Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 62—50

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА С НЕЧЕТКИМ ЦЕЛЕВЫМ МНОЖЕСТВОМ И НЕЧЕТКИМИ НАЧАЛЬНЫМИ ПОЗИЦИЯМИ

Байдосов В. А.

Рассматривается математическая модель ситуации, когда требуется выработать единую стратегию управления для нечеткого заданного множества объектов при наличии помехи. Цель управления — приведение этого множества в заданный момент времени в нечеткое целевое множество или уклонение от целевого множества. Задача сводится к построению универсальной оптимальной стратегии для дифференциальной игры, функцией платы в которой служит функция принадлежности целевого множества.

1. Рассмотрим дифференциальную игру

$$\mathbf{x}^{\cdot} = f(t, \mathbf{x}, u, v) \qquad (1.1)$$
$$\mathbf{x} \in R^n, \quad u(t) \in P, \quad v(t) \in Q$$

где P и Q — компакты в R^p и R^q. Будем считать, что правая часть (1.1) удовлетворяет каноническим условиям ([1], с. 37, 38) и выполняется условие седловой точки для маленькой игры ([1], с. 79). Игру будем рассматривать на отрезке времени $T \stackrel{\Delta}{=} [t_*, \theta]$.

Пусть u: $T \times R^n \to P$ — некоторая позиционная стратегия первого игрока. Через $K_u [t_0, t] (\mathbf{x}_0)$ обозначим множество конструктивных движений ([2], с. 33) $\mathbf{x}(\cdot)$, порожденных стратегией u на отрезке времени $[t_0, t]$ и удовлетворяющих начальному условию $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Пусть set X — множество всех непустых подмножеств пространства X. Введем многозначное отображение

$$K_u(t, t_0)\colon R^n \to \operatorname{set} R^n, \quad t \geqslant t_0$$

полагая

$$K_u(t, t_0)\mathbf{x}_0 \stackrel{\Delta}{=} \{\mathbf{x}(t) : \mathbf{x}(\cdot) \in K_u [t_0, t](\mathbf{x}_0)\}$$

Аналогично определяются многозначные отображения $K_v(t, t_0)$ для стратегии v второго игрока.

Пусть $F(X)$ — семейство нечетких множеств (НМ) пространства X, μ_A — функция принадлежности НМ. Значение μ_A в точке $\mathbf{x}$ обозначим $\langle \mu_A, \mathbf{x} \rangle$.

Если задано некоторое отображение

$$\pi\colon R^n \to F(R^n) \qquad (1.2)$$

то, согласно принципу обобщения Заде [3], его можно продолжить до отображения

$$\pi\colon F(R^n) \to F(R^n) \qquad (1.3)$$

полагая для $A \in F(R^n)$ и $\mathbf{y} \in R^n$

$$\langle \mu_{\pi A}, \mathbf{y} \rangle \stackrel{\Delta}{=} \sup_{\mathbf{x} \in R^n} \{\langle \mu_A, \mathbf{x} \rangle \wedge \langle \mu_{\pi \mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle\} \qquad (1.4)$$

Здесь $\wedge$ — операция взятия минимума, т. е. для любых чисел a_1, a_2

$$a_1 \wedge a_2 \stackrel{\Delta}{=} \min\{a_1, a_2\}$$

Рассмотрим частный случай отображения π (1.2)

$$\pi : R^n \to \text{set } R^n \tag{1.5}$$

Тогда (1.4) можно записать в виде

$$\langle \mu_{\pi A}, \mathrm{y} \rangle = \sup \langle \mu_A, \pi^{-1}\mathrm{y} \rangle \tag{1.6}$$

$$\pi^{-1}\mathrm{y} \stackrel{\Delta}{=} \{x : \mathrm{y} \in \pi \mathrm{x}\}$$

Если множество $\pi^{-1}\mathrm{y}$ пусто, то правая часть в (1.6) равна нулю.

Для НМ A, B включение $A \subset B$ означает $\mu_A \leqslant \mu_B$. Заметим, что для определенного выше отображения π (1.3) из $A \subset B$ следует $\pi A \subset \pi B$. Пусть $a \in [0, 1]$ и M — НМ. Множеством уровня M_a называется обычное (четкое) множество, определяемое условием

$$M_a \stackrel{\Delta}{=} \{\mathbf{x} \in R^n : \langle \mu_M, \mathbf{x} \rangle \geqslant a\}$$

Носителем НМ M называется обычное множество

$$\operatorname{supp} M \stackrel{\Delta}{=} \{\mathbf{x} \in R^n : \langle \mu_M, \mathbf{x} \rangle > 0\}$$

Рассмотрим отображение π (1.5). Для его продолжения (1.3) на $F\,(R^n)$ справедливо следующее легко проверяемое утверждение. Пусть $A, B \subset F\,(R^n)$. Тогда для того, чтобы выполнялось условие $\pi A \subset B$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $a \in (0, 1]$ выполнялись включения $\pi A_a \subset B_a$. Здесь

$$\pi A_a \stackrel{\Delta}{=} \bigcup_{\mathbf{x} \in A_a} \pi \mathbf{x}$$

Перейдем к задаче сближения с НМ из нечеткой начальной позиции.

Будем считать, что состояние системы задается НМ в R^n. Таким образом, роль начальных позиций будут играть пары (t, A), где $A \in F\,(R^n)$. Позиция (t, A) является НМ в (t, R^n). При этом

$$\langle \mu_{(t,\,A)}, (t, \mathbf{x}) \rangle \stackrel{\Delta}{=} \langle \mu_A, \mathbf{x} \rangle$$

Пусть $M \in F\,(R^n)$ — целевое НМ.

Будем говорить, что стратегия v решает задачу сближения с M из позиции (t, A), если $K_v\,(\theta, t)\,A \subset M$. Из дальнейшего будет видно, что задача сближения для НМ сводится к некоторой максиминной задаче. Поэтому естественно считать, что она решается вторым игроком.

Рассмотрим игровую задачу с функцией платы $\mu \stackrel{\Delta}{=} \mu_M$. Если функция μ полунепрерывна сверху или снизу, в частности непрерывна, то в этой задаче для всякой начальной позиции (t_0, x_0) существует цена игры

$$c\,(t_0, \mathbf{x}_0) \stackrel{\Delta}{=} \sup_v \inf \langle \mu, K_v\,(\theta, t_0)\,\mathbf{x}_0 \rangle = \inf_u \sup \langle \mu, K_u\,(\theta, t_0)\,\mathbf{x}_0 \rangle$$

Цена игры наследует свойство полунепрерывности функции платы [4]. Если функция платы μ непрерывна, то игра имеет седловую точку (u°, v°), т. е. для всякой позиции (t_0, x_0) существуют стратегии u° и v° такие, что

$$c\,(t_0, \mathrm{x}_0) = \inf \langle \mu, K_{v^\circ}\,(\theta, t_0)\,\mathrm{x}_0 \rangle = \sup \langle \mu, K_{u^\circ}\,(\theta, t_0)\,\mathrm{x}_0 \rangle$$

Стратегии u° и v° называются оптимальными. Оптимальная стратегия v° называется универсальной для области $D \subset T \times R^n$, если для всех $(t, \mathrm{x}) \in D$

$$c\,(t, \mathbf{x}) = \inf \langle \mu, K_{v^\circ}\,(\theta, t)\,\mathrm{x} \rangle$$

Аналогично определяется универсальная стратегия u° [4].

Так как функция платы μ принимает значения в $[0, 1]$, то цена игры также принимает значения в $[0, 1]$ и является функцией принадлежности некоторого НМ W в $T \times R^n$. Введем функции μ^t: $R^n \to R^1$, определенные условием $\langle \mu^t, \mathbf{x} \rangle = c(t, \mathbf{x})$.

Пусть μ^t — функция принадлежности НМ $W(t)$. Очевидно, что $W(\theta) = M$. Множества $W(t)$ естественно рассматривать как временные сечения множества W.

Предложение 1. Пусть функция принадлежности $\mu \overset{\Delta}{=} \mu_M$ непрерывна. Тогда для того, чтобы была разрешима задача сближения из нечеткой позиции (t, A) с НМ M, необходимо выполнение условия

$$A \subset W(t) \tag{1.7}$$

В случае, если для некоторой области D, содержащей носитель множества (t, A), существует универсальная оптимальная стратегия v°, то условие (1.7) достаточно для решения задачи сближения при помощи стратегии v°.

Доказательство. Допустим, что существует стратегия v, решающая задачу сближения: $K_v(\theta, t)A \subset M$. Тогда, согласно (1.6), это условие примет вид

$$\forall \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{y} \in K_v(\theta, t)\,\mathbf{x} : \langle \mu_A, \mathbf{x} \rangle \leqslant \langle \mu_A, \mathbf{y} \rangle$$

или

$$\forall \mathbf{x} \in R^n : \langle \mu_A, \mathbf{x} \rangle \leqslant \inf \langle \mu, K_v(\theta, t)\,\mathbf{x} \rangle \tag{1.8}$$

Отсюда

$$\forall \mathbf{x} \in R^n : \langle \mu_A, \mathbf{x} \rangle \leqslant \sup_{v'} \inf \langle \mu, K_{v'}(\theta, t)\,\mathbf{x} \rangle = \langle \mu^t, \mathbf{x} \rangle$$

Следовательно, $\mu_A \leqslant \mu^t$ и $A \subset W(t)$.

Допустим теперь, что $A \subset W(t)$ и для некоторой области D, содержащей носитель множества (t, A), существует универсальная оптимальная стратегия v°. Разрешимость задачи сближения при помощи стратегии v° эквивалентна условию (1.8) при $v = v^\circ$ или условию

$$\forall \mathbf{x} \in \operatorname{supp} A: \langle \mu_A, \mathbf{x} \rangle \leqslant \inf \langle \mu, K_{v^\circ}(\theta, t)\,\mathbf{x} \rangle \tag{1.9}$$

Покажем, что это условие выполняется. Имеем

$$\forall (t, \mathbf{x}) \in D: \langle \mu^t, \mathbf{x} \rangle = \inf \langle \mu, K_{v^\circ}(\theta, t)\,\mathbf{x} \rangle$$

Следовательно

$$\forall \mathbf{x} \in \operatorname{supp} A: \langle \mu^t, \mathbf{x} \rangle = \inf \langle \mu, K_{v^\circ}(\theta, t)\,\mathbf{x} \rangle$$

Так как $A \subset W(t)$, то отсюда сразу получаем условие (1.9).

Из предложения видно, что множество W играет роль максимального v-стабильного моста, обрывающегося на множестве M. Из доказательства также видно, что задача сближения для НМ сводится к максиминной задаче для функций принадлежности.

Обратимся теперь к задаче уклонения. Будем говорить, что стратегия u первого игрока решает задачу уклонения от НМ M из нечеткой начальной позиции (t, A), если она решает задачу сближения из позиции (t, A) с дополнением M' множества M. По определению, $\langle \mu_{M'}, \mathbf{x} \rangle = 1 - \langle \mu_M, \mathbf{x} \rangle$. Заметим, что в случае НМ пересечение $M \cap M'$, вообще говоря, непусто.

Пусть $\mu' \overset{\Delta}{=} \mu_{M'} = 1 - \mu$. Предполагаем по-прежнему, что функция μ непрерывна.

Пусть дана начальная позиция $(t, \mathbf{x})$. Рассмотрим две игры. В первой (второй) игре первый игрок решает минимаксную (максиминную) задачу, а второй — максиминную (минимаксную) задачу относительно функции платы μ (μ'). Обозначим цену первой игры $c(t, x)$, второй игры — $c'(t, x)$. Можно показать, что $c'(t, x) = 1 - c(t, x)$ и пара стратегий (u°, v°) будет седловой точкой в первой игре тогда и только тогда, когда она является седловой точкой во второй игре.

Заметим, что цена игры $c'(t, x)$ — функция принадлежности дополнения W' множества W. Рассмотрим множества $W'(t)$ с функцией принадлежности μ'^t: $\langle \mu'^t, x\rangle \overset{\Delta}{=} c'(t, x)$.

Тогда, учитывая сказанное выше и предложение 1, получаем следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть функция платы $\mu \overset{\Delta}{=} \mu_M$ непрерывна. Тогда для того, чтобы была разрешима задача уклонения из нечеткой позиции (t, A) от НМ M, необходимо выполнение условия

$$A \subset W'(t) \tag{1.10}$$

В случае, если для некоторой области D, содержащей носитель множества (t, A), существует универсальная оптимальная стратегия u°, то условие (1.10) достаточно для решения задачи уклонения с помощью стратегии u°.

2. Как известно, в классе обычных позиционных стратегий $u(t, x)$, $v(t, x)$ универсальные оптимальные стратегии могут не существовать [5, 4]. Однако они существуют в классе позиционных стратегий $u(t, x, \varepsilon)$, $v(t, x, \varepsilon)$, зависящих от параметра $\varepsilon > 0$ [1, 6, 4]. Будем следовать изложению данного вопроса в [1]. Игра рассматривается в ограниченной области

$$G \overset{\Delta}{=} \{(t, x)\colon\ t_* \leqslant t \leqslant \theta,\ \|x\| \leqslant R[t]\}$$

$$R[t] \overset{\Delta}{=} (1 + R_0)\exp\{\lambda(t - t_0)\} - 1$$

Пусть

$$G(t) \overset{\Delta}{=} \{x \in R^n\colon\ (t, x) \in G\}$$

Будем предполагать, что целевое множество M принадлежит $F(G(\theta))$. Заметим, что если M — НМ в R^n с предкомпактным носителем, то R_0 можно выбрать так, что это условие будет выполняться. Для начальных нечетких позиций (t, A) будем полагать $A \in F(G(t))$. Через W обозначим НМ в G, функция принадлежности которого — цена игры. Временные сечения $W(t)$ определяются как и в п. 1.

Закон управления $U = \{u(\cdot), \varepsilon, \Delta\}$, где Δ — разбиение отрезка $[t_0, \theta]$, $\varepsilon > 0$, определяет пошаговое движение $x[t] = x[t; \varepsilon, \Delta]$ из позиции (t_0, x_0) как решение пошагового уравнения

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t],\ u(t_i, x[t_i], \varepsilon),\ v[t])$$

$$t_i \leqslant t < t_{i+1}$$

где $v[t]$ — измеримая функция и $x[t_0] = x_0$. Конструктивное движение $x[t]$, порождаемое стратегией $u(\cdot)$, определяется как повторный предел

$$x[t] = \lim_{\varepsilon_j \to 0}\ \lim_{\delta_{js} \to 0} x[t; \varepsilon_j, \Delta_{js}]$$

где δ_{js} — шаг разбиения Δ_{js}.

Аналогично вводятся пошаговые и конструктивные движения, определяемые соответственно законом управления

$V = \{v(\cdot), \varepsilon, \Delta\}$ и стратегией $v(t, x, \varepsilon)$ второго игрока.

Некоторым изменением построений п. 1 получаем следующее предложение для дифференциальной игры со стратегиями, зависящими от ε.

Предложение 3. Пусть функция платы $\mu \overset{\Delta}{=} \mu_M$ непрерывна. Тогда для того, чтобы была разрешима задача сближения (уклонения) из нечеткой позиции (t, A) с (от) НМ M, необходимо и достаточно выполнение условия $A \subset W(t)$ $(A \subset W'(t))$. При этом универсальная оптимальная стратегия v° (u°) решает задачу уклонения (сближения).

Заметим, что если $A \subset W(t) \cap W'(t)$, то из позиции (t, A) разрешима задача сближения с множеством M и задача уклонения от множества M. Этим ситуация с НМ отличается от обычной.

Рассмотрим теперь решение задачи при помощи пошаговых движений, аппроксимирующих конструктивные движения. Обозначим $\delta(\Delta)$ шаг разбиения Δ. Пусть $K_u[t_0, \theta; \varepsilon_0, \delta_0](\mathbf{x}_0)$—множество всех пошаговых движений $\mathbf{x}[t]$ на отрезке $[t_0, \theta]$, порожденных законами управления $U = \{u(\cdot), \varepsilon, \delta\}$, где $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\delta(\Delta) \leqslant \delta_0$, для которых $\mathbf{x}[t_0] = \mathbf{x}_0$. Аналогично определяется множество $K_v[t_0, \theta; \varepsilon_0, \delta_0](\mathbf{x}_0)$ пошаговых движений порожденных законами управления второго игрока.

Для $t \geqslant t_0$ определим операторы

$$K_w(t, t_0; \varepsilon, \delta)\colon G(t_0) \to \operatorname{set} G(t), \quad w = u, v \tag{2.1}$$

полагая

$$K_w(t, t_0; \varepsilon, \delta)\,\mathbf{x} = \{\mathbf{x}[t]\colon \mathbf{x}[\cdot] \in K_w[t_0, \theta; \varepsilon, \delta](\mathbf{x})\},$$
$$\forall \mathbf{x} \in G(t_0)$$

Операторы (2.1) продолжим, согласно (1.4), на $F(G(t_0))$.

Для чисел $a_1, a_2 \in [0, 1]$ введем операцию $a_1 \dotplus a_2$, полагая $a_1 \dotplus a_2 = a_1 + a_2$ при $a_1 + a_2 \leqslant 1$ и $a_1 + a_2 = 1$ при $a_1 + a_2 > 1$.

Введем НМ M^ζ, полагая

$$\langle \mu_{M^\zeta}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mu_M, \mathbf{y}\rangle \dotplus \zeta, \quad \forall \mathbf{y} \in G(\theta)$$

Множество M^ζ играет роль ζ-окрестности множества M.

Предложение 4. Пусть функция платы $\mu = \mu_m$ непрерывна, v° — универсальная оптимальная стратегия и $A \subset W(t_0)$. Тогда, каково бы ни было число $\zeta > 0$, найдутся число $\varepsilon(\zeta) > 0$ и функция $\delta(\zeta, \varepsilon) > 0$ такие, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\zeta)$, $\delta \leqslant \delta(\zeta, \varepsilon)$ будет выполняться включение

$$K_{v^\circ}(\theta, t_0; \varepsilon, \delta)\, A \subset M^\zeta$$

Доказательство этого утверждения следует из [1] (с. 232, теорема 29.4).

Понятно, как формулируется соответствующее предложение для задачи уклонения.

3. Рассмотрим кратко случай, когда функция принадлежности целевого множества полунепрерывна. Как и раньше, будем считать μ_m функцией платы. Позиционные стратегии будем предполагать зависящими только от $(t, \mathbf{x})$.

Если функция μ_m полунепрерывна сверху (снизу), то, согласно [4], оптимальная стратегия имеется, вообще говоря, только у второго (первого) игрока. Поэтому здесь можно говорить лишь о задаче сближения (уклонения). Видно, что предложение 1 о сближении с (предложение 2 об уклонении от) НМ из нечеткой начальной позиции справедливо и в этом случае.

Автор благодарит А. И. Субботина за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Chang S. S. L., Zadeh L. A.* On fuzzy mapping and control // IEEE Trans. Syst., Man. and Cybern. 1972. V. SMC-2. № 1. P. 30—34.
4. *Krasovskii N. N., Subbotin A. I.* Game-theoretical control problems. Berlin etc.: Springer, 1987. 515 p.
5. *Субботина Н. Н.* Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1890—1896.
6. *Красовский Н. Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Мат. сб. 1978. Т. 107. № 4. С. 541—571.

Свердловск

Поступила в редакцию 4.V.1988