\rho^{-1} \leqslant C_7\varepsilon^{a-b}\rho^{-2}$$

Но $S(z'(t)) = z(t)$ — решение системы (1.3) с начальным условием z_0. Оценка (2.6) доказана, если положить $\varkappa = 2b$ (и если ε достаточно мало).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров В. Е.* Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 4. С. 431—453.
2. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Интегрируемые системы // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Т. 4. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 179—285.
3. *Chernoff P. P., Marsden J. E.* Properties of infinite dimensional Hamiltonian systems. Berlin: Springer, 1974, 160 p.
4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
5. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 408 с.
7. *Калякин Л. А.* Длинноволновая асимптотика решения гиперболической системы уравнений // Мат. сб. 1984. Т. 124. № 1. С. 96—120.
8. *Островский Л. А.* Приближенные методы в теории нелинейных волн // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 4. С. 454—476.
9. *Dobrokhotov S. Yu., Maslov V. P.* Multiphase asymptotics of nonlinear partial differential equations with a small parameter // Soviet Sci. Revs. Sect. C. Math. Phys. Revs. 1982. V. 3. P. 221—311.
10. *Карасев М. В., Маслов В. П.* Асимптотическое и геометрическое квантование // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39. Вып. 6. С. 115—173.
11. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
12. *Сьярле Ф., Рабье П.* Уравнения Кармана. М.: Мир, 1983. 172 с.
13. *Куксин С. Б.* Гамильтоновы возмущения бесконечномерных линейных систем с мнимым спектром // Функц. анализ и его приложения. 1987. Т. 21. Вып. 3. С. 22—37.
14. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 5. С. 13—40.
15. *Brezis H.* Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Amsterdam — London: North-Holland, 1973. 183 p.

Москва

Поступила в редакцию 27.XI.1987