Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 532.5:534.1

О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

Симаков С. Т.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения, описывающего в приближении Буссинеска колебания идеальной стратифицированной жидкости, занимающей нижнее полупространство. Частота Брента — Вяйсяля считается постоянной. Краевое условие на плоской границе представляет собой комбинацию условий на твердой крышке и на свободной поверхности, причем последнее содержит слагаемое, учитывающее капиллярность. Дается постановка задачи, строится ее решение и исследуется его поведение при больших временах.

1. Постановка задачи. Будем считать, что стратифицированная жидкость заполняет полупространство $R_-^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_3 < 0\}$. Обозначим Π_1 часть плоскости $x_3 = 0$, являющуюся поверхностью соприкосновения жидкости и твердой крышки, Π_0 — множество точек, с которым совпадает свободная поверхность жидкости в невозмущенном состоянии, т. е. $\Pi_0 = \{x | x_3 = 0\} \setminus \Pi_1$. Для удобства введем в R^2 множества Σ_0 и Σ_1, связанные с Π_0 и Π_1 следующим образом:

$$\Pi_i = \{x \mid x_3 = 0 \wedge x' = (x_1, x_2) \in \Sigma_i\} \quad (i = 0, 1)$$

Потребуем, чтобы Σ_0 была ограниченной областью с гладкой границей $\partial\Sigma_0$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta_3 u_{tt} + \omega_0^2 \Delta_2 u = 0, \quad x_3 < 0, \quad t > 0 \tag{1.1}$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \tag{1.2}$$

$$u_{x_3}|_{\Pi_1} = 0 \tag{1.3}$$

$$(1 - \sigma\Delta_2) u_{x_3} + (\partial^2/\partial t^2 + \omega_0^2) u|_{\Pi_0} = f(x', t)$$

$$\partial u_{x_3}/\partial n + \varkappa u_{x_3}|_{\partial\Pi_0} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь

$$f(x', t) \in C^{(3)}([0, T], W_2^{-1}(\Sigma_0)) \cap C_0^{(2)}([0, T], W_2^{-1}(\Sigma_0))$$

$$\forall T > 0; \quad \Delta_l = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

$$\partial\Pi_0 = \{x \mid x_3 = 0 \wedge x' \in \partial\Sigma_0\}$$

$$C_0^{(k)}([0, T], H) = \{\varphi(x', t) \mid \varphi \in C^{(k)}([0, T], H) \wedge D_t^l \varphi(x', t = 0) = 0 \ (l = 0, \ldots, k-1)\}$$

Смысл скалярной функции $u(x, t)$ описан в работе [1]. Граничное условие (1.3) является условием обращения в нуль вертикальной составляющей поля скоростей на твердой крышке. Первое условие (1.4) соответствует заданию возбуждения на свободной поверхности, причем член $\sigma\Delta_2 u_{x_3}$ отвечает за капиллярность. Второе равенство (1.4) представляет собой условие сохранения угла смачивания в процессе движения [2] (предполагается, что твердая крышка имеет конечную толщину и жидкость не переливается через ее верхнюю кромку).

Таким образом, моделируются малые движения стратифицированной капиллярной жидкости, заполняющей бассейн, который можно считать неограниченным и бесконечно глубоким, под ледовым полем Π_1, имеющим участок свободной ото льда поверхности Π_0.

Границы применимости рассматриваемой модели определяются обычными требованиями линеаризованной модели и приближением Буссинеска. Условие на свободной поверхности в размерных переменных имеет вид

$$(g - \sigma\rho_0^{-1}(0)\,\Delta_2)\, u_{x_3} + (\partial^2/\partial t^2 + \omega_0^2)\, u|_{\Pi_0} = f(x', t)$$

Случай, когда $\sigma = 0$ (гравитационные поверхностные и внутренние волны), был рассмотрен в [3]. Далее всюду предполагается, что $\sigma > 0$, т. е. рассматриваются гравитационно-капиллярные волны.

Классом гладкости K будем называть множество всех функций $v(x, t)$, определенных на $R_-^3 \times [0, \infty)$, таких, что

$$\frac{\partial^{k+l+m} v(x, t)}{\partial t^k \partial x_i^l \partial x_j^m} \in C^{(0)}(Q \times [0, T]).$$
$$k = 0, 1, 2; \quad l, m = 0,1; \quad i, j = 1, 2, 3$$

для любого компакта $Q \in R_-^3$ и любого $T > 0$.

Решением изучаемой задачи будем считать регулярную на бесконечности [1] функцию $u(x, t)$, принадлежащую классу гладкости K и удовлетворяющую уравнению (1.1) и начальным условиям (1.2) в классическом смысле, граничным условиям (1.3), (1.4) в смысле, определяемом ниже.

Определение. Функция $u(x, t)$ из класса гладкости удовлетворяет граничным условиям (1.3), (1.4), если одновременно

1) существует функция $d_{x_3}u(x', t)$, обладающая свойствами: $d_{x_3}u(x', t) \in W_2^1(\Sigma_0)$, $\forall t \geqslant 0$, $d_{x_3}u(x', t) = 0$ при $x' \in \Sigma_1$, $t \geqslant 0$, равномерно по $t \in [0, T]$, $\forall T > 0$; $\| d_{x_3}u(x', t) - u_{x_3}(x, t)\|_{L_2(S)} \to 0$ при $x_3 \to 0$ (S — произвольный компакт в R^2);

2) существует функция $\gamma u(x', t) \in C_0^{(2)}([0, T], L_2(S))$, такая, что равномерно по $t \in [0, T]$ при любом $T > 0$

$$\| \partial^k u(x, t)/\partial t^k - D_t^k \gamma u(x', t)\|_{L_2(S)} \to 0$$

при $x_3 \to 0$ (S — произвольный компакт в R^2; $k = 0, 1, 2$);

3) имеет место равенство

$$[d_{x_3}u, \eta] + ((D_t^2 + \omega_0^2)\,\gamma\, u, \eta)_{L_2(\Sigma_0)} = (f, \eta) \tag{1.5}$$
$$\forall \eta \in W_2^1(\Sigma_0)$$

В (1.5) (f, η) есть результат действия функционала $f \in W_2^{-1}(\Sigma_0)$ на функцию η, через [,] обозначено скалярное произведение в $W_2^1(\Sigma_0)$

$$[\varphi, \eta] = (\varphi, \eta)_{L_2(\Sigma_0)} + \sigma(\nabla\varphi, \nabla\eta)_{L_2(\Sigma_0)} + \sigma\varkappa(\varphi, \eta)_{L_2(\partial\Sigma_0)}$$

Отметим, что если

$$d_{x_3}u(x', t) \in C^{(2)}(\Sigma_0), \quad f(x', t) \in L_2(\Sigma_0), \quad \forall t \geqslant 0$$

то удовлетворение равенству (1.5) влечет за собой условия

$$(1 - \sigma\Delta_2)\, d_{x_3}u + (D_t^2 + \omega_0^2)\,\gamma u\,|_{\Sigma_0} = f(x', t)$$
$$\partial(d_{x_3}u)/\partial n + \varkappa d_{x_3}u\,|_{\partial\Sigma_0} = 0$$

Таким образом, предполагается выполнение граничных условий в слабом смысле.

Так как при $\varphi \in W_2^1(\Sigma_0)$ и $f \in L_2(\Sigma_0)$ имеют место неравенства

$$|(f, \varphi)_{L_2(\Sigma_0)}| \leqslant \|f\|_{L_2(\Sigma_0)} \|\varphi\|_{L(\Sigma_0)} \leqslant C\|\varphi\|_+$$

($\|\varphi\|_+ = [\varphi, \varphi]^{1/2}$), то из теоремы Рисса [4] следует, что существует и единствен элемент $Gf \in W_2^1(\Sigma_0)$, такой, что $(f, \varphi)_{L_2(\Sigma_0)} = [Gf, \varphi]$, причем

$$\|Gf\|_+ = \|f\|_- = \sup_{\varphi \in W_2^1(\Sigma_0)} \frac{|(f, \varphi)_{L_2(\Sigma_0)}|}{\|\varphi\|_+}$$

В силу этого равенства существует расширение G по непрерывности на все $W_2^{-1}(\Sigma_0)$, для него сохраним прежнее обозначение. Можно установить цепочку неравенств

$$\|Gf\|_{L_2(\Sigma_0)} \leqslant \|Gf\|_+ \leqslant \|f\|_{L_2(\Sigma_0)} \leqslant \|f\|_+, \quad f \in W_2^1(\Sigma_0) \tag{1.6}$$

Из (1.6) следует, что

$$G(D_t^k \gamma u(x', t)) = D_t^k G\gamma u(x', t) \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$Gf(x', t) \in C^{(k)}([0, T], W_2^1(\Sigma_0))$$

при $f(x', t) \in C^{(k)}([0, T], W_2^{-1}(\Sigma_0))$.

Можно показать, что $\ker G = 0$.

Воспользовавшись оператором G, получим из (1.5) равносильное условие

$$[d_{x_3} u + (D_t^2 + \omega_0^2) G\gamma u, \eta] = [Gf, \eta], \quad \forall \eta \in W_2^1(\Sigma_0)$$

эквивалентное уравнению в $W_2^1(\Sigma_0)$

$$d_{x_3} u + (D_t^2 + \omega_0^2) G\gamma u = Gf \tag{1.7}$$

При условии существования решения имеет место

Теорема 1. Решение поставленной задачи единственно.

Доказательство проводится при помощи энергетического соотношения [1].

2. Построение решения. Будем искать решение в виде

$$u(x, t) = P[\nu](x, t) = P_1[\nu](x, t) + P_2[\nu](x, t) \tag{2.1}$$

$$P_1[\nu](x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_0} \frac{\nu(y', t)}{|x - y'|} dy'$$

$$P_2[\nu](x, t) = -\frac{\omega_0 |x_3|}{2\pi} \int_{\Sigma_0} \int_0^t J_1\left(\omega_0 \frac{|x_3|(t - \tau)}{|x - y'|}\right) \frac{\nu(y', \tau)}{|x - y'|^2} d\tau\, dy',$$

$$\nu(y', t) \in C_0^{(2)}([0, T], W_2^1(\Sigma_0)), \ \forall T > 0$$

$$|x - y'| = (|x' - y'|^2 + x_3^2)^{1/2}, \quad |x' - y'| = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$$

($J_1(z)$ — функция Бесселя первого порядка).

Можно проверить, что определяемая в таком виде функция $u(x, t)$ регулярна на бесконечности, принадлежит классу гладкости K, удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям (1.2) в классическом смысле и условиям 1), 2), приведенным в определении, причем в $W_2^1(\Sigma_0)$ имеют место формулы

$$d_{x_3} u(x', t) = \nu(x', t) - \omega_0 S_{\omega_0 t} * \nu(x', t)$$

$$D_t^k(\gamma u(x', t)) = D_t^k V[\nu](x', t) \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$S_{\omega_0 t} = -\int_0^{\omega_0 t} J_1(\alpha) \alpha^{-1} d\alpha$$

[1] Это соотношение может быть получено так же, как в работе: *Симаков С. Т.* К теории внутренних и поверхностных волн // М., 1987. 45 с.— Деп. в ВИНИТИ 16.12.87, № 8814-В87.

Здесь V — расширение по непрерывности на $L_2(\Sigma_0)$ интеграла $(2\pi)^{-1}\int\limits_{\Sigma_0} \nu(y') \mid x' - y' \mid^{-1} dy'$,[5] рассматриваемого как оператор на $C_0^\infty(\Sigma_0)$ в $L_2(\Sigma_0)$, звездочка означает свертку по времени.

Из (1.7) получаем уравнение для $\nu(x', t)$

$$\nu - \omega_0 S_{\omega_0 t} * \nu + (D_t^2 + \omega_0^2) GV\nu = Gf \tag{2.2}$$

$$\nu(x', t) \in C_0^{(2)}([0, T], W_2^1(\Sigma_0)), \quad \forall T > 0$$

Известно [5], что V — ограниченный из $L_2(\Sigma_0)$ в $W_2^1(\Sigma_0)$ оператор. Можно показать, что $\ker V = 0$ и

$$(V\varphi, \varphi)_{L_2(\Sigma_0)} \geqslant 0, \quad \forall \varphi \in L_2(\Sigma_0)$$

Из определения оператора G видно, что он симметричен и положителен в $W_2^1(\Sigma_0)$. В силу этого и неравенств (1.6) заключаем [4], что существует квадратный корень $G^{1/2}$ из оператора G, являющийся ограниченным, положительным и симметричным в $W_2^1(\Sigma_0)$ оператором. Очевидно, равенство

$$\| G^{1/2}\varphi \|_+ = \| \varphi \|_{L_2(\Sigma_0)}, \quad \forall \varphi \in W_2^1(\Sigma_0)$$

Расширение $G^{1/2}$ по непрерывности на все $L_2(\Sigma_0)$ будем по-прежнему обозначать $G^{1/2}$. Рассмотрим в $L_2(\Sigma_0)$ оператор $G^{1/2}VG^{1/2}$. Видно, что он положителен, симметричен в $L_2(\Sigma_0)$, действует из $L_2(\Sigma_0)$ в $W_2^1(\Sigma_0)$ и имеет место оценка

$$\| G^{1/2}VG^{1/2}\varphi \|_+ \leqslant C \| \varphi \|_{L_2(\Sigma_0)} \tag{2.3}$$

Из теоремы Реллиха [6] и оценки (2.3) следует полная непрерывность в $L_2(\Sigma_0)$ оператора $G^{1/2}VG^{1/2}$. Так как $\ker G = \ker V = 0$, то $\ker G^{1/2}VG^{1/2} = 0$.

Из сказанного выше следует, что существует полная ортонормированная в $L_2(\Sigma_0)$ система собственных функций $\{\varphi_k\}$ оператора $G^{1/2}VG^{1/2}$, причем $\lambda_k G^{1/2}VG^{1/2}\varphi_k = \varphi_k$ и $0 < \lambda_k \nearrow +\infty$ при $k \to \infty$.

Следствием (2.3) и результатов работы [7] является оценка

$$\lambda_n = 0(n^{1/2}) \tag{2.4}$$

Рассмотрим теперь функции $\psi_k = G^{1/2}\varphi_k$. Видно, что ψ_k — собственные функции оператора GV, λ_k — соответствующие им собственные числа. Так как $[\psi_k, \psi_m] = [G\varphi_k, \varphi_m] = (\varphi_k, \varphi_m)_{L_2(\Sigma_0)} = \delta_{km}$, то ψ_k образуют ортонормированную в $W_2^1(\Sigma_0)$ систему. Можно убедиться в ее полноте.

Итак, оператор GV обладает полной ортонормированной в $W_2^1(\Sigma_0)$ системой собственных функций $\{\psi_k\}$, соответствующие ψ_k собственные числа λ_k положительны и для них справедлива оценка (2.4).

Вернемся к уравнению (2.2). Его решение будем искать в виде

$$\nu(x', t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\, \psi_k(x')$$

Подставим последний ряд в (2.2) и умножим на $\psi_n(x')$ в смысле скалярного произведения в $W_2^1(\Sigma_0)$. В результате приходим к задаче

$$c_n(t) - \omega_0 S_{\omega_0 t} * c_n(t) + \lambda_n^{-1}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right) c_n(t) = \Phi_n(t)$$

$$c_n(0) = \frac{d}{dt} c_n(t = 0) = 0 \tag{2.5}$$

$$\Phi_n(t) = [Gf, \psi_n] = (f, \psi_n)_{L_2(\Sigma_0)}$$

Эта задача решается при помощи преобразования Лапласа, решение имеет вид [3]

$$c_n(t) = \lambda_n \int_0^t R_n(t-\tau)\Phi_n(\tau)\,d\tau \tag{2.6}$$

$$R_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} e^{pt} p\,(p^2+\omega_0^2)^{-1/2}(p\,(p^2+\omega_0^2)^{1/2}+\lambda_n)^{-1/2}\,dp, \quad \varkappa > 0$$

Ветвь корня $(p^2+\omega_0^2)^{1/2}$ выбрана таким образом, что $(p^2+\omega_0^2)^{1/2}|_{p=0+0} = \omega_0$ и разрез, соединяющий точки ветвления $\pm i\omega_0$, является отрезком мнимой оси $[-i\omega_0, i\omega_0]$.

Корнями уравнения $p\,(p^2+\omega_0^2)^{1/2}+\lambda_k = 0$ при таком выборе ветви $(p^2+\omega_0^2)^{1/2}$ служат $p = \pm i q_k$, где $q_k = ((\omega_0^2 + (\omega_0^4 + 4\lambda_k^2)^{1/2})/2)^{1/2}$. Введем также величины $\nu_k = (((\omega_0^4 + 4\lambda_k^2)^{1/2} - \omega_0^2)/2)^{1/2}$.

Используя лемму Жордана, преобразуем $R_k(t)$ к виду

$$R_k(t) = R_k^{(1)}(t) + R_k^{(2)}(t)$$

$$R_k^{(1)}(t) = \frac{\lambda_k}{\pi}(\omega_0^4+4\lambda_k^2)^{-1/2}\Big[\int\limits_{-\omega_0}^{\omega_0}(\omega_0^2-\mu^2)^{-1/2}(\mu^2-q_k^2)^{-1}\mu \times$$

$$\times \sin(\mu t)\,d\mu - \int\limits_{-\omega_0}^{\omega_0}(\omega_0^2-\mu^2)^{-1/2}(\mu^2+\nu_k^2)^{-1}\mu\sin(\mu t)\,d\mu\Big]$$

$$R_k^{(2)}(t) = 2q_k(\omega_0^4+4\lambda_k^2)^{-1/2}\sin(q_k t)$$

Это преобразование позволяет представить $c_n(t)$ в виде

$$c_n(t) = c_n^{(1)}(t) + c_n^{(2)}(t)$$

$$c_n^{(i)}(t) = \lambda_n\int\limits_0^t R_n^{(i)}(t-\tau)\Phi_n(\tau)\,d\tau$$

Можно проверить, что

$$\nu(x', t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\psi_k(x') \in C_0^{(2)}([0, T], W_2^1(\Sigma_0))$$

при

$$f(x', t) \in C^{(3)}([0, T], W_2^{-1}(\Sigma_0)) \cap C_0^{(2)}([0, T], W_2^{(1)}(\Sigma_0))$$

По построению видно, что плотность $\nu(x', t)$ удовлетворяет уравнению (2.2). Таким образом, справедлива

Теорема 2. Решение поставленной в п. 1 существует и имеет вид

$$u(x, t) = P[\nu](x, t)$$

$$\nu(x', t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\psi_k(x')$$

где $\psi_k(x')$ — собственная функция оператора GV, $c_k(t)$ даются формулами (2.6).

Отметим, что решение $u(x, t)$ в силу теоремы 1 единственное.

3. Поведение решения при больших временах. Прежде чем приступить к обсуждению поведения решения при больших временах, остановимся на его структуре. Представим $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = u_1 + u_2 + v$$

$$u_1 = P[\nu^{(1)}](x, t), \quad u_2 = P_1[\nu^{(2)}](x, t), \quad v = P_2[\nu^{(2)}](x, t)$$

$$\nu^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(i)}(t)\psi_k(x') \quad (i = 1, 2)$$

Можно показать, что $|u_1(x, t)| \to 0$ равномерно по $t \in [0, T]$ при $\omega_0 \to 0$ в любой точке $x \in R_-^3$ при любом $T > 0$, а $P[\nu^{(2)}](x, t)$ при $\omega_0 = 0$ есть решение задачи о поверхностных гравитационных и капиллярных волнах в идеальной нестратифицированной жидкости. Таким образом, $u_1(x, t)$ описывает внутренние волны. Так как

$$P[\nu^{(2)}](x, t)|_{\omega_0=0} = P_1[\nu^{(2)}](x, t)|_{\omega_0=0} = u_2|_{\omega_0=0}$$

то $u_2(x, t)$ отвечает за поверхностные волны, а $v(x, t)$ имеет смысл вклада поверхностных волн во внутренние.

Перейдем к рассмотрению поведения решения при больших временах. Это в силу теоремы 2 — задача о свойствах $P[\nu](x, t)$, где $\nu(x', t)$ — построенная выше плотность. Изучались [3] свойства $P[\nu](x, t)$ с плотностью, имеющей аналогичную структуру.

Ниже приведем результаты, доказательства которых с незначительными изменениями повторяют соответствующие доказательства работы, приведенной в сноске на с. 68.

Теорема 3. Пусть функция $f(x', t) \in C_0^\infty([0, \infty), W_2^{-1}(\Sigma_0))$ и финитна по времени, т. е. существует T_0, такое, что $f(x', t) = 0$, $\forall t \geqslant T_0$. Тогда

$$|u_2(x, t) + v(x, t) - u^{(0)}(x, t)| \leqslant Ct^{-1/2}, \quad x \in R_-^3, \quad t > 0;$$

$$u^{(0)}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n^2\lambda_n F_n(x)}{(\omega_0^4 + 4\lambda_n^2)} \int_0^t \sin(q_n(t - \tau))\, \Phi_n(\tau)\, d\tau$$

$$F_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_0} \psi_n(y')\,(q_n^2\,|x' - y'|^2 + (q_n^2 - \omega_0^2)\, x_3^2)^{-1/2}\, dy'$$

(все постоянные, встречающиеся в тексте, обозначаем через C).

Теорема 4. Пусть $f(x', t) \in C^3([0, \infty), W_2^{-1}(\Sigma_0)) \cap C_0^{(2)}([0, \infty), W_2^{-1}(\Sigma_0))$ и $f(x', t) = 0$, $\forall t \geqslant T_0$.
Тогда

$$|u_1(x, t)| \leqslant Ct^{-1/2}, \quad x \in R_-^3, \quad t > 0$$

Из теорем 3, 4 следует, что при финитном по времени возбуждении решение задачи не стремится к нулю при $t \to \infty$, а имеет вид $u^{(0)}(x, t) + O(t^{-1/2})$, причем $u^{(0)}(x, t)$ образуется только за счет поверхностных волн $u_2(x, t)$ и их вклада во внутренние $v(x, t)$. Временные множители членов ряда $u^{(0)}(x, t)$ имеют при $t \geqslant T_0$ следующую структуру:

$$\sin(q_n t) \int_0^{T_0} \Phi_n(\tau) \cos(q_n \tau)\, d\tau - \cos(q_n t) \int_0^{T_0} \Phi_n(\tau) \sin(q_n \tau)\, d\tau$$

Тем самым $u^{(0)}(x, t)$ — суперпозиция бесконечного числа колебаний с частотами $\pm q_n$ и описывает некий остаточный неустановившийся процесс.

Рассмотрим режим периодического возбуждения.

Теорема 5. Пусть $f(x', t) = \eta(t) f(x') e^{-i\omega t}$, где $f(x') \in W_2^{-1}(\Sigma_0)$, $\eta(t)$ — функция включения, обладающая свойствами: $\eta(0) = 0$, $\eta(t) = 1$ при $t \geqslant T_0 > 0$, $d\eta(t)/dt \in C_0^\infty[0, \infty)$. Тогда справедливы утверждения.

1°. Если $\omega > \omega_0$ и $\omega \neq q_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, то

$$|u(x, t) - v^{(0)}(x, t) - w(x) e^{-i\omega t}| \leqslant Ct^{-1/2}, \quad x \in R_-^3, \quad t > 0$$

2°. Если $0 < \omega < \omega_0$, то равномерно по $x \in Q$

$$|u(x, t) - v^{(0)}(x, t) - w(x) e^{-i\omega t}| \to 0 \text{ при } t \to \infty$$

Q — произвольный компакт, принадлежащий R_-^3.

3°. Если $\omega = q_n$, то решение можно представить в виде

$$u(x,t) = te^{-iq_n t} q_n(x) + U(x,t)$$

$$q_n(x) = \frac{q_n^2 e^{i\pi/2}\Phi_n}{(\omega_0^4 + 4\lambda_n^2)^{1/2}} F_n(x), \quad |U(x,t)| \leqslant C, \quad \forall x \in R_-^3, \quad t > 0$$

Выше были использованы обозначения

$$v^{(0)}(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n (a_n^+ e^{iq_n t} + a_n^- e^{-iq_n t}) F_n(x)$$

$$a_n^{\pm} = \frac{q_n \lambda_n \Phi_n}{(\omega_0^4 + 4\lambda_n^2)^{1/2}} \int_0^{T_0} e^{\mp i(q_n \pm \omega)\tau} (q_n \mp \omega)^{-1} \eta'(\tau) d\tau$$

$$\Phi_n = [Gf, \psi_n] = (f, \psi_n) L_2(\Sigma_0)$$

$$w(x) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{\Sigma_0} g(y')(\omega^2 |x' - y'|^2 - (\omega_0^2 - \omega^2) x_3^2)^{-1/2} dy'$$

$$g(y') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n \psi_n(y') \lambda_n \omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^{1/2}} (\lambda_n - \omega(\omega^2 - \omega_0^2)^{1/2})^{-1}$$

Функции $F_n(x)$ — те же, что и в теореме 3.

Обсудим результаты теоремы 5. Из них следует, что решение задачи не имеет предельной амплитуды, т. е. при возбуждении $f(x', t) = f(x')\eta(t)e^{-i\omega t}$, где $\eta(t)$ — функция включения, не существует предела выражения $e^{i\omega t} u(x, t)$ при $t \to \infty$. Однако если из решения $u(x, t)$ исключить фон $v^{(0)}(x, t)$, то при $\omega \neq q_n$ и $\omega \neq \omega_0$ указанный предел будет существовать, причем характер сходимости будет зависеть от соотношения частот ω и ω_0.

Фон $v^{(0)}(x, t)$ представляет собой суперпозицию бесконечного числа колебаний с частотами $\pm q_n$ и образуется только за счет поверхностных волн $u_2(x, t)$ и их вклада во внутренние $v(x, t)$ (см. [3]). Предельный режим $w(x) \exp(-i\omega t)$ обусловлен как волнами $u_2(x, t)$ и $v(x, t)$, так и внутренними волнами $u_1(x, t)$. При $\omega = q_n$ наблюдается линейный рост амплитуды — резонанс. Можно показать, что в этой ситуации $|u_1(x, t)| < C$ при $(x, t) \in R_-^3 \times [0, \infty)$, поэтому правильно говорить о резонансе поверхностных волн. Резонансные частоты образуют последовательность $\{q_n\}$. Из вида q_n и оценки (2.4) следует, что $q_n > \omega_0$ и $q_n = O(n^{1/4})$. Численные значения этих частот определяются величинами частоты Брента — Вяйсяля ω_0 и собственных чисел λ_n оператора GV, зависящего от вида области Σ_0 и капиллярности.

Как видно [3], нет существенного различия в поведении внутренних волн в гравитационном и гравитационно-капиллярном случаях. Это не имеет места для поверхностных волн, поскольку их предельные режимы сильно зависят от собственных чисел оператора GV, который имеет различный вид в каждом из указанных случаев. В частности, резонансы поверхностных волн будут в гравитационном и гравитационно-капиллярном случаях наблюдаться при различных частотах.

Автор благодарит С. А. Габова за постановку задачи и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986. 287 с.
2. Гидромеханика невесомости / Под ред. Мышкиса А. Д. М.: Наука, 1976. 504 с.

3. *Габов С. А.*, *Симаков С. Т.* К теории поверхностных и внутренних волн в стратифицированной жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 2. С. 225—238.
4. *Рисс Ф.*, *Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 592 с.
5. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977. 430 с.
6. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.
7. *Параска В. И.* Об асимптотике собственных и сингулярных чисел линейных операторов, повышающих гладкость // Мат. сб. 1965. Т. 68. № 4. С. 621—631.

Москва

Поступила в редакцию
25.V.1988