Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРУГИЕ ОБЛАСТИ МАКСИМАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Петухов Л. В.

Рассматривается задача о максимизации жесткости (минимизации работы внешних сил) упругой области заданного объема. Управление осуществляется формой области [1—3]. В результате исследования второй вариации получено необходимое условие Лежандра. Оптимальное решение может находиться в классе многосвязных упругих областей. Задача увеличения связности решается при помощи необходимого условия Вейерштрасса сильного максимума. Для оценки глобального максимума строится двойственная задача. Приводится пример области максимальной жесткости.

1. Постановка задачи. В работе [4] были введены понятия области проектирования, допустимой области, вариации области и доказаны теоремы существования первой и второй вариации перемещений упругой области. Обозначим множество допустимых областей Ω, для которых

$$\operatorname{mes}\Omega = \theta < \operatorname{mes}\Omega^\circ \tag{1.1}$$

где Ω° — область проектирования, через $O^s(\lambda)$ (здесь $0 < \lambda < 1$, а s — целое число, характеризующее гладкость границы Γ области Ω [4]).

Сформулируем задачу оптимального проектирования. Пусть заданы модуль сдвига μ, коэффициент Пуассона ν, область проектирования Ω°, коэффициент θ, удовлетворяющий неравенству (1.1), вектор внешних нагрузок $\mathbf{F}$, действующих на границе Γ_F°, и участок границы Γ_u°, на котором перемещения упругой области равны нулю. Требуется найти

$$\inf J(\mathbf{u}),\quad J = \int\limits_{\Gamma_F} F_i u_i\, d\Gamma,\quad \forall\Omega \in O^s(\lambda) \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u} = u_i\mathbf{e}_i$ — решение интегрального тождества

$$\int\limits_{\Omega} A(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, dx - \int\limits_{\Gamma_F} F_i v_i\, d\Gamma = 0,\quad \forall\mathbf{v} \in V(\Omega) \tag{1.3}$$

$$V(\Omega) = \{\mathbf{v} = v_i(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_i \mid v_i \in W_2^{(1)}(\Omega),\ v_i(\mathbf{y}) = 0,\ \mathbf{y} \in \Gamma_u\}$$

$$\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i,\quad A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\,\varepsilon_{kl}(\mathbf{v})$$

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) = {}^1/_2\,(\partial v_k/\partial x_l + \partial v_l/\partial x_k)$$

$\mathbf{e}_i$ — орты декартовой системы координат, x_i — декартовы координаты, u_i — перемещения упругой области, $A(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ — удвоенная удельная потенциальная энергия упругой деформации, $W_2^{(1)}(\Omega)$ — пространство функций С. Л. Соболева [5]. Здесь и везде далее по повторяющимся индексам i, j, k, l, m, n в произведениях предполагается суммирование от 1 до N, где $N = 2$ или 3.

2. Первая и вторая вариации. Составим расширенный функционал, для чего прибавим к правой части (1.2) левую часть (1.3), и найдем первую вариацию

$$\delta J = \int\limits_{\Omega^*} A(\delta\mathbf{u}, \mathbf{v})\, dx + \int\limits_{\Gamma_F} F_i\delta u_i\, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma^*} A(\mathbf{u}^*, \mathbf{v})\,\delta r\, d\Gamma. \tag{2.1}$$

где δr, $\delta \mathbf{u}$ — вариации области Ω^* и перемещения $\mathbf{u}^*$. Здесь предполагается, что оптимальное решение $\Omega^* \in O^s(\lambda)$, $0 < \lambda < 1$, $s \geqslant 4$. Положим $\mathbf{v} = -\mathbf{u}^*$. Тогда из (1.3) и необходимого условия минимума $\delta J \geqslant 0$ получим неравенство

$$\delta J = -\int\limits_{\Gamma^*} A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)\, \delta r\, d\Gamma \geqslant 0 \tag{2.2}$$

которое справедливо при любых допустимых δr [4], удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\Gamma^*} \delta r\, d\Gamma = 0 \tag{2.3}$$

Из неравенства (2.2) и равенства (2.3) следует очевидная теорема.

Теорема 1. Пусть $\Omega^* \in O^s(\lambda)$, где $s \geqslant 4$, $0 < \lambda < 1$ и вектор-функция $\mathbf{u}^*$, являющаяся решением интегрального тождества (1.3) для Ω^*, сообщают минимум функционалу J. Тогда найдется $\zeta > 0$ такое, что

$$A(\mathbf{u}^*(\mathbf{y}),\ \mathbf{u}^*(\mathbf{y})) = \zeta, \quad \mathbf{y} \in \Gamma^* \setminus \Gamma^\circ \tag{2.4}$$

$$A(\mathbf{u}^*(\mathbf{y}),\ \mathbf{u}^*(\mathbf{y})) \geqslant \zeta, \quad \mathbf{y} \in (\Gamma^* \cap \Gamma^\circ) \quad (\Gamma_F{}^\circ \cup \Gamma_u{}^\circ)$$

Получим теперь вторую вариацию функционала (1.2). Учитывая, что $\mathbf{v} = -u^*$, получим

$$\delta^2 J = -\int\limits_{\Gamma^*} \Big\{ 2A(\mathbf{u}^*, \delta\mathbf{u})\, \delta r + \frac{\partial A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)}{\partial \tau_1} \delta^2 r + $$

$$+ A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)\, [\delta^2 r - I_1(\mathbf{t})\, \delta r^2] \Big\}\, d\Gamma \tag{2.5}$$

где $\delta^2 r$ — вторая вариация области Ω^*, $I_1(\mathbf{t})$ — первый инвариант тензора кривизны $\mathbf{t}$ границы Γ^*, а τ_1 — координата, ортогональная к Γ^* [4].

Будем рассматривать вариации δr и $\delta^2 r$ на участках границы $\Gamma^* \setminus \Gamma^\circ$. В этом случае

$$\delta J = 0, \quad \delta^2 J \geqslant 0 \tag{2.6}$$

$A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) = \zeta$ в силу теоремы 1, а

$$\int\limits_{\Gamma^*} [\delta^2 r - I_1(\mathbf{t})\, \delta r^2]\, d\Gamma = 0 \tag{2.7}$$

в силу ограничения (1.1). Из (2.5)—(2.7) следует

$$-\int\limits_{\Gamma^*} \Big[2A(\mathbf{u}^*, \delta\mathbf{u})\, \delta r + \frac{\partial A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)}{\partial \tau_1} \delta r^2 \Big] d\Gamma \geqslant 0 \tag{2.8}$$

Преобразуя первое слагаемое в подынтегральном выражении (2.8), найдем

$$\begin{gathered} A(\mathbf{u}^*, \delta\mathbf{u})\, \delta r = \overline{\nabla} \cdot (\sigma(\mathbf{u}^*) \cdot \delta\mathbf{u}\delta r) + \mathbf{r}_1 \cdot \frac{\partial \sigma(\mathbf{u}^*)}{\partial \tau_1} \cdot \delta\mathbf{u}\delta r + \\ + \mathbf{r}_1 \cdot \sigma(\mathbf{u}^*) \cdot \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \tau_1} \delta r - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}^*) \cdot \delta\mathbf{u}\delta r - \overline{\nabla}\delta r \cdot \sigma(\mathbf{u}^*) \cdot \delta\mathbf{u} \end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\mathbf{r}_1$ — орт внешней нормали к Γ^*, $\nabla = \overline{\nabla} + \mathbf{r}_1 \partial/\partial\tau_1$ — оператор Гамильтона, $\sigma_{ij}(\mathbf{u}^*) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^*)$ — компоненты тензора напряжений. Заметим, что третье слагаемое равно нулю, так как $\mathbf{r}_1 \cdot \sigma(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$ в силу граничных условий на границе оптимальной области. Подставляя правую часть (2.9) в (2.8) и интегрируя первое слагаемое, получим

$$\int\limits_{\Gamma^*} \Big[2\overline{\nabla} \cdot (\sigma(\mathbf{u}^*)\, \delta r) \cdot \delta\mathbf{u} - \frac{\partial A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)}{\partial \tau_1} \delta r^2 \Big] d\Gamma \geqslant 0 \tag{2.10}$$

Первое слагаемое в подынтегральном выражении (2.10) является квадратичной формой, зависящей от δr и $\overline{\nabla}\delta r$, так как $\delta\mathbf{u}$ определяется интегральным тождеством, силовая нагрузка в котором — $\overline{\nabla}\cdot[\sigma(\mathbf{u}^*)\,\delta r]$ [4]. Используя его, получим

$$\int\limits_{\Gamma^*} \overline{\nabla}\cdot[\sigma(\mathbf{u}^*)\,\delta r]\cdot\delta\mathbf{u}\,d\Gamma = \int\limits_{\Omega^*} A(\delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u})\,dx \geqslant 0$$

откуда следует, что необходимое условие Лежандра для задачи максимизации жесткости всегда выполняется.

3. Необходимое условие Вейерштрасса. Для получения необходимого условия Вейерштрасса в точке $\mathbf{x}_0 \in \Omega^* \in O^4(\lambda)$, $0 < \lambda < 1$, выберем такое $\eta_0 > 0$, чтобы шар $\overline{U}(\mathbf{x}_0, \eta_0) \subset \Omega^*$, $(U(\mathbf{x}_0, \eta_0) = \{\mathbf{x} \,\|\, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \,| < \eta_0\})$. Рассмотрим односвязную область Ω_0, звездную относительно $\mathbf{x}_0$, причем $\overline{\Omega}_0 \subset U(\mathbf{x}_0, \eta_0)$. Возьмем любой вектор $\mathbf{y} \in \Gamma_0$ (Γ_0 — граница Ω_0) и проведем в нее из точки $\mathbf{x}_0$ вектор $\mathbf{r}(\mathbf{y})$. Если рассмотреть множество точек $\eta\mathbf{r}(\mathbf{y})$, то получится граница $\Gamma_0(\eta)$, которая выделяет область $\Omega_0(\eta)$, причем $\Omega_0 = \Omega_0(1)$, $\Gamma_0 = \Gamma_0(1)$, $\overline{\Omega}_0(\eta) \subset U(\mathbf{x}_0, \eta_0)$, $0 < \eta < \eta_0$. Область $\Omega_0(\eta)$ можно получить из Ω_0, если все ее линейные размеры изменить в η раз, поэтому

$$\operatorname{mes}\Omega_0(\eta) = \eta^N \operatorname{mes}\Omega_0 \tag{3.1}$$

Построим теперь семейство областей $\Omega(\eta) \in O^s(\lambda)$. Для этого «вырежем» в Ω^* полость $\overline{\Omega}_0(\eta)$, $0 < \eta \leqslant \eta_0$, а в некоторой $(N-1)$-мерной клетке границы $\Gamma^* \setminus \Gamma^\circ$ зададим производящую граничную функцию $r(\mathbf{y}, \eta) \geqslant 0$ [4]. Из построения $\Omega(\eta)$ следует

$$\delta r(\mathbf{y}) = \ldots = \delta^{N-1} r(\mathbf{y}) = 0, \quad \delta^N r(\mathbf{y}) \geqslant 0 \tag{3.2}$$

$$\int\limits_{\Gamma^*} \delta^N r\, d\Gamma = \operatorname{mes}\Omega_0 N! \tag{3.3}$$

Продолжим $\mathbf{u}^*$ в область $\Omega(\eta) \setminus \overline{\Omega}^*$ так, что $\mathbf{u}^*$ и все первые производные u^* непрерывны при переходе из Ω^* в $\Omega(\eta)$ в $(N-1)$-мерной клетке, в которой $r(\mathbf{y}, \eta) \geqslant 0$, и представим расширенный функционал ($J(\mathbf{u})$ плюс левая часть интегрального тождества (1.3)) в виде

$$J = \int\limits_{U(\mathbf{x}_0,\eta)\setminus\overline{\Omega}_0(\eta)} A(\mathbf{u},\mathbf{u}^*)\,dx - \int\limits_{\Omega^*\setminus\overline{U}(\mathbf{x}_0,\eta_0)} A(\mathbf{u},\mathbf{u}^*)\,dx - \int\limits_{\Omega(\eta)\setminus\overline{\Omega}^*} A(\mathbf{u},\mathbf{u}^*)\,dx + \int\limits_{\Gamma_F} F_i(u_i + u_i^*)\,d\Gamma$$

В области $U(\mathbf{x}_0, \eta_0) \setminus \overline{\Omega}_0(\eta)$ $\mathbf{u}^*$ является бесконечно дифференцируемой функцией [6], поэтому, применяя в первом интеграле формулу

$$A(\mathbf{u},\mathbf{u}^*) = \nabla\cdot(\sigma(\mathbf{u}^*)\cdot\mathbf{u}) - [\nabla\cdot\sigma(\mathbf{u}^*)]\cdot\mathbf{u}$$

и используя формулу Остроградского, получим

$$J = J_1 + J_2 \tag{3.4}$$

$$J_1 = -\int\limits_{\Gamma_0(\eta)} \mathbf{r}_1\cdot\sigma(\mathbf{u}^*)\cdot\mathbf{u}\,d\Gamma$$

$$J_2 = -\int\limits_{\Omega^*\setminus\overline{\Omega}(\eta)} A(\mathbf{u},\mathbf{u}^*)\,dx + \int\limits_{\Gamma_F} F_i u_i^*\,d\Gamma \tag{3.5}$$

Найдем вариации J_2. Так как для $r(\mathbf{y}, \eta)$ выполняются условия (3.2), то

$$\delta J_2 = \ldots = \delta^{N-1} J_2 = 0, \quad \delta^N J_2 = -\int\limits_{\Gamma^*} A(\mathbf{u}^*,\mathbf{u}^*)\,\delta^N r\,d\Gamma \tag{3.6}$$

откуда и из (2.4) и (3.3) следует

$$\delta^N J_2 = -\zeta N! \,\mathrm{mes}\, \Omega_0 \qquad (3.7)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\delta J_1 = \ldots = \delta^{N-1} J_1 = 0$. Тогда должно выполняться условие Вейерштрасса

$$\delta^N J_1 \geqslant \zeta N! \,\mathrm{mes}\, \Omega_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^* \qquad (3.8)$$

Доказательство. Область Ω^* и $\mathbf{u}^*$ сообщают минимум функционалу J, откуда и из условий теоремы и (3.6) следует, что $\delta J = \ldots = \delta^{N-1} J = 0$, $\delta^N J \geqslant 0$. Учитывая (3.4), (3,7), получаем (3.8).

4. Необходимое условие Вейерштрасса для эллиптического отверстия. ($N = 2$). Для произвольных отверстий Ω_0 определить левую часть условия Вейерштрасса (3.8) не представляется возможным. Однако в двумерном случае для некоторых форм отверстий: эллиптических, гипотрохоидальных и некоторых других можно определить решение $\mathbf{u}$ при $\eta \to 0$ и выразить неравенство (3.8) через напряжения.

Пусть' Ω_0 — эллиптическое отверстие с большой и малой полуосями $a = \eta(1 + \xi)$, $b = \eta(1 - \xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, центр которого помещен в точку x_0 (без ограничения общности можно положить $\mathbf{x}_0 = 0$). Будем считать, что главное напряжение $\sigma_1 = \sigma_1(\mathbf{u}^*(0))$ тензора $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*(0))$ действует под углом β к большой полуоси эллипса. Решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \eta)$, входящее в правые части (3.5), представим в виде суммы $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \eta)$, где $\bar{\mathbf{u}}$ — решение интегрального тождества

$$\int\limits_{\Omega(\eta)} A(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})\, dx + \int\limits_{\Gamma_0(\eta)} \mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{v}\, d\Gamma = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega(\eta)) \qquad (4.1)$$

(Здесь $\mathbf{r}_1$ — орт нормали к $\Gamma_0(\eta)$, внешний по отношению к $\Omega(\eta)$.) Известно, что при $\eta \to 0$ решение $\bar{\mathbf{u}}$ в окрестности $\Gamma_0(\eta)$ с точностью до η совпадает с $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \eta)$ — решением для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием, на границе которого действует нагрузка — $\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*)$. Это решение можно найти по формулам Колосова — Мусхелишвили [7]. Так как необходимо вычислить (3.5), то приведем $\mathbf{u}^0$ на границе рассматриваемого эллипса

$$u_1^\circ + i u_2^\circ = \eta(4\mu)^{-1}[\sigma_1 \Lambda(\beta) + \sigma_2 \Lambda(-\beta)] \qquad (4.2)$$

$$\Lambda(\beta) = \varkappa e^{-i\theta}(e^{2i\beta} - \xi) + e^{i\theta}(1 - \xi e^{2i\beta})$$

Здесь θ — угол, отсчитываемый от оси x_1, а $\varkappa = 3 - 4\nu$ для плоского деформированного состояния и $\varkappa = (3 - \nu)(1 + \nu)^{-1}$ для плоского напряженного состояния. Подставляя в правую часть (3.5) : $\mathbf{u}^*$, (4.2), $\mathbf{r}_1 = -[(1 - \xi)\cos\theta \mathbf{e}_1 + (1 + \xi)\sin\theta \mathbf{e}_2]/R$ и $d\Gamma = \eta R d\theta$, где $R = \sqrt{1 - 2\xi\cos 2\theta + \xi^2}$, после преобразований получим с точностью до слагаемых, пропорциональных η^2

$$J_1 \approx \pi\eta^2(1 - \xi^2) A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) + \pi\eta^2(4\mu)^{-1}\psi(\beta, \xi) \qquad (4.3)$$

$$\psi(\beta, \xi) = (1 + \xi^2\varkappa)(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\varkappa + \xi^2)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - {}$$
$$- 2\xi(1 + \varkappa)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\cos 2\beta$$

Для эллипса $\mathrm{mes}\, \Omega_0 = \pi(1 - \xi^2)$. Подставляя это выражение и (4.3) в (3.8), получим необходимое условие Вейерштрасса для эллипса

$$\psi(\beta, \xi)[4\mu(1 - \xi^2)]^{-1} \geqslant \zeta - A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) \qquad (4.4)$$

Оно должно выполняться для любых допустимых значений β, ξ, поэтому следует решить задачу

$$\min \psi(\beta, \xi)[4\mu(1 - \xi^2)]^{-1}, \; 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, \; 0 \leqslant \xi \leqslant 1 \qquad (4.5)$$

Положим для определенности $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$. Тогда решение задачи (4.5) получается при

$$\beta_0 = 0, \quad \xi_0 = \begin{cases} (\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)^{-1}, & -1 \leqslant \sigma_2\sigma_1^{-1} \leqslant 0 \\ (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_2)^{-1}, & 0 \leqslant \sigma_2\sigma_1^{-1} \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\frac{\psi(\xi_0, \beta_0)}{4\mu(1 - \xi_0^2)} = \begin{cases} -4\varkappa\sigma_1\sigma_2, & -1 \leqslant \sigma_2\sigma_1^{-1} \leqslant 0 \\ 4\sigma_1\sigma_2, & 0 \leqslant \sigma_2\sigma_1^{-1} \leqslant 1 \end{cases}$$

а необходимое условие Вейерштрасса для эллипса примет вид

$$\begin{gathered} A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) - \varkappa\sigma_1\sigma_2\mu^{-1} \geqslant \zeta, \quad -1 \leqslant \sigma_2\sigma_1^{-1} \leqslant 0 \\ A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) + \sigma_1\sigma_2\mu^{-1} \geqslant \zeta, \quad 0 \leqslant \sigma_2\sigma_1^{-1} \leqslant 1 \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0), \quad \sigma_k = \sigma_k(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0)) \end{gathered} \tag{4.6}$$

5. **Необходимое условие Вейерштрасса для эллипсоидальной полости ($N = 3$).** Пусть Ω_0 — эллипсоидальная полость с полуосями $\eta a_1 \geqslant \eta a_2 \geqslant \eta a_3$, центр которой помещен в точку $\mathbf{x}_0$ ($\mathbf{x}_0$ положим равным $\mathbf{0}$). Решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \eta)$, входящее в правую часть (3.5), представим в виде суммы $u = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \eta)$, где $\bar{\mathbf{u}}$ — решение интегрального тождества (4.1). Так же как и в п. 4, найдем $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \eta)$ — решение задачи о трехмерном пространстве с эллипсоидальной полостью, на поверхности которой действует нагрузка $-\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*)$. Это решение известно [8]. Приведем его в точках границы Γ_0

$$u_i^\circ = W_{ij}x_j(2\mu)^{-1}, \quad W_{ii} = 2Z_{ik}B_{kk} \tag{5.1}$$

$$W_{ij} = \left[4(1-\nu)\omega_j + 2\frac{\rho^2 - \xi_i}{\xi_i - \xi_j}\omega_i - 2\frac{\rho^2 - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}\omega_j\right]B_{ij}, \quad (i \neq j)$$

$$Z_{i1} = (1-2\nu)\omega_i, \quad Z_{i2} = (1-2\nu)\omega_i + (2\rho\Delta)^{-1}$$

$$Z_{i3} = (1-2\nu)\frac{(c_1 - c_2)(\rho^2 - \xi_i)}{(c_1 - \xi_i)(c_2 - \xi_i)}\omega_i - \frac{(\rho^2 - c_1)^2}{c_1 - \xi_i}\omega_4 + \frac{(\rho^2 - c_2)^2}{c_2 - \xi_i}\omega_5$$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = e^2, \quad \xi_3 = 1, \quad a_k = \sqrt{\rho^2 - \xi_k}$$

$$\Delta = \Delta(\rho) = \sqrt{(\rho^2 - e^2)(\rho^2 - 1)}, \quad c_{1,2} = (1 + e^2 \pm \sqrt{1 + e^2 + e^4})/3$$

$$\omega_k = \int_\rho^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - \xi_k)\Delta(\lambda)}, \quad \omega_{3+q} = \int_\rho^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - c_q)\Delta(\lambda)}, \quad q = 1, 2$$

Постоянные B_{ij} определяются соотношениями

$$B_{ij} = \sigma_{ij}(2D_{ij})^{-1}, \quad i \neq j, \quad B_{ii} = -Q_{ik}\sigma_{kk}/2$$

$$D_{ij} = (1-\nu)[(\rho\Delta)^{-1} - \omega_i - \omega_j] - [(\rho^2 - \xi_i)\omega_i - (\rho^2 - \xi_j)\omega_j](\xi_i - \xi_j)^{-1}$$

где Q_{ij} — элементы матрицы P^{-1}, элементы матрицы P определены равенствами

$$P_{q1} = (1-2\nu)[\omega_q - (\rho\Delta)^{-1}], \quad P_{q2} = (1-2\nu)\omega_q(\rho^2 - \xi_q)^{-1} + \frac{\nu\omega_k}{\rho^2 - \xi_k} - \frac{1}{2\rho\Delta}\left(\frac{1-2\nu}{\rho^2 - \xi_q} - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\rho^2 - \xi_k}\right)$$

$$P_{q3} = (1-2\nu)\frac{(c_1 - c_2)(\rho^2 - \xi_q)}{(c_1 - \xi_q)(c_2 - \xi_q)}\omega_q + \nu\frac{(c_1 - c_2)(\rho^2 - \xi_k)}{(c_1 - \xi_k)(c_2 - \xi_k)}\omega_k - \frac{(1-\nu)(c_1 - c_2)(\rho^2 - \xi_k)}{(c_1 - \xi_q)(c_2 - \xi_q)\rho\Delta} - \frac{(\rho^2 - c_1)^2}{c_1 - \xi_q}\omega_4 + \frac{(\rho^2 - c_2)^2}{c_2 - \xi_q}\omega_5$$

$$\Delta = \Delta(\rho), \quad q = 1, 2, 3$$

Подставляя (5.1) и $\mathbf{u}^*$ в правую часть (3.5), получим

$$J_1 \approx \frac{4\pi\eta^3}{3} a_1 a_2 a_3 \left[A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) + \frac{1}{2\mu} \psi \right] \tag{5.2}$$

$$\psi = -Z_{ik} Q_{kj} \sigma_{ii} \sigma_{jj} + \sum_{p,q=1,\ p \neq q}^{3} \sigma_{pq}^2 [(1-\nu)(D_{pq}\rho\Delta)^{-1} - 1]$$

Для эллипсоида $\operatorname{mes} \Omega_0 = 4\pi a_1 a_2 a_3/3$. Подставляя это выражение и (5.2) в (3.8), получим необходимое условие Вейерштрасса для эллипсоида

$$\psi (2\mu)^{-1} \geqslant \zeta - A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) \tag{5.3}$$

Неравенство (5.3) должно выполняться при любых допустимых ρ, e и при любом расположении эллипсоида относительно главных осей тензора $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0))$. Обозначим $\boldsymbol{\gamma}$ матрицу направляющих косинусов между главными осями тензора $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0))$ и ортами $\mathbf{e}_i$ декартовой системы координат (γ_{ij} — косинус угла между ортом $\mathbf{e}_i$ и направлением $\sigma_j(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0))$). Введем углы прецессии β_1, нутации β_2 и чистого вращения β_3 (углы Эйлера), выразим γ_{ij} через β_k (см. [9]), представим компоненты тензора $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0))$ в виде $\sigma_{ij} = \sigma_k \gamma_{ik} \gamma_{jk}$ и подставим их в левую часть (5.3). Тогда функция ψ будет зависеть от параметров эллипсоида ρ, e и углов β_1, β_2, β_3, т. е.

$$\psi(\rho, e, \beta_1, \beta_2, \beta_3)(2\mu)^{-1} \geqslant \zeta - A(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0), \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0)) \tag{5.4}$$

Неравенство (5.4) должно выполняться при любых допустимых ρ, e, β_k, поэтому необходимо решить задачу

$$\psi^* = \min \psi(\rho, e, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad 1 \leqslant \rho < \infty \tag{5.5}$$

$$0 \leqslant e \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta_k \leqslant \pi$$

Поскольку явного выражения для ψ относительно аргументов получить не удается, то задача (5.5) может быть решена только численно. Положим для определенности $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$, $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_3^2$ и обозначим $\alpha_1 = \sigma_2/\sigma_1$, $\alpha_2 = \sigma_3/\sigma_1$. На фиг. 1 приведено соотношение ψ^*/σ_1^2 для разных значений α_1 и α_2 при $\nu = 0{,}3$.

6. Двойственная оценка. Для получения двойственной оценки рассмотрим билинейную форму

$$M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega [A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + A(\mathbf{u}, \mathbf{v})]\, dx - \int_{\Gamma_F} F_i v_i \, d\Gamma \tag{6.1}$$

$$\forall\ \Omega \in O^s(\lambda), \quad \forall \mathbf{u}, \ \mathbf{v} \in V(\Omega)$$

Очевидно, что функционал

$$M^\circ(\mathbf{u}) = \sup M(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$$

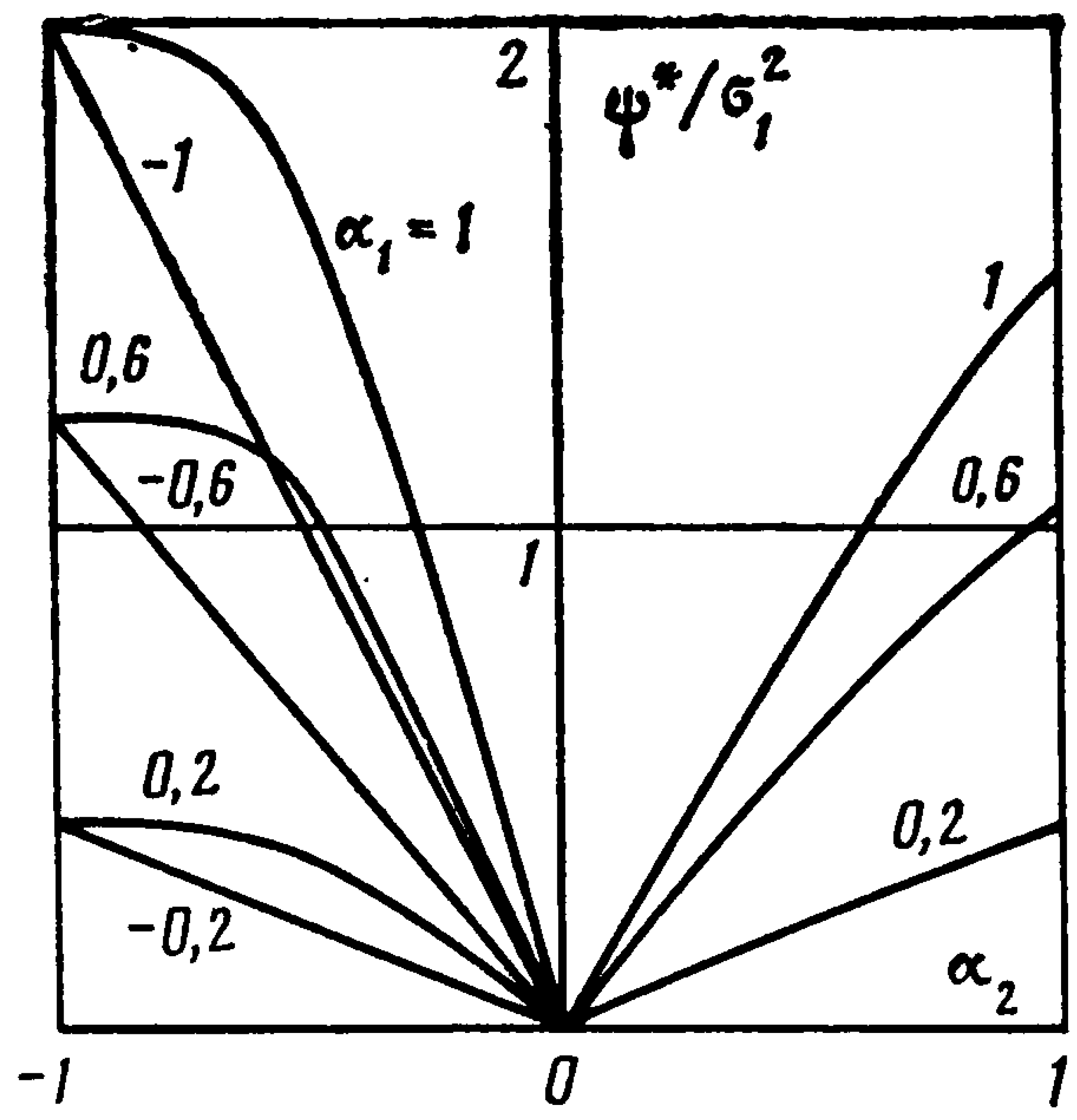
равный работе внешних сил, принимает конечные значения для $\mathbf{u}$, которые удовлетворяют интегральному тождеству (1.3).

Построим теперь функционал

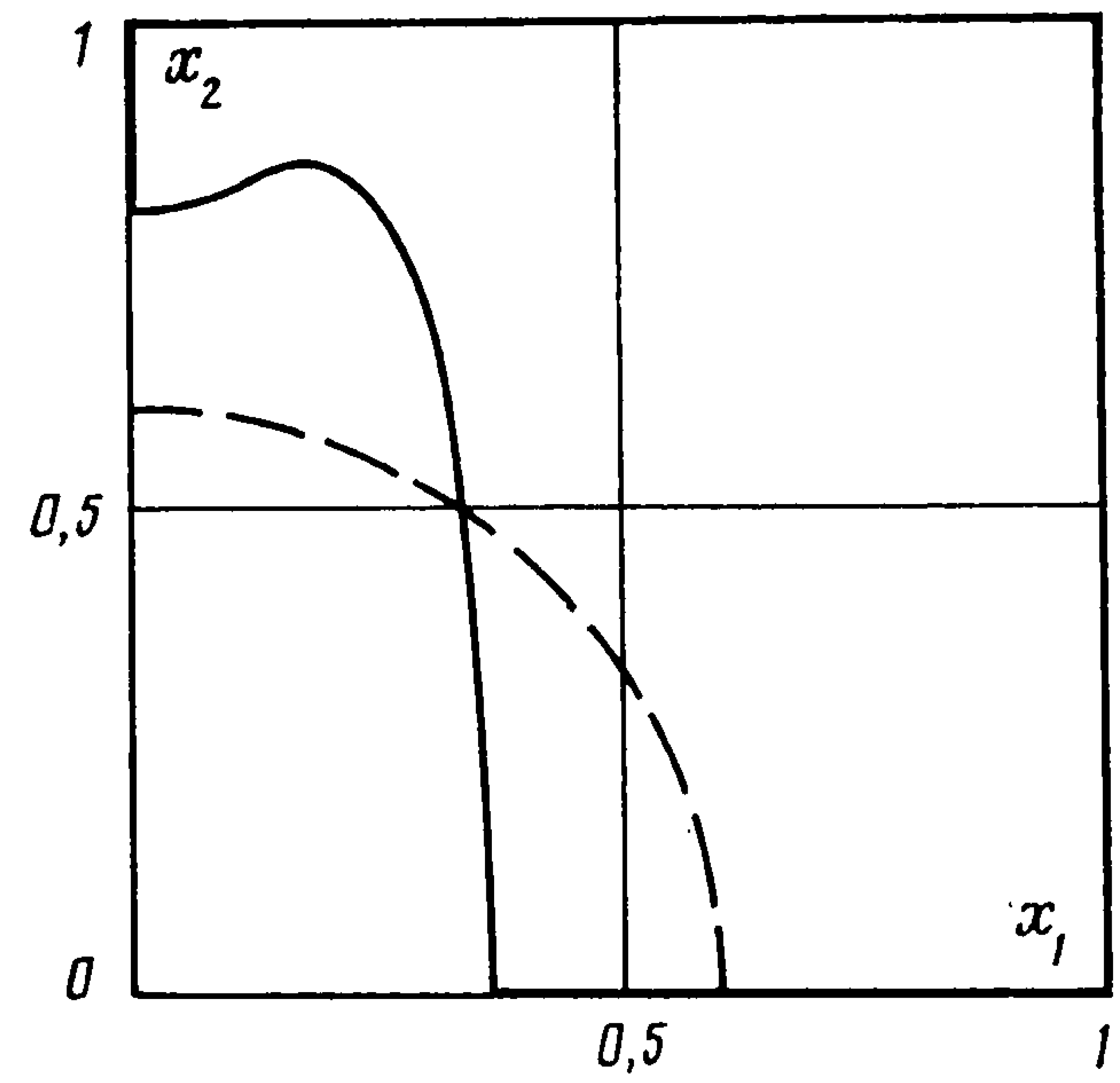
$$M_0(\mathbf{v}) = \inf M(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \Omega \in O, \quad \forall \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \in L_2(\Omega)$$

Так как подынтегральная функция в первом интеграле правой части (6.1) — сильно выпуклая функция относительно $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$, то необходимым и достаточным условием $\inf M(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\forall \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \in L_2(\Omega)$ является равенство $\varepsilon(\mathbf{u}) = -\varepsilon(\mathbf{v})/2$, откуда следует $\mathbf{u} = -\mathbf{v}/2$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$, а

$$\inf_{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \in L_2(\Omega)} M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{4} \int_\Omega A(\mathbf{v}, \mathbf{v})\, dx - \int_{\Gamma_F} F_i v_i \, d\Gamma$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для каждого фиксированного $\mathbf{v} \in V(\Omega^\circ)$ введем постоянную ζ такую, что

$$\Omega_v = \{\mathbf{x} \in \Omega^\circ \mid A(\mathbf{v},\ \mathbf{v}) \geqslant \zeta\}, \quad \operatorname{mes} \Omega_v = \theta \tag{6.2}$$
$$\Omega^\circ \setminus \Omega_v = \{\mathbf{x} \in \Omega^\circ \mid A(\mathbf{v},\ \mathbf{v}) \leqslant \zeta\}$$

Теперь легко найти функционал

$$M_0(\mathbf{v}) = -\frac{1}{4}\int\limits_{\Omega_v} A(\mathbf{v}, \mathbf{v})dx - \int\limits_{\Gamma_F} F_i v_i \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega^\circ) \tag{6.3}$$

для области Ω_v, удовлетворяющей условиям (6.2). Сформулируем двойственную задачу

$$\sup M_0(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega^\circ)$$

и приведем неравенства

$$\sup{}^\circ M_0(\mathbf{v}) = \sup{}^\circ \inf{}^\circ M(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) \leqslant \sup{}^\circ \inf M(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) \leqslant \tag{6.4}$$
$$\leqslant \sup \inf M(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) \leqslant \inf \sup M(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \inf M^\circ(\mathbf{u})$$

Здесь $\sup^\circ$ означает операцию sup для всех $\mathbf{v} \in V(\Omega^\circ)$, $\inf^\circ$ — операцию inf для всех $\Omega \in 0$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \in L_2(\Omega)$, операции sup и inf проводятся соответственно для всех $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ и $\Omega \in O^s(\lambda)$, $\mathbf{u} \in V(\Omega)$; O — множество измеримых множеств $\Omega \subset \Omega^\circ$, для которых $\operatorname{mes} \Omega = \theta$.

Теорема 3. Пусть существуют область $\Omega^* \in O^s(\lambda)$, $0 < \lambda < 1$ и $\mathbf{u}^* \in V(\Omega^*)$, являющаяся решением интегрального тождества (1.3), продолжение которой на Ω° удовлетворяет условию

$$A(\mathbf{u}^*,\ \mathbf{u}^*) \geqslant \zeta, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^*, \quad A(\mathbf{u}^*,\ \mathbf{u}^*) \leqslant \zeta,$$
$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^\circ \setminus \Omega^* \tag{6.5}$$

Тогда Ω^*, $\mathbf{u}^*$ — оптимальное решение задачи (1.2).

Доказательство. Положим $\mathbf{v} = -2\mathbf{u}$. Так как для Ω^* выполняется условие (6.5), то можно положить $\Omega_v = \Omega^*$. Тогда из (6.3) следует

$$M_0(-2\mathbf{u}^*) = -\int\limits_{\Omega^*} A(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)\, dx + 2\int\limits_{\Gamma_F} F_i u_i^* \, d\Gamma$$

Но $\mathbf{u}^*$ — удовлетворяет интегральному тождеству (1.3), поэтому

$$M_0(-2\mathbf{u}^*) = \int\limits_{\Gamma_F} F_i u_i^* \, d\Gamma$$

откуда и из неравенства (6.4) следует совпадение двойственной оценки со значением функционала в задаче (1.2). Таким образом, Ω^*, $\mathbf{u}^*$ — решение задачи (1.2).

Пример. Пусть Ω^0 — квадрат со сторонами $2d$, на двух ребрах которого действует равномерно распределенная нагрузка $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_2$. Будем считать, что реализуется плоское деформированное состояние.

Возьмем в качестве начальной области квадрат, из которого вырезан круг радиуса g так, что $4d^2 - \pi g^2 = \theta$, где θ — заданное число. Исходя из этого начального приближения, используя необходимые условия (2.4), а также схему разбивки на конечные элементы [2], получим область большей жесткости.

На фиг. 2 жирной линией приведена четверть области, полученной в результате оптимизации для $F = 1$Н/м^2, $d = 1$ м, $\mu = 7{,}7\cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\nu = 0{,}3$, $\theta = 2{,}87$, $g = 0{,}6$. Штриховой линией приведена начальная область. Работа внешних сил для начальной и улучшенной областей соответственно равны $J_0 \simeq 0{,}635\cdot 10^{-10}$ Н и $J_1 \simeq 0{,}445\cdot 10^{-10}$ Н, а выигрыш в жесткости $\delta_1 = 1 - J_1/J_0 \simeq 0{,}299$.

Получим теперь двойственную оценку для $v_1 = -\alpha\nu x_1$, $v_2 = \alpha(1-\nu)x_2$. Подставляя эти функции в (6.3) и максимизируя значение M_0 по α, получим

$$J_* = \max_{\alpha} M_0(v) = 8d^4F^2(1-\nu)(\mu\theta)^{-1}$$

Для данных, используемых в задаче, $J_* \simeq 0{,}254\cdot 10^{-10}$ Н, следовательно, максимально возможный выигрыш равен $\delta_* = 1 - J_*/J_0 \simeq 0{,}6$.

Дальнейшее увеличение жесткости области может быть достигнуто за счет увеличения ее связности. Анализ показывает, что условие Вейерштрасса (4.5) не выполняется почти во всех точках области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прагер В.* Основы теории оптимального проектирования конструкций. М.: Мир, 1977. 109 с.
2. *Троицкий В. А., Петухов Л. В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
3. *Баничук Н. В., Бельский В. Г., Кобелев В. В.* Оптимизация в задачах теории упругости с неизвестными границами // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 46—52.
4. *Петухов Л. В.* Об оптимальных задачах теории упругости с неизвестными границами. // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 231—236.
5. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
6. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
8. *Подильчук Ю. Н.* Трехмерные задачи теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 240 с.
9. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
18.III.1988