Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 2, 1989

УДК 531.36:534.1

Р. Ф. Нагаев, В. Н. Пилипчук

О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ, ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ В СИСТЕМУ С ОСОБЫМ МНОЖЕСТВОМ

Рассматривается нелинейная динамическая система с произвольным конечным числом степеней свободы, имеющая в вырожденном случае особое множество — многообразие коразмерности единица. Характерное свойство подобных систем, описывающих динамику ряда упругих гибких конструкций, состоит в том, что вырожденная система остается существенно нелинейной той же размерности, что и исходная. В связи с этим прямое построение асимптотического решения по соответствующему малому параметру затруднено. Как показано ниже, такое построение может быть выполнено после некоторых предварительных преобразований, в основе которых лежит представление о движении системы как о дрейфе по особому множеству локализованной области высокочастотных осцилляций с нормальными отклонениями от множества.

В качестве примеров рассмотрены задачи колебаний тонкостенной пологой арки и упругого кругового кольца.

Рассмотрим механическую систему, описываемую лагранжианом следующего вида:

$$L = T - \Pi \tag{1}$$

$$T = {}^1/_2 x^{\cdot 2},\ \Pi = {}^1/_2 f^2(x) + \varepsilon^2 \Phi(x)$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \tag{2}$$

где $\varepsilon^2 \ll 1$ — параметр, $f(x)$ и $\Phi(x)$ — голоморфные функции, первая из которых такова, что множество

$$M_f = \{x\colon f(x) = 0\} \tag{3}$$

представляет собой $(n-1)$-мерное многообразие в R^n.

Подобная ситуация возникает, например, при изучении динамики некоторых гибких упругих конструкций, обладающих возможностью больших перемещений при малых относительных деформациях. При этом многообразие M_f отвечает непрерывному множеству равновесных форм вырожденной (абсолютно гибкой) конструкции [1, 2].

Отметим, что прямое построение решений уравнений движения, соответствующих (1), (2), затруднено, а малость параметра ε, на первый взгляд, бесполезна, поскольку вырожденная ($\varepsilon = 0$) система остается существенно нелинейной и имеет такую же размерность, как и невырожденная. Более того, анализ выражения П для в (2) показывает, что при заданной величине энергии роль нелинейности возрастает с уменьшением ε. Это согласуется с представлением о динамике гибких конструкций: при фиксированной энергии колебаний амплитуды более гибкой конструкции выше.

Выполним преобразование координат, после которого система приобретет удобный для исследования стандартными методами вид.

Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — произвольная точка M_f: $f(y) \equiv 0$. Предположим, что многообразие допускает параметризацию путем введения, по крайней мере на достаточно большой его части, криволинейной ортогональной системы координат $s = (s_1, \ldots, s_{n-1})$:

$$y = y(s), \quad \frac{\partial y}{\partial s_\alpha}\frac{\partial y}{\partial s_\beta} \equiv \frac{\partial y_i}{\partial s_\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial s_\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n-1$$

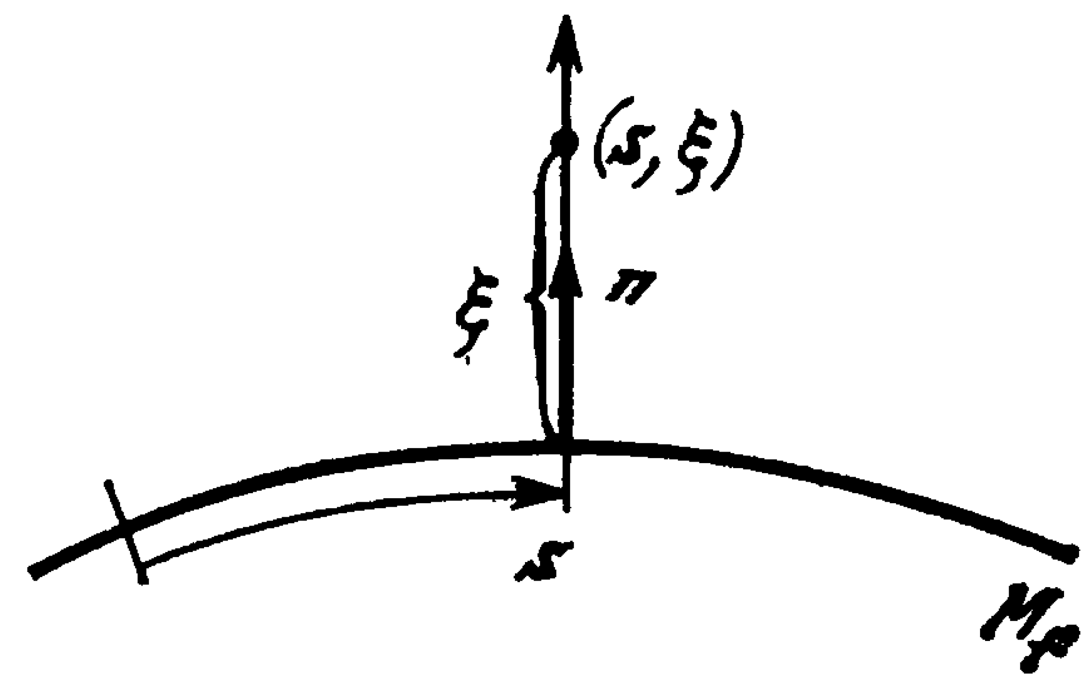
где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Обозначим $n(s) = (n_1, \ldots, n_n)$ — единичный вектор нормали к M_f в точке $y(s)$:

$$n_i = \frac{1}{\omega}\frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad \omega^2 = \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Пусть нормальная к M_f координата ξ такова, что связь координат (s, ξ) с исходными (декартовыми в R^n) имеет вид (фиг. 1)

$$x = y + n\xi, \quad y = y(s), \quad n = n(s) \quad (4)$$



Фиг. 1

Тогда выражение для кинетической энергии (2) в новых координатах приобретет вид

$$T = {}^1/_2 (\delta_{\alpha\beta} + 2m_{\alpha\beta}\xi + n_{\alpha\beta}\xi^2) s_\alpha^{\cdot} s_\beta^{\cdot} + {}^1/_2 \xi^{\cdot 2}$$

$$m_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y_i}{\partial s_\alpha}\frac{\partial n_i}{\partial s_\beta} + \frac{\partial y_i}{\partial s_\beta}\frac{\partial n_i}{\partial s_\alpha}\right), \quad n_{\alpha\beta} = \frac{\partial n_i}{\partial s_\alpha}\frac{\partial n_i}{\partial s_\beta}$$

Скоростям $s_\alpha^{\cdot}$ отвечают обобщенные импульсы

$$p_\alpha = \partial T / \partial s_\alpha^{\cdot} = s_\alpha^{\cdot} + (2m_{\alpha\beta}\xi + n_{\alpha\beta}\xi^2) s_\beta^{\cdot}$$

Обратная зависимость для $s_\alpha^{\cdot}$ может быть найдена в виде ряда по степеням ξ (далее ξ достаточно мало)

$$s_\alpha^{\cdot} = p_\alpha - 2\xi m_{\alpha\beta} p_\beta - \xi^2 n'_{\alpha\beta} p_\beta + \ldots$$

$$n'_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta} - 4m_{\alpha\gamma} m_{\gamma\beta}, \quad \gamma = 1, \ldots, n-1$$

Для перехода к стандартной системе с одной быстро вращающейся фазой воспользуемся функцией Рауса $R = p_\alpha s_\alpha^{\cdot} - T + \Pi$.

Предположим, что энергия системы имеет порядок ε^2. Тогда из выражений (2) следует, что траектории движения располагаются в некоторой окрестности многообразия M_f с нормальными отклонениями ξ порядка ε.

Представив выражение Π (2) в виде разложения по степеням ξ и выполнив масштабное преобразование переменных

$$\xi = \varepsilon\zeta, \quad p_\alpha = \varepsilon r_\alpha \quad (R = \varepsilon\bar{R})$$

будем иметь

$$\bar{R} = \varepsilon\,(-{}^1/_2\zeta^{\cdot 2} + {}^1/_2\omega^2\zeta^2 + {}^1/_2 r_\alpha^2 + U_0 + \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \ldots) \quad (5)$$

$$U^{(1)} = (U_1 + V_1\zeta^2 - m_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta)\zeta, \quad U^{(2)} = (U_2 + V_2\zeta^2 - {}^1/_2 n'_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta)\zeta^2$$

$$V_1(s) = \frac{\omega}{2} n_i n_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}, \quad V_2(s) = \frac{1}{8}\left[n_i n_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}\right]^2 + \frac{\omega}{6} n_i n_j n_k \frac{\partial^3 f}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k}, \ldots$$

$$U_0(s) = \Phi(y), \quad U_1(s) = n_i \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad U_2(s) = \frac{1}{2} n_i n_j \frac{\partial \Phi}{\partial y_i \partial y_j}, \ldots$$

Полученная система (5) лагранжева относительно нормальной координаты ζ и гамильтонова по переменной s_α, r_α. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\zeta^{\cdot\cdot} + \omega^2\zeta + \varepsilon \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \zeta} + \varepsilon^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \zeta} + \ldots = 0$$

$$s_\alpha^{\cdot} = \varepsilon \left(r_\alpha + \varepsilon \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r_\alpha} + \varepsilon^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial r_\alpha} + \ldots \right)$$

$$r_\alpha^{\cdot} = -\varepsilon \left(\omega \frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha} \zeta^2 + \frac{\partial U_0}{\partial s_\alpha} + \varepsilon \frac{\partial U^{(1)}}{\partial s_\alpha} + \varepsilon^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial s_\alpha} + \ldots \right) \qquad (6)$$

В начальный момент времени новые переменные связаны с исходными следующими соотношениями

$$t = 0,\ \zeta = \varepsilon^{-1}(x_i - y_i)\, n_i,\ \zeta^{\cdot} = \varepsilon^{-1} x_i^{\cdot} n_i$$

$$r_\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \left(x_i^{\cdot} \frac{\partial y_i}{\partial s_\alpha} + \varepsilon\zeta \frac{\partial y_i}{\partial s_\beta} \frac{\partial n_i}{\partial s_\alpha} \frac{\partial y_j}{\partial s_\beta} x_j^{\cdot} + \ldots \right)$$

$$[x_i - y_i(s)] \frac{\partial y_i(s)}{\partial s_\alpha} = 0$$

где в соответствии с принятым выше предположением относительно величины энергии правые части равенства для ζ, $\zeta^{\cdot}$, r_α имеют порядок единицы, последнее равенство дает систему уравнений относительно начальных значений координат s_α, $\alpha = 1, \ldots, n-1$.

Введем переменные действие — угол (I — φ) согласно формулам

$$\zeta = \sqrt{2I/\omega} \cos\varphi, \quad \zeta^{\cdot} = -\sqrt{2I\omega} \sin\varphi \qquad (7)$$

Принимая во внимание соотношение

$$\omega^{\cdot} = \frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha} s_\alpha^{\cdot} = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha} \left(r_\alpha + \varepsilon \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r_\alpha} + \ldots \right)$$

получим окончательно систему с одной быстрой фазой

$$\varphi^{\cdot} = \omega + \varepsilon \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial I} - \frac{r_\alpha}{2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha} \sin 2\varphi \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial I} - \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r_\alpha} \sin 2\varphi \right) + \ldots$$

$$I^{\cdot} = -\varepsilon \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{I}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha} r_\alpha \cos 2\varphi \right) - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial \varphi} - \frac{I}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r_\alpha} \cos 2\varphi \right) - \ldots, \quad s_\alpha^{\cdot} = \varepsilon r_\alpha + \varepsilon^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r_\alpha} + \ldots \qquad (8)$$

$$r_\alpha^{\cdot} = -\varepsilon \left(\frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha} I + \frac{\partial U_0}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial s_\alpha} I \cos 2\varphi \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial' U^{(1)}}{\partial s_\alpha} - \ldots$$

$$U^{(1)} = A_1(I; s, r)\cos\varphi + B_1(I; s)\cos 3\varphi$$

$$U^{(2)} = A_2(I; s, r) + B_2(I; s, r)\cos 2\varphi + C_2(I; s)\cos 4\varphi$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \left(U_1 + \frac{3I}{2\omega} V_1 - m_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta \right), \quad B_1 = \sqrt{\frac{I^3}{2\omega^3}} V_1$$

$$A_2 = \frac{I}{\omega} \left(U_2 + \frac{3I}{2\omega} V_2 - \frac{1}{2} n'_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta \right)$$

$$B_2 = \frac{I}{\omega} \left(U_2 + \frac{2I}{\omega} V_2 - \frac{1}{2} n'_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta \right), \quad C_2 = \frac{I^2 V_2}{2\omega^2}$$

(при вычислении производных $\partial'/\partial s_\alpha$ переменную ζ дифференцировать не следует).

Воспользовавшись для уравнений (8) процедурой метода усреднения Н. Н. Боголюбова [3, 4], придем к системе, не содержащей справа быстрой фазы (два приближения):

$$\overline{\varphi}^{\cdot} = \omega + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial A_2}{\partial I} - \frac{1}{4\omega} \frac{\partial^2}{\partial I^2} (A_1{}^2 + B_1{}^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8\omega^3} \left[\left(\bar{r}_\alpha \frac{\partial \omega}{\partial \bar{s}_\alpha} \right)^2 - \bar{I}\omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial \bar{s}_\alpha} \right)^2 \right] \right\} + O(\varepsilon^3) \qquad (9)$$

$$\bar{I}^{\cdot} = O(\varepsilon^3), \quad \bar{s}_\alpha^{\cdot} = \varepsilon \bar{r}_\alpha + O(\varepsilon^3), \quad \bar{r}_\alpha^{\cdot} = -\varepsilon \partial (\bar{I}\omega + U_0)/\partial \bar{s}_\alpha + O(\varepsilon^3)$$

Новые переменные ($\overline{\varphi}$, $\bar{I}$; $\bar{s}_\alpha$, $\bar{r}_\alpha$) связаны со старыми соотношениями

$$\varphi = \overline{\varphi} + \frac{\varepsilon}{\omega} \left(\frac{\partial A_1}{\partial I} \sin \overline{\varphi} + \frac{1}{3} \frac{\partial B_1}{\partial I} \sin 3\overline{\varphi} + \frac{\bar{r}_\alpha}{4\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{s}_\alpha} \cos 2\overline{\varphi} \right) + O(\varepsilon^2)$$

$$I = \bar{I} - \frac{\varepsilon}{\omega} \left(A_1 \cos \overline{\varphi} + B_1 \cos 3\overline{\varphi} - \frac{I}{2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{s}_\alpha} \bar{r}_\alpha \sin 2\overline{\varphi} \right) + O(\varepsilon^2)$$

$$s_\alpha = \bar{s}_\alpha + O(\varepsilon^2), \quad r_\alpha = \bar{r}_\alpha - \varepsilon \frac{I}{2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{s}_\alpha} \sin 2\overline{\varphi} + O(\varepsilon^2)$$

Таким образом, исходная консервативная система, возмущенная на величину порядка ε^2, может быть сведена к «квазилинейной» и исследована при помощи асимптотических разложений по степеням ε.

Отметим, что замена (7) в силу того, что $\partial\omega/\partial s_\alpha \neq 0$, не является канонической. Поэтому структура уравнений (8) испорчена. Существенно, что в рассматриваемой задаче получение точных гамильтоновых уравнений с одной быстрой фазой и прочими медленными переменными, по-видимому, невозможно. Тем более показательно, что в осредненной системе (9) с точностью до величин порядка ε^2 включительно новая переменная действия $\bar{I}$ является адиабатическим инвариантом, а уравнения для $\bar{s}_\alpha$ и $\bar{r}_\alpha$ имеют каноническую структуру и поэтому допускают первый интеграл

$${}^1/_2 \bar{r}_\alpha{}^2 + \bar{I}\omega + U_0 = h \quad (h = \mathrm{const}) \qquad (10)$$

Для системы с двумя степенями свободы многообразие M_f (3) представляет собой некоторую кривую на координатной плоскости $x_1 x_2$, поэтому остается лишь одна координата $\bar{s}_1 \equiv S$, и соотношение (10) позволяет выразить соответствующую зависимость от времени квадратурой:

$$\int_{S^\circ}^{S} \frac{dS}{\sqrt{2[h - I\omega(S) - U_0(S)]}} = \varepsilon t; \quad S^\circ = S|_{t=0} \qquad (11)$$

Таким образом, в случае двух степеней свободы задача интегрирования уравнений движения сводится к вычислению квадратур.

Пример 1. Уравнение свободных нелинейных колебаний тонкостенной пологой арки с неподвижными краями [5] после соответствующего масштабного преобразования переменных может быть представлено в виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^4 (W - W_0)}{\partial \eta^4} - P \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0 \quad (0 \leqslant \eta \leqslant \pi)$$

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta, \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{e^2} \frac{EI}{EA_s}$$

где e — параметр, характеризующий подъемистость арки, P — распор, $W(\eta, \tau)$ — координата упругой линии, измеренная в долях e, τ — параметр времени.

Для синусоидальной двухшарнирной арки, полагая

$$W_0 = -\sin \eta, \quad W = x_1(\tau) \sin \eta + x_2(\tau) \sin 2\eta$$

получим связанную систему двух нелинейных уравнений относительно коэффициентов первых двух мод арки

$$d^2 x_1/d\tau^2 + \varepsilon^2 (x_1 + 1) + {}^1/_4 (x_1{}^2 + 4x_2{}^2 - 1) x_1 = 0$$

$$d^2 x_2/d\tau^2 + 16\varepsilon^2 x_2 + (x_1{}^2 + 4x_2{}^2 - 1) x_2 = 0$$

где малый параметр стоит при линейных членах и тем самым прямое построение соответствующего асимптотического решения затруднено.

В рассматриваемой плоскости первых двух мод выражения для кинетической энергии и потенциальной энергии упругих деформаций легко восстанавливаются по виду уравнений движения. Имеем

$$T = {}^1/_2\,(x_1^{\cdot 2} + x_2^{\cdot 2})(^{\cdot} \equiv d/d\tau), \quad \Pi = {}^1/_2 f^2 + \varepsilon^2\Phi \tag{12}$$

$$f = {}^1/_4\sqrt{2}\,(x_1^2 + 4x_2^2 - 1), \quad \Phi = {}^1/_2\,(x_1 + 1)^2 + 8x_2^2$$

Многообразие $f(x_1, x_2) = 0$ в данном случае представляет собой эллипс на координатной плоскости x_1x_2. Это — геометрическое место конфигураций арки без деформаций растяжения — сжатия центральной линии. Перемещению по эллипсу отвечают чистые изгибания арки.

Представив уравнение эллипса в виде

$$x_1 = y_1 = -\cos\theta, \quad x_2 = y_2 = {}^1/_2\sin\theta$$

найдем $\omega = [{}^1/_2\,(1 + 3\sin^2\theta)]^{1/2}$, $dS^2 = {}^1/_2\omega^2 d\theta^2$. Поэтому выражение (11) приобретет вид

$$\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\omega\, d\theta}{2\sqrt{h - F(\theta)}} = \varepsilon t, \quad \theta_0 = \theta\,|_{t=0}$$

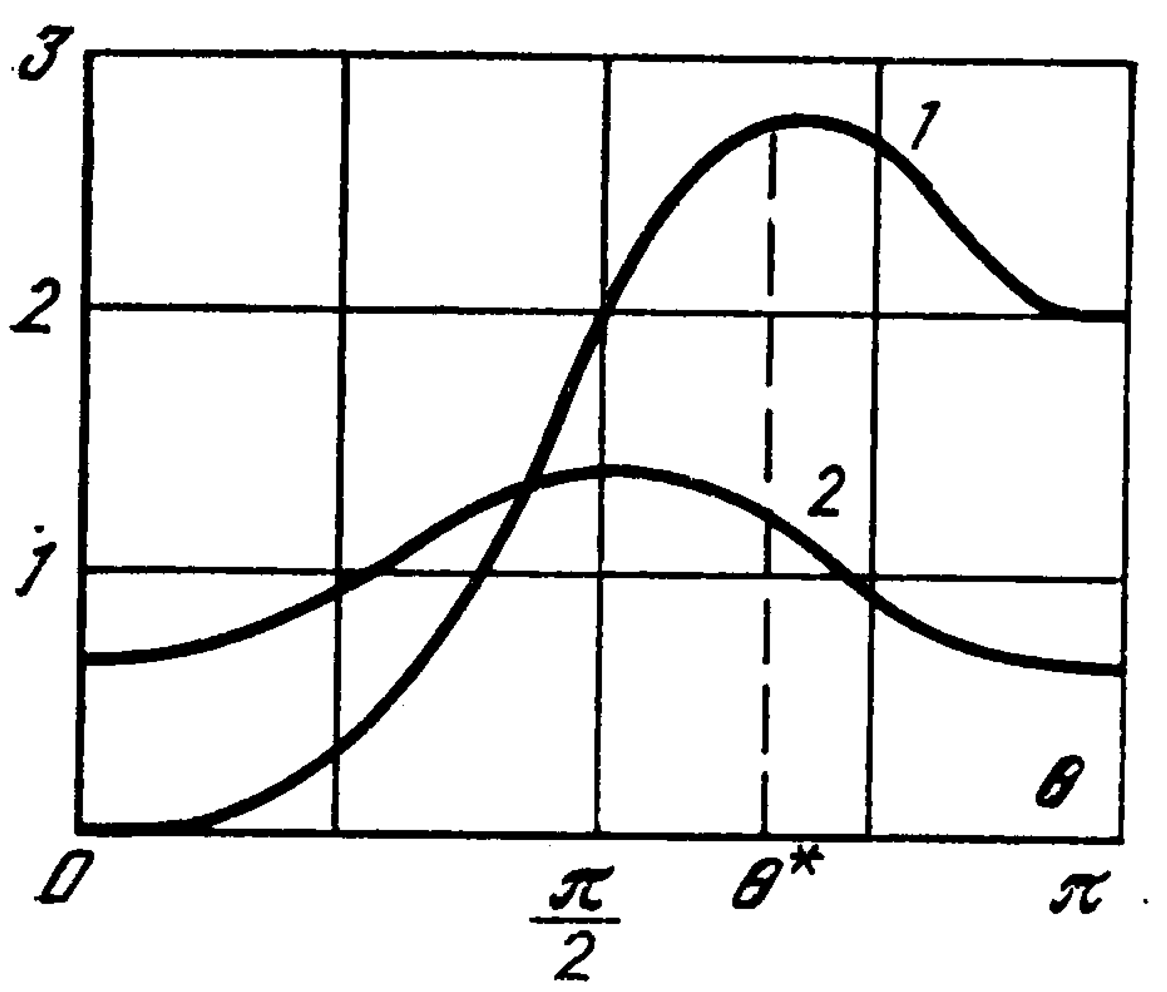
$$F(\theta) = I\omega(\theta) + {}^1/_2\,(5 - 2\cos\theta - 3\cos^2\theta)$$

Приведем также необходимые для расчета величины

$$U_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\omega}(16 - \cos\theta - 15\cos^2\theta), \quad U_2 = \frac{1}{4\omega^2}(64 - 63\cos^2\theta)$$

$$V_1 = \frac{\sqrt{2}}{8\omega}(16 - 15\cos^2\theta), \quad V_2 = \frac{1}{64\omega^4}(16 - 15\cos^2\theta)^2$$

На фиг. 2 показаны зависимости $F(\theta)\,|_{I=0}$ (кривая 1); $\omega(\theta)$ (кривая 2); $\cos\theta^* = -{}^1/_3$. Поскольку при $I \neq 0$ имеем $F(\theta) = F(\theta)\,|_{I=0} + I\omega(\theta)$, то можно заключить, что высокочастотные осцилляции, связанные с деформациями растяжения — сжатия (слагаемое $I\omega$ в выражении для $F(\theta)$) увеличивают потенциальный барьер между исходным ($\theta = 0$) и «перевернутым» ($\theta = \pi$) равновесными положениями арки и тем самым делают арку более устойчивой относительно прощелкивания. Подчеркнем, что речь здесь идет о тонкостенных арках ($\varepsilon^2 \ll 1$), прощелкивание которых сопровождается выпучиванием по кососимметричной форме.



Фиг. 2

Пример 2. Рассмотрим тонкостенное круговое кольцо. В рамках теории пологих оболочек уравнение свободных колебаний кольца может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2} + \varepsilon^2\frac{\partial^4 W}{\partial\eta^4} - P\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2} - 1\right) = 0 \quad (0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi)$$

$$P = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[W + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)^2\right] d\eta$$

где параметр ε пропорционален относительной толщине кольца; величина W отсчитывается в сторону внешней нормали от недеформированного положения центральной линии.

Полагая

$$W = x_1 + \sqrt{2}x_2\cos 2\eta$$

аналогично предыдущему примеру получим соотношения (12), где

$$f = x_1 + 2x_2^2, \quad \Phi = 8x_2^2$$

Таким образом, многообразие M_f в этом случае имеет вид параболы на плоскости x_1x_2. Положение точки на параболе однозначно определяется координатой y_2, через которую и выразим необходимые для расчета величины:

$$\omega = (1 + 16y_2^2)^{1/2}, \quad dS^2 = \omega^2 dy_2^2$$

$$\int\limits_{y_2^0}^{y_2} \frac{\omega(y_2)\,dy_2}{\sqrt{2[h - F(y_2)]}} = \varepsilon t, \quad F(y_2) = \bar{I}\omega + 8y_2^2$$

$$U_1 = \frac{64}{\omega} y_2^2, \quad U_2 = \frac{128}{\omega^2} y_2^2, \quad V_1 = \frac{32}{\omega} y_2^2, \quad V_2 = \frac{512}{\omega^4} y_2^4$$

Отметим, что кольцо, в отличие от арки, не обладает возможностью прощелкивания и влияние высокочастотных осцилляций с растяжением — сжатием центральной линии сводится здесь к увеличению эффективной изгибной жесткости кольца.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маневич Л. И., Пилипчук В. Н.* Нелинейные колебания трехзвенной механической системы с несколькими положениями равновесия // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 2. С. 97—103.
2. *Пилипчук В. Н.* Об одном методе исследования нелинейных задач динамики прямоугольных пластин с начальными неправильностями // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 2. С. 78—85.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
4. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
5. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 132 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
25.III.1988