Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 539.3

# КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫЕ ПЛАСТИНЫ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Вигдергауз С. Б.

Отыскиваются формы конечного числа инородных включений в упругой плоскости, минимизирующие ее потенциальную энергию деформации при заданном на бесконечности однородном поле напряжений; площадь включений считается известной, а их контакт с основным материалом пластины (матрицей) — идеальным. Показано, что при состоянии, близком к всестороннему сжатию, граница каждого включения оптимальна, если силовое взаимодействие материалов вдоль нее сводится к постоянному давлению определенной интенсивности. При этом поле напряжений во включениях оказывается однородным, а искомые границы — равнопрочными. Их фактическое определение сводится к решению (в ряде случаев — явному) хорошо изученного варианта краевой задачи сопряжения для аналитических функций.

1. Пусть $\Gamma$ — совокупность $m$ гладких замкнутых кривых $\Gamma_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, произвольно расположенных во внешности одна другой в плоскости $E$ комплексной переменной $z = x + iy$, $S_k$ — односвязную область площади $q_k$ внутри $\Gamma_k$, $S_0$ — многосвязную бесконечную область, дополняющую $S_- = \bigcup S_k$ до $E$, $n$, $t$ — орты локальной криволинейной системы координат на $\Gamma$ вдоль нормали и касательной к ней в любой точке $\xi$.

Каждая из перечисленных $m + 1$ областей занята своим однородным и изотропным линейно-упругим материалом одинаковой малой толщины $h$ с модулем сдвига $\mu_j$ и коэффициентом Пуассона $\nu_j$, $j = 0, 1, \ldots, m$, наряду с которыми вводится и постоянная $\varkappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$, отвечающая обобщенному плоскому напряженному состоянию [1]. Для определенности положим, что $\mu_0 \geqslant \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Условия нагружения задаются компонентами тензора напряжений $T_\infty$ на бесконечности

$$\sigma_\alpha^\infty = P_0, \quad \sigma_y^\infty = Q_0, \quad \tau_{xy}^\infty = 0 \tag{1.1}$$

Рассмотрим задачу минимизации энергии деформации пластинки за счет выбора оптимальной формы контуров $\Gamma_k$. В принятых обозначениях имеем

$$U(\varkappa_j, \ \mu_j, \ \Gamma_k, \ q_k, \ P_0, \ Q_0) \to \min_{\{\Gamma\}} = U_0 \tag{1.2}$$

Плотность энергии $w(z)$ в каждой точке пластины представима через инварианты $I_1$, $I_2$ тензора напряжений $T(z)$ [1]:

$$8\mu_j(1 + \nu_j) w(z) = h[I_1^2(z) + 2(1 + \nu_j) I_2(z)] \tag{1.3}$$
$$z \in S_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m$$

Кривые $\Gamma_k$ — линии разрыва $w(z)$. Для функций такого рода их предельные значения на $\Gamma$ со стороны $S_0$ и $S_-$ будут обозначаться индексами плюс и минус соответственно.

Из (1.1) вытекает следующая асимптотика при $|z| \to \infty$:

$$I_1(z) = a_0 + O(|z|^{-2}), \quad a_0 = P_0 + Q_0$$
$$4I_2(z) = b_0^2 - a_0^2 + O(|z|^{-4}), \quad b_0 = Q_0 - P_0$$

$$16\mu_0(1+\nu_0)\,w(z) = \mathrm{c}h + O(|z|^{-4})$$
$$c = (1-\nu_0)\,a_0^2 + (1+\nu_0)\,b_0^2$$

С учетом этого регуляризованный функционал запишем как сходящийся интеграл по $E$:

$$U = \int\limits_{S_0} [w(x,y) - c]\,dx\,dy + \int\limits_{S_-} w(x,y)\,dx\,dy \tag{1.4}$$

Первый член в (1.4) отвечает возмущению однородного поля (1.1) в $S_0$, вносимому включениями, а второй — их собственной деформации. При заданных усилиях $P_0$, $Q_0$ минимум $U$ соответствует, очевидно, пластине максимальной жесткости.

Компоненты тензора $T(z)$ определяются в каждой области через пару голоморфных в ней потенциалов $\varphi(z)$, $\psi(z)$, связанных на $\Gamma$ граничными условиями непрерывности вектора смещений $(u_0(z),\ v_0(z))$ и нормальных усилий $\sigma_n(\xi)$, $\tau_{nt}(\xi)$:

$$\mu_k[\varkappa_0\varphi_0(\xi) - \xi\overline{\varphi_0'(\xi)} - \overline{\psi_0(\xi)}] = \mu_0[\varkappa_k\varphi_k(\xi) - \xi\overline{\varphi_k'(\xi)} - \overline{\psi_k(\xi)}] \tag{1.5}$$

$$\varphi_0(\xi) + \xi\overline{\varphi_0'(\xi)} + \overline{\psi_0(\xi)} = \varphi_k(\xi) + \xi\overline{\varphi_k'(\xi)} + \overline{\psi_k(\xi)} = f_k(\xi) \tag{1.6}$$

$$\xi \in \Gamma_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

$$4\varphi_0(z) = a_0 + O(|z|^{-1}), \quad 2\psi_0(z) = b_0 + O(|z|^{-1}),$$
$$|z| \to \infty \tag{1.7}$$

$$I_1(z) = 4\operatorname{Re}\varphi_j'(z), \quad I_1^2(z) + 4I_2(z) = \tag{1.8}$$
$$= 4\,|\bar z\varphi_j''(z) + \psi_j'(z)|^2, \quad z \in S_j, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

Функции $f_k(z)$, определяющие контактные усилия между матрицей и включениями, выписаны явно для удобства изложения.

Поставим задачу (1.1) как вариационную — о стационарном значении величины $U$ в форме (1.4) при подвижных контурах $\Gamma_k$ и изопериметрических ограничениях на площади областей $S_k$ ($dl = |d\xi|$ — дифференциал длины дуги контура):

$$\int\limits_{\Gamma_k}\left(x\frac{\partial x}{\partial n} + y\frac{\partial y}{\partial n}\right)dl = \int\limits_{\Gamma_k}\left(x\frac{\partial y}{\partial l} - y\frac{\partial x}{\partial l}\right)dl = 2q_k \tag{1.9}$$

С использованием обычной техники варьирования [2, 3] получаются уравнения равновесия среды в областях $S_j$ и условие стационарности на $\Gamma$ в виде соотношения для скачка функции $w(z)$:

$$w^+(\xi) - w^-(\xi) = \lambda_k, \quad t \in \Gamma_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \tag{1.10}$$

Оно заведомо соблюдается, если форма контуров $\Gamma_k$ такова, что силовое взаимодействие фаз вдоль каждого из них сводится только к нормальному давлению своей постоянной величины $p_k$ и, значит, с точностью до несущественных слагаемых: $f_k(\xi) = p_k\xi$. Априорное задание таких усилий дает возможность для контуров любого вида решить задачу (1.6) во внутренних областях по отдельности: $2\varphi_k(z) = p_k z$, $\psi_k(z) = 0$, $z \in S_k$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$. При этом поле напряжений в них, согласно (1.8), однородно:

$$I_1(z) = \mathrm{const} = 2p_k, \quad I_2(z) = \mathrm{const} = -p_k^2, \quad z \in S_k \tag{1.11}$$

и, в частности, $w^-(\xi) = \mathrm{const}$. Тогда из (1.10) следует, что и $w^+(\xi) = \mathrm{const}$. При учете представления $I_1(\xi) = \sigma_n + \sigma_t$, $I_2(\xi) = \tau_{nt}^2 - \sigma_n\sigma_t$ в системе координат $(n,\ t)$ на $\Gamma$, а также условий $\sigma_n^+ = p_k$, $\tau_{nt}^+ = 0$ это равносильно известному требованию равнопрочности [2] искомых контуров: $\sigma_t^+ = \mathrm{const}$, которое ранее выставлялось в ряде работ как необходимое условие оптимальности по локальному критерию пластичности Мизеса [1] в пластине с отверстиями, а не с упругими включениями. Вариационным методом для энергетического критерия оно получено в [3].

Теперь задача (1.6) для области $S_0$ при данной нагрузке на равнопрочных границах раздела сред совпадает с рассмотренной в [4], где в частности показано, что $4\varphi_0 = a_0 z$, $z \in S_0$, $\sigma_t^+ = a_0 - \sigma_n^+ = a_0 + p_k$, а для $\psi_0(z) = b_0 \bar{z} + \Omega_0(z)$ из (1.6) следует краевое условие

$$2\psi_0(\xi) = (2p_k - a_0)\bar{\xi}, \quad \xi \in \Gamma_k \tag{1.12}$$

С другой стороны, исключение $\psi_0(\xi)$ из (1.5), (1.6) после преобразований дает на контуре $\Gamma_k$

$$p_k = -\sigma_n^- = \frac{\mu_k(\varkappa_0 + 1)a_0}{2\mu_0(\varkappa_k - 1) + 4\mu_k}, \quad \sigma_t^- = \sigma_n^- \tag{1.13}$$

Характерно, что величина давления зависит только от шаровой части тензора $T_\infty$.

Найдем теперь значение $U_0$ для равнопрочных границ. Из (1.11) вытекает, что плотность энергии $w(z)$ во внутренних областях $S_k$ постоянна, а в $S_0$ при учете предыдущих рассуждений и соотношений Коши — Римана для функций $\rho_1(z) = \mathrm{Re}\,\psi_0(z)$ и $\rho_2(z) = \mathrm{Im}\,\psi_0(z)$ она приводится к виду

$$w(x, y) - c \sim |\psi_0'(z)|^2 - {}^1/_4 b_0^2 = \mathrm{grad}^2\, \rho_1(z) - {}^1/_4 b_0^2$$

В результате первое слагаемое в (1.4) на основании формулы Грина и асимптотики (1.7) преобразуется в криволинейный интеграл по $\Gamma$ от $\rho_1(\xi)\,\partial\rho_1(\xi)/\partial l$. В силу тождеств $2\rho_1(\xi) = (2p_k - a_0)x$, $\partial\rho_1(\xi)/\partial l = (2p_k - a_0)\,\partial y/\partial l$, $x + iy = \xi \in \Gamma_k$, следующих из (1.12), он сводится к (1.9) и поэтому пропорционален сумме площадей всех включений.

В результате получается

$$U = \frac{h}{4}\sum_{k=1}^{m} \frac{(a_0 - 2p_k)^2 + b_0^2}{4\mu_0} q_k + \frac{(1 - \nu_k)p_k^2}{\mu_k(1 + \nu_k)} q_k$$

Подстановка выражений (1.13) для $p_k$ дает окончательно

$$U = \frac{h}{32\mu_0}\sum_{k=1}^{m} \times$$

$$\times \frac{2a_0^2\{[\mu_0(\varkappa_k - 1) - \mu_k(\varkappa_0 - 1)]^2 + \mu_0\mu_k(\varkappa_0 + 1)(\varkappa_k - 1)^2\} + b_0^2}{[\mu_0(\varkappa_k - 1) + 2\mu_k]^2} q_k$$

2. Существование равнопрочных контуров связано с разрешимостью условия (1.12) для функции $\psi_0(z)$ — единственного потенциала, явно зависящего от формы $\Gamma$ (через соотношение между $\xi$ и $\bar{\xi}$). Она находится одновременно с самими оптимальными границами [5] как решение односторонней кривой задачи

$$(a_0 - 2p_k)\,\omega_0(\eta) + 2\psi_0(\eta) = 0, \quad \eta \in L_k, \tag{2.1}$$
$$k = 1, 2, \ldots, m$$

порождаемой тождеством (1.12) при конформном отображении вспомогательной плоскости переменной $\eta$ во внешности $L_k$ — параллельных разрезов или окружностей.

В [4] установлена безусловная разрешимость задачи (1.14) при любых значениях параметров нагрузки в классе многозначных аналитических функций. Естественное требование однозначности накладывает на величины $a_0$, $b_0$ дополнительное ограничение, которое следующим образом выводится из свойств (однозначного) вектора смещений $(u_0(z), v_0(z))$.

Вычтем из него слагаемое

$$\left(\frac{(\varkappa_0-1)a_0-2b_0}{8\mu_0}x,\ \frac{(\varkappa_0-1)a_0+2b_0}{8\mu_0}y\right)$$

отвечающее однородному полю (1.1). Преобразованный вектор $(u(z), v(z))$ убывает на бесконечности, в силу тождеств $I_1(z)=\text{const}$, $z\notin\Gamma$, гармоничен в областях $S_j$, $j=0, 1, \ldots, m$, всюду непрерывен и согласно (1.5), (1.6), (1.3) принимает на $\Gamma_k$ значения:

$$\begin{aligned}&u^+(\xi)=u^-(\xi)=(2\mu_0)^{-1}(Q_0-p_k)x,\quad v^+(\xi)=\\&=v^-(\xi)=(2\mu_0)^{-1}(P_0-p_k)y,\quad \xi=x+iy\in\Gamma_k,\\&k=1, 2, \ldots, m\end{aligned}\tag{2.2}$$

Из условий нагружения получается [1], что

$$\frac{\partial u^+(\xi)}{\partial n}=-\frac{P_0-p_k}{Q_0-p_k}\frac{\partial u^-(\xi)}{\partial n},\quad \frac{\partial v^+(\xi)}{\partial n}=\frac{Q_0-p_k}{P_0-p_k}\frac{\partial v^-(\xi)}{\partial n},\ \xi\in\Gamma_k\tag{2.3}$$

Домножая обе части первого из соотношений (2.3) на $u(\xi)$, интегрируя по $\Gamma_k$ и затем суммируя по $k$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma_k}u^+(\xi)\frac{\partial u^+(\xi)}{\partial n}dl=\sum_{k=1}^{m}\frac{P_0-p_k}{Q_0-p_k}\int\limits_{\Gamma_k}u^-(\xi)\frac{\partial u^-(\xi)}{\partial n}dl$$

По формуле Грина все построенные интегралы неотрицательны, откуда вытекает необходимое условие существования равнопрочных границ рассмотрение $v(z)$ вместо $u(z)$ приводит к нему же)

$$\min_k(P_0-p_k)(Q_0-p_k)^{-1}\geqslant 0$$

(или при учете (1.13) — в равносильной форме

$$\left|\frac{b_0}{a_0}\right|\leqslant\min_k\left|\frac{\mu_0(\varkappa_k-1)-\mu_k(\varkappa_0-1)}{\mu_0(\varkappa_k-1)+2\mu_k}\right|\tag{2.4}$$

Когда все $\mu_k=0$ (плоскость с равнопрочными отверстиями), неравенство (2.4) переходит в соотношение $|b_0/a_0|\leqslant 1$, полученное [5] как требование однолистности функции $\omega_0(\eta)$ из (2.1). В общем же случае допустимое значение $b_0=\text{dev}\,T_\infty$ ограничено сверху включением, по своим упругим свойствам наиболее близким к матрице, поскольку компоненты тензора $T(z)$ около общей границы таких материалов, согласно условиям непрерывности (1.5), (1.6), также должны быть близки между собой а в соответствии с (1.11) $\text{dev}\,T(z)\equiv 0$ во всех включениях.

При учете (2.4) функция $\omega_0(\eta)$, задающая очертания оптимальной границы, находится [4] из численного решения регулярного интегрального уравнения, равносильного задаче (2.1). Если материал всех включений одинаков и, значит, $p_k=p_1$, $k=1, 2, \ldots, m$, то их оптимальные границы совпадают, как следует из предыдущего, с равнопрочными границами свободных отверстий в плоскости под измененной нагрузкой $P_0'=P_0+p_1$, $Q_0'=Q_0+p_1$ на бесконечности. При некоторой симметрии их расположения задача (2.1) решается в квадратурах [5]. Примеры таких контуров имеются в [4—6].

В частности, равнопрочная граница одиночного включения — эллипс [5] с отношением осей, равным $b_0/(a_0 - 2p_1)$. Однородность поля напряжений внутри него впервые отмечена, безотносительно к оптимальности, в [7].

3. Пусть граница Г оптимальна для параметров $P_0$, $Q_0$ нагрузки (1.1), а упругие модули всех включений равны между собой: $\mu_k = \mu_1$, $\nu_k = \nu_1$, так что и $\varkappa_k = \varkappa_1$. Тогда решение краевой задачи (1.5), (1.6) в замкнутой форме существует и в более общем случае произвольных значений усилий на бесконечности: $\sigma_x^\infty = P$, $\sigma_y^\infty = Q$, $\tau_{xy}^\infty = 0$. При этом потенциалы $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ в области $S_-$ линейны по $z$, а $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ выражаются через голоморфную в $S_0$ и убывающую на бесконечности функцию $\Omega_0(z)$ из разд. 1, которая, согласно (1.12), (1.13), удовлетворяет на Г тождеству

$$2\Omega_0(z) = d_0\bar{\xi} - b_0\xi, \quad d_0 = \frac{\mu_1(\varkappa_0 - 1) - \mu_0(\varkappa_1 - 1)}{2\mu_1 + \mu_0(\varkappa_1 - 1)} a_0, \quad \xi \in \Gamma \quad (3.1)$$

Для доказательства представим указанные функции в виде, который обеспечивает их голоморфность и соблюдение необходимой асимптотики:

$$\begin{gathered} 4\varphi_0(z) = az + 4D_0\Omega_0(z), \quad 2\psi_0(z) = bz + \\ + 2D_0'\Omega_0(z) - 2[b_0z + 2\Omega_0(z)]\, d_0^{-1}D_0\Omega_0'(z) \\ a = P + Q, \quad b = Q - P, \quad z \in S_0 \\ \varphi_1(z) = D_1z, \quad \psi_1(z) = D_1'z, \quad z \in S_- \end{gathered} \quad (3.2)$$

$D_0$, $D_0'$, $D_1$, $D_1'$ — некоторые действительные постоянные.

Подстановка этих выражений в соотношении (1.5), (1.6) дает

$$\begin{gathered} \mu_k[{}^1/_4(\varkappa_0 - 1)a\xi + \varkappa_0D_0\Omega_0(\xi) - {}^1/_2b\bar{\xi} - D_0'\overline{\Omega(\xi)}] - \\ - \mu_0[(\varkappa_k - 1)D_1\xi - D_1'\bar{\xi}] = 0 \\ {}^1/_2a\xi + D_0\Omega_0(\xi) + {}^1/_2b\bar{\xi} + D_0'\overline{\Omega_0(\xi)} - 2D_1\bar{\xi} - 2D_1'\bar{\xi} = 0 \end{gathered}$$

Заменяя в полученных тождествах функцию $\Omega_0(\xi)$ при помощи условия (3.1) и приравнивая затем нулю коэффициенты при $\xi$ и $\bar{\xi}$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых постоянных

$$\begin{gathered} \mu_1\varkappa_0b_0D_0 + \mu_1d_0D_0' + 2\mu_0(\varkappa_1 - 1)D_1 = {}^1/_2\mu_1(\varkappa_0 - 1)a \\ \mu_1\varkappa_0d_0D_0 + \mu_1b_0D_0' + 2\mu_0D_1' = \mu_1b \\ b_0D_0 - d_0D_0' + 4D_1 = a, \quad -d_0D_0 + b_0D_0' + 2D_1' = b \end{gathered}$$

Ее решение имеет вид

$$\begin{gathered} D_0 = \Delta^{-1}(ab_0 - bd_0)(\mu_1 - \mu_0)[\mu_1(\varkappa_0 - 1) - \mu_0(\varkappa_1 - 1)], \\ D_0' = \Delta^{-1}(b_0b\Delta_1 - ad_0\Delta_2) \\ 4D_1 = a - b_0D_0 + d_0D_0', \quad 2D_1' = b + d_0D_0 - b_0D_0' \\ \Delta = b_0^2\Delta_1 - a_0d_0\Delta_2, \quad \Delta_1 = (\mu_1 - \mu_0)[2\mu_1\varkappa_0 - \mu_0(\varkappa_1 - 1)] \\ \Delta_2 = (\mu_1\varkappa_0 + \mu_0)[\mu_1(\varkappa_0 - 1) - \mu_0(\varkappa_1 - 1)] \end{gathered}$$

Видно, что эти постоянные не зависят от числа и взаимного расположения включений. Когда нагрузка оптимальна для данной формы $\Gamma : P = P_0$, $Q = Q_0$ и, значит, $a = a_0$, $b = b_0$, они, разумеется, принимают значения, найденные в разд. 1: $D_0 = D_1' = 0$, $D_0' = 1$, $2D_1 = p_1$.

Из (1.8), (3.2) следует, что поле напряжений во включениях с равнопрочной границей остается однородным при любых значениях нагрузки:

$$\sigma_x(z) = 2D_1 + D_1', \quad \sigma_y(z) = 2D_1 - D_1', \quad \tau_{xy}(z) = 0, \quad z \in S_-$$

хотя в отличие от (1.11) тензор $T(z)$ и перестает, вообще говоря, быть шаровым. Таким образом, свойство однородности поля характерно для классов совокупностей плоских кривых равнопрочной формы, параметрически зависящих от отношений $b_0/a_0$, $\varkappa_0/\varkappa_1$, $\mu_0/\mu_1$.

Напряжения на Г в системе координат $n$, $t$ находятся из (3.2) по общим формулам плоской теории упругости [1]

$$\sigma_n^+(\xi) = \sigma_n^-(\xi) = 2D_1 + D_1' [1 - 2(\partial x/\partial n)^2]$$
$$\tau_{nt}^+(\xi) = \tau_{nt}^-(\xi) = 2D_1'\partial x/\partial n \times \partial y/\partial n$$
$$\sigma_t^+(\xi) = a - 4D_0b_0 - 2D_1 + (2D_0d_0 - D_1)[1 - 2(\partial x/\partial n)^2]$$
$$\sigma_t^-(\xi) = 2D_1 - D_1' [1 - 2(\partial x/\partial n)^2], \quad \xi = x + iy \in \Gamma$$

Здесь использованы легко проверяемые соотношения

$$\operatorname{Re}\frac{\partial\bar\xi}{\partial\xi} = 1 - 2\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2, \quad \operatorname{Im}\frac{\partial\bar\xi}{\partial\xi} = 2\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}$$

а также продифференцированное по $\xi$ тождество (3.1).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
3. *Куршин Л. М., Расторгуев Г. И.* К задаче о подкреплении контура отверстия в пластинке безмоментным упругим стержнем // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 905—915.
4. *Вигдергауз С. Б.* Об одном случае обратной задачи двумерной теории упругости // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 902—908.
5. *Черепанов Г. П.* Обратные задачи плоской теории упругости // ПММ, 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 963—979.
6. *Вигдергауз С. Б.* Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости // ПММ, 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 566—569.
7. *Hardiman N. J.* Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1954. V. 7. Pt 2. P. 226—230.



Ленинград

Поступила в редакцию 4.IV.1988