Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 62—50

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В КООПЕРАТИВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ПОБОЧНЫМИ ПЛАТЕЖАМИ

Данилов Н. Н.

Получено общее достаточное условие существования динамически устойчивого [1—3] решения кооперативной дифференциальной игры с побочными платежами и исследованы динамические свойства множества дележей и С-ядра. Формулируется задача о динамической устойчивости дележа, принадлежащего решению игры. Под решением такой задачи понимается распределительная функция (РФ), удовлетворяющая условию динамической устойчивости дележа (оптимальная РФ). Вводится понятие исходной РФ. Разработан метод вычисления оптимальной исходной РФ. Метод применяется в одной игре трех лиц с интегральными трансферабельными выигрышами, в которой в качестве решения игры рассматриваются множество дележей, С-ядро и вектор Шепли.

1. Постановка задачи. Пусть дана дифференциальная игра $\Gamma(x_0, T - t_0)$ n лиц с предписанной продолжительностью $T - t_0$:

$$\dot{x} = f(x, u_1, \ldots, u_n), \quad x \in R^m, \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

$$J_i(x_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_{t_0}^{T} h_i(x(t))\,dt + H_i(x(T)) \tag{1.2}$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено противное, $i = 1, \ldots, n$; $t \in [t_0, T]$.

Допустимым управлением игрока i будем называть любую измеримую по Лебегу на отрезке $[t_0, T]$ функцию u_i, удовлетворяющую для каждого t условию $u_i(t) \in U_i$ ($U_i \subset R^{m_i}$ — компакт).

Относительно системы (1.1) предполагается, что она для любых начальных данных $x_0 \in R^m$ и набора $(u_1, \ldots, u_n)$ допустимых управлений имеет единственное, продолжимое на $[t_0, T]$ решение $x(\cdot)$. Для упрощения ссылок систему (1.1) будем обозначать символом $\Sigma(x_0)$.

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков. Будем предполагать, что правилами игры разрешено образование любой коалиции $S \subset N$ и что выигрыши игроков трансферабельны [2].

Характеристической функцией (ХФ) называется отображение v: $2^N \times R^m \times R_+^1 \to R^1$ (R_+^1 — неотрицательная вещественная полуось), ставящее в соответствие каждой коалиции $S \in 2^N$ и начальной позиции $(x_0, T - t_0) \in R^m \times R_+^1$ вещественное число $v(S; x_0, T - t_0)$, равное выигрышу, который обеспечивает себе коалиция S в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ (независимо от действий игроков из множества $N \setminus S$).

Будем считать, что $v(\varnothing; x_0, T - t_0) = 0$ и

$$v(N; x_0, T - t_0) = \sup_{u_1, \ldots, u_n} \sum_{i \in N} J_i(x_0, u_1, \ldots, u_n)$$

(здесь sup берется по декартовому произведению множеств допустимых управлений всех игроков). Величина $v(N; x_0, T - t_0)$ представляет собой наибольший выигрыш коалиции N в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Вектор $\xi^\circ = (\xi_1^\circ, \ldots, \xi_n^\circ)$, удовлетворяющий условиям $\xi_i^\circ \geqslant v(i; x_0, T - t_0)$ (индивидуальная рациональность), $\xi^\circ(N) = v(N; x_0, T - t_0)$

(коллективная рациональность), называется дележом (здесь и в дальнейшем $\xi^\circ(S) = \sum_{i\in S}\xi_i^\circ$, $S \subset N$).

Известно [4], что вектор $\xi^\circ \in R^n$ является дележом тогда и только тогда, когда

$$\xi_i^\circ = v(i;\ x_0,\ T - t_0) + \alpha_i^\circ \tag{1.3}$$

$$\alpha_i^\circ \geqslant 0;\quad \alpha^\circ(N) = v(N; x_0, T - t_0) - \sum_{i\in N} v(i; x_0, T - t_0) \tag{1.4}$$

Вектор $\alpha^\circ = (\alpha_1^\circ, \ldots, \alpha_n^\circ)$, удовлетворяющий условиям (1.4), будем называть вектором побочных платежей.

Тройку $\Gamma_v(x_0, T - t_0) = \langle \Sigma(x_0), N, v\rangle$ будем называть кооперативной дифференциальной игрой с побочными платежами. Игра $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$, в которой ХФ супераддитивна по S, т. е.

$$v(S;\ x_0,\ T - t_0) + v(R; x_0,\ T - t_0) \leqslant v(R \cup S;\ x_0,\ T - t_0)$$

$$S, R \subset N\colon\ S \cap R = \varnothing \tag{1.5}$$

называется существенной. Будем рассматривать существенные игры.

2. **Динамически устойчивые принципы оптимальности.** Обозначим $E_v(x_0, T - t_0)$ множество всех дележей в игре $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$. Так как для супераддитивной ХФ $\alpha^\circ(N) > 0$, то $E_v(x_0, T - t_0) \neq \varnothing$.

Пусть $W_v\colon \Gamma_v(x_0, T - t_0) \to W_v(x_0, T - t_0)$ — отображение, ставящее в соответствие каждой игре $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$ подмножество $W_v(x_0, T - t_0) \subset E_v(x_0, T - t_0)$, называемое оптимальным. Отображение W_v будем называть принципом оптимальности, а множество $W_v(x_0, T - t_0)$ — решением игры $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$.

Пусть $x(\cdot)$ — некоторая траектория системы $\Sigma(x_0)$. Погрузим игру $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$ в семейство (по параметру t) аналогичных игр $\{\Gamma_v(x(t), T - t),\ t_0 \leqslant t \leqslant T\}$, где $\Gamma_v(x(t), T - t) = \langle \Sigma(x(t)), N, v\rangle$. По определению $W_v(x(t), T - t) \subset E_v(x(t), T - t)$.

Любую траекторию $\bar{x}(\cdot)$ системы $\Sigma(x_0)$, такую, что

$$\sum_{i\in N} J_i(\bar{x}(\cdot)) = v(N; x_0, T - t_0)$$

будем называть условно-оптимальной. Здесь

$$J_i(\bar{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{T} h_i(\bar{x}(t))\,dt + H_i(\bar{x}(T))$$

Определение. Пусть $W_v(x_0, T - t_0) \neq \varnothing$. Дележ $\xi^\circ \in W_v(x_0, T - t_0)$ называется динамически устойчивым, если существует интегрируемая на отрезке $[t_0, T]$ n-вектор-функция $\beta(\cdot)$, такая, что

$$\xi^\circ \in \bigcap_{t_0\leqslant t\leqslant T} \left[\int_{t_0}^{t} \beta(\tau)\, h_N(\bar{x}(\tau))\,d\tau + W_v(\bar{x}(t), T - t)\right] \tag{2.1}$$

$$h_N(\bar{x}(t)) = h_1(\bar{x}(t)) + \ldots + h_n(\bar{x}(t))$$

$$\beta_1(t) + \ldots + \beta_n(t) = 1 \tag{2.2}$$

Решение $W_v(x_0, T - t_0)$ называется динамически устойчивым, если динамически устойчивы все дележи $\xi^\circ \in W_v(x_0, T - t_0)$. В этом случае траектория $\bar{x}(\cdot)$ называется оптимальной.

Условие (2.2) гарантирует выполнение равенства

$$\sum_{i\in N} \int_{t_0}^{t} \beta_i(\tau)\, h_N(\bar{x}(\tau))\,d\tau = \int_{t_0}^{t} h_N(\bar{x}(\tau))\,d\tau$$

Если вместе с (2.2) выполнено условие

$$\beta_i(t) \geqslant 0 \tag{2.3}$$

то в (2.1), $\beta_i(t)$ — весовые коэффициенты. В этом случае доля каждого игрока в «общем выигрыше» $h_N(\bar{x}(t))$ для всех t неотрицательна.

Теорема 1. Пусть $h_N(\bar{x}(t)) \neq 0$. Для того чтобы решение $W_v(x_0, T - t_0)$ игры $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$ было динамически устойчиво, достаточно, чтобы вдоль условно-оптимальной траектории $\bar{x}(\cdot)$ выполнялись следующие условия:

1) $W_v(\bar{x}(t), T - t) \neq \varnothing$;

2) для каждого дележа $\xi^\circ \in W_v(x_0, T - t_0)$ существует дифференцируемая по t функция ξ^t, такая, что

$$\xi^t \in W_v(\bar{x}(t), T - t) \text{ и } \xi^{t_0} = \xi^\circ.$$

Доказательство. Пусть $\xi^\circ \in W_v(x_0, T - t_0)$, а $\xi^t \in W_v(\bar{x}(t), T - t)$ — дифференцируемая по t функция дележа, такая, что $\xi^{t_0} = \xi^\circ$. Построим вектор-функцию

$$\beta(t) = -[h_N(\bar{x}(t))]^{-1} \frac{d}{ds}(\xi^s)\Big|_t \tag{2.4}$$

Функция (2.4) интегрируема на $[t_0, T]$ и удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Действительно,

$$\sum\nolimits_{i \in N} \beta_i(t) = -[h_N(\bar{x}(t))]^{-1} \frac{d}{ds}[v(N; \bar{x}(s), T - s)]\Big|_t =$$

$$= -[h_N(\bar{x}(t))]^{-1} \frac{d}{ds}\left[\int_s^T h_N(\bar{x}(\tau))\, d\tau + \sum\nolimits_{i \in N} H_i(\bar{x}(T))\right]\Bigg|_t = 1$$

$$\int_t^T \beta(\tau) h_N(\bar{x}(\tau))\, d\tau + H(\bar{x}(T)) = \int_t^T d\xi^\tau + H(\bar{x}(T)) = \xi^t \tag{2.5}$$

Условие (2.1) является прямым следствием равенства (2.5). Так как дележ $\xi^\circ \in W_v(x_0, T - t_0)$ был выбран произвольно, то решение $W_v(x_0, T - t_0)$ динамически устойчиво.

Заметим, что если вектор-функцию $\beta(\cdot)$ можно выбрать непрерывной на отрезке $[t_0, T]$, то условия теоремы 1 являются и необходимыми.

Следствие. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 $h_N(\bar{x}(t)) > 0$ и функция ξ^t в условии 2 монотонно не возрастает. Тогда для каждого дележа $\xi^\circ \in W_v(x_0, T - t_0)$ существует вектор-функция $\beta(\cdot)$, удовлетворяющая условиям (2.1)—(2.3).

В ряде случаев решение $W_v(x_0, T - t_0)$ представляет собой выпуклое, замкнутое, многогранное множество (см. ниже пп. 3 и 4).

Теорема 2. Для динамической устойчивости решения $W_v(x_0, T - t_0)$, представляющего собой замкнутое, выпуклое, многогранное множество, необходимо и достаточно, чтобы динамически устойчивыми были его крайние дележи.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $W_v(x_0, T - t_0)$ имеет l крайних точек $\xi^{\circ,1}, \ldots \xi^{\circ,l}$. Для любого дележа $\xi^\circ \in W_v(x_0, T - t_0)$ существует однозначное представление $\xi^\circ = \lambda_1 \xi^{\circ,1} + \ldots + \lambda_l \xi^{\circ,l}$, где $\lambda_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, l$; $\lambda_1 + \ldots + \lambda_l = 1$. Пользуясь динамической устойчивостью крайних точек, получаем

$$\xi^\circ = \sum\nolimits_{k=1}^{l} \lambda_k \xi^{\circ,k} = \int_{t_0}^{t}\left[\sum\nolimits_{k=1}^{l} \lambda_k \beta^k(\tau)\right] h_N(\bar{x}(\tau))\, d\tau + \sum\nolimits_{k=1}^{l} \lambda_k \xi^{t,k}$$

$$\xi^{t,k} \in W_v(\bar{x}(t), T - t), \quad k = 1, \ldots, l \tag{2.6}$$

Обозначим

$$\beta(t) = \sum\nolimits_{k=1}^{l} \lambda_k \beta^k(t), \quad \xi^t = \sum\nolimits_{k=1}^{l} \lambda_k \xi^{t,k}$$

Вектор ξ^t принадлежит множеству $W_v(\bar{x}(t), T-t)$ ввиду выпуклости последнего, а $\beta_1(t)+\ldots+\beta_n(t)=1$. Поэтому из (2.6) следует, что дележ ξ° динамически устойчив.

3. Множество дележей. В этом пункте под решением $W_v(x_0, T-t_0)$ игры $\Gamma_v(x_0, T-t_0)$ будем понимать все множество дележей $E_v(x_0, T-t_0)$.

Лемма 1. Множество дележей $E_v(x_0, T-t_0)$ является выпуклым, компактным подмножеством пространства R^n с n крайними точками вида $\xi^{\circ,k}=(\xi_1^{\circ,k},\ldots,\xi_n^{\circ,k})$, $k=1,\ldots,n$, где

$$\xi_i^{\circ,k}=\begin{cases} v(k; x_0, T-t_0)+\alpha^\circ(N), & i=k\\ v(i; x_0, T-t_0), & i\in N\setminus\{k\}\end{cases} \tag{3.1}$$

Доказательство. Будем применять краткие обозначения: $E_v=E_v(x_0, T-t_0)$, $v(S; x_0, T-t_0)=v(S)$. Множество E_v выпукло и компактно в R^n как пересечение гиперплоскости $\xi^\circ(N)=v(N)$ с выпуклой многогранной областью Q: $\xi_i^\circ \geqslant v(i)$. Область Q, как пересечение n полупространств в R^n, имеет n $(n-1)$-мерных граней, причем точка $\eta=(v(1),\ldots,v(n))$ принадлежит каждой из этих граней. Множество E_v не совпадает ни с одной из $(n-1)$-мерных граней области Q, так как в противном случае вектор η должен был быть дележом, что в существенной игре невозможно.

Покажем, что все векторы вида $\xi^{\circ,k}$ являются крайними точками множества E_v. Очевидно, что каждый вектор $\xi^{\circ,k}$, $k=1,\ldots,n$, является дележом (см. (1.3) —(1.4)). Предположим, что вектор $\xi^{\circ,k}$ не является крайней точкой множества E_v. Тогда должны существовать два различных дележа $\bar{\xi}^\circ$, $\bar{\bar{\xi}}^\circ\in E_v$ с компонентами $\bar{\xi}_i^\circ=v(i)+\bar{\alpha}_i^\circ$, $\bar{\bar{\xi}}_i^\circ=v(i)+\bar{\bar{\alpha}}_i^\circ$, $i=1,\ldots,n$, где $\bar{\alpha}_i^\circ\neq\bar{\bar{\alpha}}_i^\circ$ хотя бы для одного $i\in N$ и для которых справедливо равенство $\lambda\bar{\xi}^\circ+(1-\lambda)\bar{\bar{\xi}}^\circ=\xi^{\circ,k}$, $0<\lambda<1$. Отсюда для k-х компонент дележей $\bar{\xi}^\circ$, $\bar{\bar{\xi}}^\circ$, $\xi^{\circ,k}$ должно иметь место равенство

$$\lambda\bar{\xi}_k^\circ+(1-\lambda)\bar{\bar{\xi}}_k^\circ=\xi_k^{\circ,k},\quad 0<\lambda<1 \tag{3.2}$$

Если $\bar{\alpha}_k^\circ=\bar{\bar{\alpha}}_k^\circ$, то из равенства (3.2) получаем $\bar{\bar{\alpha}}_k^\circ=v(N)-\sum_{i\in N}v(i)=\bar{\alpha}_k^\circ$. Это означает, что $\bar{\alpha}_i^\circ=\bar{\bar{\alpha}}_i^\circ=0$ для всех $i\in N\setminus\{k\}$ и, следовательно, $\bar{\xi}^\circ=\bar{\bar{\xi}}^\circ=\xi^{\circ,k}$. Поэтому должно быть $\bar{\alpha}_k^\circ\neq\bar{\bar{\alpha}}_k^\circ$ и, следовательно,

$$\bar{\alpha}_k^\circ,\ \bar{\bar{\alpha}}_k^\circ<v(N)-\sum_{i\in N}v(i) \tag{3.3}$$

Из (3.2) имеем

$$\lambda=\frac{\xi_k^{\circ,k}-\bar{\bar{\xi}}_k^\circ}{\bar{\xi}_k^\circ-\bar{\bar{\xi}}_k^\circ}=\frac{v(N)-\sum_{i\in N}v(i)-\bar{\bar{\alpha}}_k^\circ}{\bar{\alpha}_k^\circ-\bar{\bar{\alpha}}_k^\circ}$$

Если $\bar{\alpha}_k^\circ>\bar{\bar{\alpha}}_k^\circ$, то с учетом (3.3) получаем, что последняя дробь больше единицы, что противоречит условию $\lambda<1$; если $\bar{\alpha}_k^\circ<\bar{\bar{\alpha}}_k^\circ$, то последняя дробь отрицательна (так как ее числитель положителен), что противоречит условию $\lambda>0$. Следовательно, сделанное предположение неверно и каждый из n векторов $\xi^{\circ,k}$, $k=1,\ldots,n$, с компонентами (3.1) является крайней точкой множества E_v.

Покажем теперь, что кроме точек $\xi^{\circ,k}$ $k=1,\ldots,n$, в E_v нет других крайних точек. Для этого достаточно показать, что любой дележ вида $\xi^\circ=\{v(i)+\alpha_i^\circ, i=1,\ldots,n\}$, где $\bar{\alpha}_i^\circ<\alpha^\circ(N)$ для всех $i=1,\ldots,n$ и $\alpha_i^\circ>0$ по меньшей мере для двух индексов i, не является крайней точкой множества E_v. Рассмотрим n дележей $\xi^{\circ,k}$, $k=1,\ldots,n$, компоненты которых определены равенствами (3.1), и вектор λ с компонентами $\lambda_i=\alpha_i^\circ/\alpha^\circ(N)$. В существенной игре $\alpha^\circ(N)>0$. Можно проверить, что

$$\xi^\circ=\sum_{k=1}^n\lambda_k\xi^{\circ,k},\quad \sum_{k=1}^n\lambda_k=1,\quad 0\leqslant\lambda_k<1,\quad k-1,\ldots,n$$

и для каждого k, такого, что $\alpha_k^\circ>0$, справедливо $\lambda_k>0$. Следовательно, дележ ξ° не является крайней точкой множества E_v. Для завершения доказательства остается заметить, что среди векторов $\xi^{\circ,k}$, $k=1,\ldots,n$, являющихся крайними точками множества E_v, нет совпадающих (в противном случае игра была бы несущественной (см. 3.1))). Таким образом, E_v имеет ровно n крайних точек.

Как следует из леммы 1, любой дележ $\xi^\circ \in E_v(x_0, T-t_0)$ можно единственным образом представить в виде

$$\xi^\circ = \xi^\circ(\lambda^\circ) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^\circ \xi^{\circ, k} \tag{3.4}$$

где $\lambda^\circ = (\lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_n^\circ)$ — вектор из n-мерного стандартного симплекса

$$\Lambda = \left\{\lambda \in R^n \mid \lambda_k \geqslant 0, k = 1, \ldots, n; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1\right\}.$$

В (3.4) числа $\lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_n^\circ$ являются барицентрическими координатами вектора ξ° во множестве $E_v(x_0, T-t_0)$. Можно показать, что для каждого $\lambda^\circ \in \Lambda$ вектор (3.4) является дележом. Обратно, для каждого дележа $\xi^\circ \in E_v(x_0, T-t_0)$ существует вектор $\lambda^\circ \in \Lambda$, удовлетворяющий условию (3.4). Отсюда получаем представление

$$E_v(x_0, T-t_0) = \{\xi^\circ(\lambda) \in R^n \mid \lambda \in \Lambda\} \tag{3.5}$$

Рассмотрим множественнозначное отображение $(x, T-t) \to E_v(x, T-t)$, которое каждой начальной позиции $(x, T-t)$ ставит в соответствие выпуклое компактное множество дележей в игре $\Gamma_v(x, T-t)$.

Пусть $\bar{x}(\cdot)$ — условно-оптимальная траектория в игре $\Gamma_v(x_0, T-t_0)$. Введем множество $X(\bar{x}(\cdot)) = \{(x, T-t) \mid x = \bar{x}(t), t_0 \leqslant t \leqslant T\}$. Пусть ρ_X — метрика Хаусдорфа, порожденная метрикой

$$\rho(\xi^t, \eta^t) = \max_{i \in N} |\xi_i^t - \eta_i^t|, \xi^t, \eta^t \in E_v(x, T-t)$$

Лемма 2. Пусть ХФ v непрерывна на множестве $X(\bar{x}(\cdot))$. Тогда отображение $(x, T-t) \to E_v(x, T-t)$ непрерывно по включению (в метрике ρ_X) на множестве $X(\bar{x}(\cdot))$.

Доказательство. Из непрерывности v следует непрерывность функций крайних дележей $\xi^{t,k}$, $k = 1, \ldots, n$:

$$\xi_i^{t,k} = \begin{cases} v(k; \bar{x}(t), T-t) + \alpha^t(N), & i = k \\ v(i; \bar{x}(t), T-t), & i \in N \setminus \{k\} \end{cases}$$

Поэтому любая функция дележа $\xi^t = \xi^t(\lambda) = \xi(\lambda)(\bar{x}(t), T-t)$ непрерывна на $X(\bar{x}(\cdot))$. Это означает, что для каждого фиксированного $\bar{\lambda} \in \Lambda$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_1 = \delta(\varepsilon, \bar{\lambda}) > 0$, что $\|\xi(\bar{\lambda})(\bar{x}(t'), T-t') - \xi(\bar{\lambda})(\bar{x}(t''), T-t'')\| < \varepsilon$, как только $\|\bar{x}(t') - \bar{x}(t'')\| < \delta_1$, $|t'-t''| < \delta_1$, $t', t'' \in [t_0, T]$. Зафиксируем некоторый дележ $\xi^{t'} = \xi^{t'}(\bar{\lambda}) \in E_v(\bar{x}(t'), T-t')$ и сделаем оценку

$$\inf_{\xi^{t''} \in E_v(\bar{x}(t''), T-t'')} \rho(\xi^{t'}(\bar{\lambda}), \xi^{t''}) = \inf_{\mu \in \Lambda} \rho(\xi^{t'}(\bar{\lambda}), \xi^{t''}(\mu)) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(\xi^{t'}(\bar{\lambda}), \xi^{t''}(\bar{\lambda})) < \varepsilon$$

(здесь использовано представление (3.5)). Отсюда

$$\sup_{\xi^{t'} \in E_v(\bar{x}(t'), T-t')} \inf_{\xi^{t''} \in E_v(\bar{x}(t''), T-t'')} \rho(\xi^{t'}, \xi^{t''}) =$$
$$= \sup_{\lambda \in \Lambda} \inf_{\mu \in \Lambda} \rho(\xi^{t'}(\lambda), \xi^{t''}(\mu)) < \varepsilon$$

как только выполнены условия

$$\|\bar{x}(t') - \bar{x}(t'')\| < \delta, \quad |t'-t''| < \delta, \quad t', t'' \in [t_0, T], \quad \delta = \min\{\delta(\varepsilon, \lambda), \lambda \in \Lambda\} \tag{3.6}$$

Аналогично получаем оценку

$$\sup_{\xi^{t''} \in E_v(\bar{x}(t''), T-t'')} \inf_{\xi^{t'} \in E_v(\bar{x}(t') T-t')} \rho(\xi^{t'}, \xi^{t''}) < \varepsilon$$

Следовательно, $\rho_X(E_v(\bar{x}(t'), T-t'), E_v(\bar{x}(t''), T-t'')) < \varepsilon$, как только выполнены условия (3.6).

Обозначим $H_N(\bar{x}(T)) = \sum_{i \in N} H_i(\bar{x}(T))$.

Лемма 3. Пусть $h_N(\bar{x}(t)) \neq 0$ и функции $v(i; \bar{x}(t), T-t)$ непрерывно дифференцируемы по t. Тогда любой дележ $\xi^\circ = (\xi_1^\circ, \ldots, \xi_n^\circ) \in \in E_v(x_0, T-t_0)$ можно представить в виде

$$\xi_i^\circ = \int_{t_0}^{T} \beta_i(t)\, h_N(\bar{x}(t))\, dt + H_i(\bar{x}(T)) \tag{3.7}$$

где $\beta(\cdot) = (\beta_1(\cdot), \ldots, \beta_n(\cdot))$ — интегрируемая на $[t_0, T]$ вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$\sum\nolimits_{i \in N} \beta_i(t) = 1 \tag{3.8}$$

Доказательство. Существует вектор $\lambda^\circ = (\lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_n^\circ) \in \Lambda$, такой, что $\xi^\circ = = \xi^\circ(\lambda^\circ) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^\circ \xi^{\circ, k}$, где $\xi^{\circ, k}$, $k = 1, \ldots, n$, — крайние точки множества $E_v(x_0, T-t_0)$. На отрезке $[t_0, T]$ построим вектор-функцию $\beta(\cdot) = (\beta_1(\cdot), \ldots, \beta_n(\cdot))$:

$$\beta_i(t) = \lambda_i^\circ + [h_N(\bar{x}(t))]^{-1}\Big(\lambda_i^\circ \frac{d}{ds}\Big[\sum\nolimits_{j \in N} v(j; \bar{x}(s), T-s)\Big]\Big|_t - \\ - \frac{d}{ds}[v(i; \bar{x}(s), T-s)]\big|_t\Big) \tag{3.9}$$

Функции (3.9) интегрируемы на отрезке $[t_0, T]$. Покажем, что вектор-функция $\beta(\cdot)$ удовлетворяет условию (3.7). Интеграл в правой части (3.7) равен

$$\lambda_i^\circ \int_{t_0}^{T} h_N(\bar{x}(t))\, dt + \lambda_i^\circ \int_{t_0}^{T} \frac{d}{ds}\Big[\sum\nolimits_{i \in N} v(i; \bar{x}(s), T-s)\Big]\Big|_t dt - \\ - \int_{t_0}^{T} \frac{d}{ds}[v(i; \bar{x}(s), T-s)]\big|_t\, dt$$

Исходя из определения условно-оптимальной траектории и пользуясь непрерывностью подынтегральных функций во втором и третьем интегралах, а затем аддитивностью функции $v(S; \bar{x}(T), 0)$ по S, получим, что правую часть равенства (3.7) можно записать в виде

$$\lambda_i^\circ [v(N; x_0, T-t_0) - H_N(\bar{x}(T))] - \lambda_i^\circ \sum\nolimits_{i \in N} v(i; x_0, T-t_0) + \\ + v(i; x_0, T-t_0) + \lambda_i^\circ \sum\nolimits_{j \in N} v(j; \bar{x}(T), 0) - v(i; \bar{x}(T), 0) + H_i(\bar{x}(T)) = \\ = v(i; x_0, T-t_0) + \lambda_i^\circ \Big[v(N; x_0, T-t_0) - \sum\nolimits_{i \in N} v(i; x_0, T-t_0)\Big]$$

Как следует из (3.1) и (3.4), правая часть последнего равенства равна ξ_i°. Следовательно, равенство (3.7) для вектора (3.9) выполняется. Можно проверить, что равенство (3.8) также выполняется для вектора (3.9).

Вектор-функцию $\beta(\cdot)$, удовлетворяющую условиям (3.7)—(3.8), будем называть распределительной функцией (РФ) для дележа ξ°.

Можно показать, что для каждого дележа существует «достаточно много» РФ.

Теорема 3. Пусть $h_N(\bar{x}(t)) \neq 0$, а ХФ v непрерывна на множестве $X(\bar{x}(\cdot))$ и непрерывно дифференцируема по t. Тогда множество дележей $E_v(x_0, T-t_0)$ динамически устойчиво.

Доказательство. В существенной игре $E_v(\bar{x}(t), T-t) \neq \varnothing$. Условия теоремы позволяют применять леммы 2 и 3. Поэтому для каждого $\xi^\circ \in E_v(x_0, T-t_0)$ существует непрерывная функция дележа $\xi^t \in \in E_v(\bar{x}(t), T-t)$, $\xi^{t_0} = \xi^\circ$. Эта функция дифференцируема. Следовательно, находимся в условиях теоремы 1, если положить $W_v(\bar{x}(t), T - - t) \subset E_v(\bar{x}(t), T-t)$.

4. С-ядро. В этом пункте под множеством $W_v(x_0, T-t_0)$ будем понимать С-ядро $C_v(x_0, T-t_0)$ игры $\Gamma_v(x_0, T-t_0)$. Напомним, что $\xi^\circ \in \in C_v(x_0, T-t_0)$ тогда и только тогда, когда

$$\xi^\circ(S) \geqslant v(S; x_0, T-t_0),\ S \subset N \tag{4.1}$$

Обозначим

$$\alpha^t(S) = v(S; \bar{x}(t), T-t) - \sum_{i\in S} v(i; \bar{x}(t), T-t), \quad S \subset N$$

Лемма 4. Для того чтобы С-ядро $C_v(\bar{x}(t), T-t)$ игры $\Gamma_v(\bar{x}(t), T-t)$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы существовали векторы $\lambda \in \in \Lambda$, такие, что

$$\sum_{i\in S} \lambda_i \geqslant \begin{cases} 0, & |S| = 1 \\ \alpha^t(S)[\alpha^t(N)]^{-1}, & |S| > 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

(при $|S| = n$ в (4.2) достигается равенство).

Доказательство. Необходимость. Пусть $C_v(\bar{x}(t), T-t) \neq \varnothing$. Согласно (4.1) для каждого $\xi^t \in C_v(\bar{x}(t), T-t)$

$$\xi^t(S) \geqslant v(S; \bar{x}(t), T-t), \quad S \subset N \tag{4.3}$$

Компоненты дележа ξ^t можно представить в виде

$$\xi_i^t = v(i; \bar{x}(t), T-t) + \lambda_i \alpha^t(N) \tag{4.4}$$

Подставляя это в (4.3), получаем условие (4.2).

Достаточность. Рассмотрим вектор $\xi^t = (\xi_1^t, \ldots, \xi_n^t)$, компоненты которого выражаются формулой (4.4), где λ_i удовлетворяют условию (4.2). Справедливы условия

$$\xi_i^t \geqslant v(i; \bar{x}(t), T-t); \quad \xi^t(N) = v(N; \bar{x}(t), T-t)$$

$$\xi^t(S) \geqslant v(S; \bar{x}(t), T-t), \quad S \subset N$$

Следовательно, вектор ξ^t является дележом в игре $\Gamma_v(\bar{x}(t), T-t)$ и принадлежит ее С-ядру $C_v(\bar{x}(t), T-t)$.

Предположим, что $C_v(\bar{x}(t), T-t) \neq \varnothing$ и рассмотрим множественнозначное отображение $(x, T-t) \to C_v(x, T-t)$, которое каждой начальной позиции $(x, T-t) \in X(\bar{x}(\cdot))$ ставит в соответствие непустое С-ядро $C_v(x, T-t)$ (замкнутое, выпуклое множество) игры $\Gamma_v(x, T-t)$.

Лемма 5. Пусть $C_v(\bar{x}(t), T-t) \neq \varnothing$, а ХФ v непрерывна на множестве $X(\bar{x}(\cdot))$. Тогда отображение $(x, T-t) \to C_v(x, T-t)$ непрерывно по включению (в метрике Хаусдорфа) на множестве $X(\bar{x}(\cdot))$.

Доказательство. Надо доказать, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\rho_X(C_v(\bar{x}(t'), T-t'), C_v(\bar{x}(t), T-t)) < \varepsilon \tag{4.5}$$

как только выполнено условие

$$\|\bar{x}(t') - \bar{x}(t)\| < \delta(\varepsilon), \quad |t'-t| < \delta(\varepsilon), \quad t', t \in [t_0, T] \tag{4.6}$$

Неравенство (4.5) выполняется тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

1) для каждого $\xi^t \in C_v(\bar{x}(t), T-t)$ найдется $\xi^{t'} \in C_v(\bar{x}(t'), T-t')$, такое, что $\rho(\xi^t, \xi^{t'}) < \varepsilon$,

2) для каждого $\xi^{t'} \in C_v(\bar{x}(t'), T-t')$ найдется $\xi^t \in C_v(\bar{x}(t), T-t)$, такое, что $\rho(\xi^{t'}, \xi^t) < \varepsilon$, как только выполнено условие (4.6).

Докажем 1). По непрерывности по включению множества $E_v(\bar{x}(t), T-t)$ (лемма 2) для каждого $\xi^t \in C_v(\bar{x}(t), T-t)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует дележ $\xi^{t'} \in \in E_v(\bar{x}(t'), T-t')$, такой, что

$$\rho(\xi^t, \xi^{t'}) < \varepsilon \tag{4.7}$$

как только выполнено условие (4.6). Предположим, что для всех $\xi^{t'}$, удовлетворяющих условию (4.7), выполняется условие $\xi^{t'} \notin C_v(\bar{x}(t'), T-t')$. Это означает, что

$$O_\varepsilon(\xi^t) \cap C_v(\bar{x}(t'), T-t') = \varnothing \tag{4.8}$$

где $O_\varepsilon(\xi^t) = \{\eta \mid \rho(\xi^t, \eta) < \varepsilon\}$ — ε-окрестность дележа ξ^t. Пусть $\eta^{t'}$ — ортогональная проекция дележа ξ^t на множество $C_v(\bar{x}(t'), T-t')$:

$$\rho(\xi^t, \eta^{t'}) = \min_{\xi^{t'} \in C_v(\bar{x}(t'), T-t')} \rho(\xi^t, \xi^{t'})$$

Ввиду компактности и выпуклости множества $C_v(\bar{x}(t'), T-t')$ точка $\eta^{t'}$ существует, единственна и лежит на его границе. Отсюда следует существование коалиции $S^* \subset N$, для которой $\eta^{t'}(S^*) = v(S^*; \bar{x}(t'), T-t')$. Из (4.8) вытекает, что $\rho(\xi^t, \eta^{t'}) \geqslant \varepsilon$, откуда получаем оценку:

$$\xi^t(S^*) \leqslant \eta^{t'}(S^*) - \varepsilon_1, \quad 0 < \varepsilon_1 \leqslant |S^*| M\varepsilon \; (M - \text{const} > 0) \tag{4.9}$$

Из непрерывности функции $v(S^*; \bar{x}(t), T-t)$ на отрезке $[t_0, T]$ следует возможность выбора $\varepsilon > 0$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$|v(S^*; \bar{x}(t), T-t) - v(S^*; \bar{x}(t'), T-t')| < \varepsilon_1$$

Из последнего неравенства и соотношения (4.9) получаем $\xi^t(S^*) < v(S^*; \bar{x}(t), T-t)$. Таким образом, пришли к противоречию: так как $\xi^t \in C_v(\bar{x}(t), T-t)$, то должно быть $\xi^t(S) \geqslant v(S; \bar{x}(t), T-t)$, $S \subset N$. Следовательно, предположение (4.8) неверно и предложение 1) доказано. Предложение 2) доказывается аналогично.

Следующая теорема является следствием лемм 3, 4 и теоремы 1.

Теорема 4. Пусть $h_N(\bar{x}(t)) \neq 0$, а ХФ v непрерывна на множестве $X(\bar{x}(\cdot))$ и непрерывно дифференцируема по t. Тогда для динамической устойчивости С-ядра достаточно выполнения условия (4.2).

5. Задача динамической устойчивости. Пусть $\xi^\circ \in E_v(x_0, T-t_0)$. Определим множество (см. лемму 3)

$$B(\xi^\circ) = \Big\{\beta(\cdot) = \big(\beta_1(\cdot), \ldots, \beta_n(\cdot)\big) \,|\, \xi^\circ = \int_{t_0}^{T} \beta(t) h_N(\bar{x}(t))\big) dt +$$
$$+ H(\bar{x}(T)); \beta_1(t) + \ldots + \beta_n(t) = 1\Big\}$$

где $\beta(\cdot)$ — РФ для дележа ξ°. Содержательно $B(\xi^\circ)$ — это множество всех РФ для дележа ξ° вдоль условно-оптимальной траектории $\bar{x}(\cdot)$.

Окончательным исходом игры может быть только один дележ. Предположим, что игроки договорились о реализации дележа $\xi^\circ \in W_v(x_0, T-t_0)$. Так как этот дележ может быть реализован только в случае его динамической устойчивости, то перед игроками стоит следующая задача о динамической устойчивости дележа ξ° (задача ДУ).

Задача ДУ. Найти способ динамически устойчивой реализации дележа $\xi^\circ \in W_v(x_0, T-t_0)$ на отрезке времени $[t_0, T]$ вдоль оптимальной траектории $\bar{x}(\cdot)$. Другими словами, из множества $B(\xi^\circ)$ выбрать такую вектор-функцию $\bar{\beta}(\cdot)$, что

$$\Big[\int_t^T \bar{\beta}(\tau) h_N(\bar{x}(\tau)) d\tau + H(\bar{x}(T))\Big] \in W_v(\bar{x}(t), T-t) \tag{5.1}$$

Решение $\bar{\beta}(\cdot) \in B(\xi^\circ)$ этой задачи будем называть оптимальной РФ для дележа ξ°.

Решение задачи ДУ существует только тогда, когда дележ $\xi^\circ \in W_v(x_0, T-t_0)$ динамически устойчив.

6. Исходная РФ. Как следует из формул (3.1) и (3.4), для каждого дележа $\xi^\circ = (\xi_1^\circ, \ldots, \xi_n^\circ)$ существует единственный вектор $\lambda^\circ \in \Lambda$, такой, что

$$\xi_i^\circ = v(i; x_0, T-t_0) + \lambda_i^\circ \alpha^\circ(N) \tag{6.1}$$

Из (6.1) получаем выражения для барицентрических координат $\lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_n^\circ$ дележа ξ° во множестве $E_v(x_0, T-t_0)$:

$$\lambda_i^\circ = [\alpha^\circ(N)]^{-1}(\xi_i^\circ - v(i; x_0, T-t_0)) \tag{6.2}$$

Построим функции

$$\alpha_i{}^t = \lambda_i{}^\circ \alpha^t(N) \tag{6.3}$$

Очевидно, что

$$\xi^t = \{v(i; \bar{x}(t), T-t) + \alpha_i{}^t, i = 1, \ldots, n\} \in E_n(\bar{x}(t), T-t) \tag{6.4}$$

Предположим, что ХФ v дифференцируема по t на отрезке $[t_0, T]$, и построим вектор-функцию $\beta^\circ(\cdot) = (\beta_1{}^\circ(\cdot), \ldots, \beta_n{}^\circ(\cdot))$:

$$\beta_i{}^\circ(t) = -[h_N(\bar{x}(t))]^{-1} \frac{d}{ds}[v(i; \bar{x}(s), T-s) + \alpha_i{}^s]|_t \tag{6.5}$$

Применяя (6.3) и (6.4), можно проверить, что $\beta^\circ(\cdot) \in B(\xi^\circ)$, т. е. $\beta^\circ(\cdot)$ — РФ для дележа ξ°. Принимая во внимание, что вектор-функция $\beta^\circ(\cdot)$ вычисляется при помощи барицентрических координат $\lambda_1{}^\circ, \ldots, \lambda_n{}^\circ$ дележа ξ° (см. (6.5), (6.3), (6.2)) в исходном множестве дележей $E_v(x_0, T-t_0)$, РФ $\beta^\circ(\cdot)$ будем называть исходной РФ для дележа ξ°.

Исследуем вопрос об оптимальности исходной РФ для множества дележей, С-ядра, а также вектора Шепли.

Пусть под решением игры $\Gamma_v(x_0, T-t_0)$ понимается все множество дележей.

Теорема 5. Для любого динамически устойчивого дележа $\xi^\circ \in E_v(x_0, T-t_0)$ оптимальной РФ (решением задачи ДУ) является его исходная РФ.

Доказательство. Рассмотрим произвольный дележ $\xi^\circ \in E_v(x_0, T-t_0)$. Пусть $\beta^\circ(\cdot) = (\beta_1{}^\circ(\cdot), \ldots, \beta_n{}^\circ(\cdot))$ — исходная РФ этого дележа. Интегрируя равенство (6.5) на отрезке $[t, T]$ и используя соотношения $\alpha_i{}^T = 0$, $v(i; \bar{x}(T), 0) = H_i(\bar{x}(T))$, получаем

$$I_i \triangleq \int_t^T \beta_i{}^\circ(\tau) h_N(\bar{x}(\tau))\, d\tau + H_i(\bar{x}(T)) = v(i; \bar{x}(t), T-t) + \alpha_i{}^t \tag{6.6}$$

Пусть $\lambda_1{}^\circ, \ldots, \lambda_n{}^\circ$ — барицентрические координаты дележа ξ° во множестве $E_v(x_0, T-t_0)$. Подставим в последнее равенство значение $\alpha_i{}^t$ из (6.3). Так как $(\lambda_1{}^\circ, \ldots, \lambda_n{}^\circ) \in \Lambda$, то вектор ξ^t с компонентами $\xi_i{}^t = v(i; \bar{x}(t), T-t) + \lambda_i{}^\circ \alpha^t(N)$ является дележом в текущей игре $\Gamma_v(\bar{x}(t), T-t)$. Поэтому из (6.6) следует, что $I \in E_v(\bar{x}(t), T-t)$ $(I = (I_1, \ldots, I_n))$.

Пусть под решением игры $\Gamma_v(x_0, T-t_0)$ понимается С-ядро.

Теорема 6. Для того чтобы исходная РФ $\beta^\circ(\cdot)$ динамически устойчивого дележа ξ°, принадлежащего С-ядру $C_v(x_0, T-t_0)$, была оптимальной (решением задачи ДУ), достаточно, чтобы для каждой коалиции $S \subset N$ отношение $\alpha^t(S)[\alpha^t(N)]^{-1}$ монотонно не возрастало с ростом времени вдоль траектории $\bar{x}(\cdot)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1{}^\circ, \ldots, \lambda_n{}^\circ$ — барицентрические координаты дележа $\xi^\circ \in C_v(x_0, T-t_0)$. По лемме 4

$$\textstyle\sum_{i\in S} \lambda_i{}^\circ \geqslant \alpha^\circ(S)[\alpha^\circ(N)]^{-1}, \quad S \subset N$$

Пользуясь монотонным невозрастанием $\alpha^t(S)[\alpha^t(N)]^{-1}$, получаем

$$\textstyle\sum_{i\in S} [v(i; \bar{x}(t), T-t) + \lambda_i{}^\circ \alpha^t(N)] \geqslant v(S; \bar{x}(t), T-t), \quad S \subset N$$

Следовательно, в момент t существует дележ

$$\xi^t = (\xi_1{}^t, \ldots, \xi_n{}^t)\colon\ \xi_i{}^t = v(i; \bar{x}(t), T-t) + \lambda_i{}^\circ \alpha^t(N) \tag{6.7}$$

принадлежащий С-ядру $C_v(\bar{x}(t), T-t)$ игры $\Gamma_v(\bar{x}(t), T-t)$. Продифференцируем равенство (6.7) и разделим обе части полученного соотношения на $h_N(\bar{x}(t)) \neq 0$. Принимая во внимание соотношения (6.3) и (6.5), запишем

$$[h_N(\bar{x}(t))]^{-1} \frac{d}{ds}(\xi_i^s)|_t = -\beta_i^\circ(t)$$

Отсюда имеем: $\xi_i^t = I_i$ (величина I_i определена равенством (6.6)). Таким образом, $I = (I_1, \ldots, I_n) \in C_v(\bar{x}(t), T-t)$.

Теорема 7. Для оптимальности исходной РФ $\beta^\circ(\cdot)$ динамически устойчивого дележа $\xi^\circ \in C_v(x_0, T-t_0)$ достаточно, чтобы барицентрические координаты дележа ξ° в $E_v(x_0, T-t_0)$ удовлетворяли условию.

$$\sum_{i \in S} \lambda_i^\circ \geqslant \alpha^t(S)[\alpha^t(N)]^{-1}, \quad S \subset N$$

Иными словами, для оптимальности $\beta^\circ(\cdot)$ для дележа $\xi^\circ \in C_v(x_0, T-t_0)$ достаточно, чтобы в каждый момент времени t существовал дележ $\xi^t \in C_v(\bar{x}(t), T-t)$, барицентрические координаты которого в $E_v(\bar{x}(t), T-t)$ совпадали с барицентрическими координатами дележа ξ° в $E_v(x_0, T-t_0)$.

Теорема 7 доказывается как теорема 6. Она дает сравнительно простой критерий для проверки оптимальности РФ для дележа ξ°, принадлежащего С-ядру: достаточно проверить выполнение условия (4.2) для барицентрических координат ξ°.

Приведем алгоритм решения задачи ДУ в случае, когда ее решением является исходная РФ:

1) вычислить барицентрические координаты дележа $\xi^\circ \in W_v(x_0, T-t_0)$ во множестве $E_v(x_0, T-t_0)$ (по формуле (6.2));

2) найти вид функций побочных платежей α_i^t, $i = 1, \ldots, n$, определенных на отрезке $[t_0, T]$ и соответствующих дележу ξ° (по формуле (6.3));

3) найти исходную РФ $\beta^\circ(\cdot)$ для дележа ξ° (по формуле (6.5)).

7. Вектор Шепли. Пусть $W_v(x_0, T-t_0)$ — вектор Шепли $\Phi^v(x_0, T-t_0)$. В текущей игре $\Gamma_v(\bar{x}(t), T-t)$ его компоненты вычисляются по формуле

$$\Phi_i^v(\bar{x}(t), T-t) = \sum_{S \subset N: i \in S} \frac{(n-|S|)!\,(|S|-1)!}{n!} \times$$
$$\times [v(S; \bar{x}(t), T-t) - v(S \setminus \{i\}; \bar{x}(t), T-t)]$$

Построим вектор-функцию $\beta(\cdot) = (\beta_1(\cdot), \ldots, \beta_n(\cdot))$:

$$\beta_i(t) = -[h_N(\bar{x}(t))]^{-1} \frac{d}{ds}[\Phi_i^v(\bar{x}(s), T-s)]|_t \tag{7.1}$$

Теорема 8. Пусть вектор-функция $\Phi^v(\bar{x}(t), T-t)$ дифференцируема по t. Тогда существует единственная оптимальная РФ (решение задачи ДУ) для вектора Шепли $\Phi^v(x_0, T-t_0)$, компоненты которой имеют вид (7.1).

Доказательство. В каждой текущей игре вектор Шепли существует и единствен. Поэтому его динамическая устойчивость означает:

$$\Phi^v(x_0, T-t_0) = \int_{t_0}^{t} \beta(\tau) h_N(\bar{x}(\tau))\, d\tau + \Phi^v(\bar{x}(t), T-t) \tag{7.2}$$

С учетом равенств

$$\sum_{i \in N} \Phi_i^v(\bar{x}(t), T-t) = v(N; \bar{x}(t), T-t), \quad \Phi^v(\bar{x}(T), 0) = H(\bar{x}(T))$$

для функций (7.1) имеем

$$\sum\nolimits_{i\in N} \beta_i(t) =$$

$$= -[h_N(\bar{x}(t))]^{-1}\frac{d}{ds}\left[\int_s^T h_N(\bar{x}(\tau))\,d\tau + H_N(\bar{x}(T))\right]\Big|_t = 1$$

$$\int_{t_0}^T \beta_i(t)\,h_N(\bar{x}(t))\,dt + H_i(\bar{x}(T)) =$$

$$= -\int_{t_0}^T d\Phi_i^v(\bar{x}(t), T-t) + H_i(\bar{x}(T)) = \Phi_i^v(x_0, T-t_0)$$

Следовательно, вектор-функция $\beta(\cdot)$ с компонентами (7.1) является РФ для $\Phi^v(x_0, T-t_0)$. Вектор-функция $\beta(\cdot)$ — решение задачи ДУ для $\Phi^v(x_0, T-t_0)$, так как для нее равенство (7.2) превращается в тождество. Единственность оптимальной РФ следует из единственности вектора Шепли в каждой текущей игре.

8. Решение задачи ДУ для одной игры трех лиц. Рассмотрим дифференциальную игру трех лиц, описываемую уравнением

$$x^{\cdot} = u_1 + u_2 + u_3, \quad x(t_0) = 0, \quad t_0 = 0 \tag{8.1}$$
$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}), \quad u_i = (u_i^{(1)}, u_i^{(2)}): \ \|u_i\| \leqslant 1, \quad i = 1, 2, 3$$

Функции выигрыша игроков имеют вид (a_i, b_i, c_i — неотрицательные постоянные)

$$J_i(x_0, u_1, u_2, u_3) = \int_{t_0}^T (a_i x^{(1)}(t) + b_i x^{(2)}(t) + c_i)\,dt \tag{8.2}$$
$$\left(\sum\nolimits_{i\in S} a_i\right)^2 + \left(\sum\nolimits_{i\in S} b_i\right)^2 \neq 0, \quad S \subset N \quad (N = \{1, 2, 3\})$$

Допустимыми управлениями являются измеримые по Лебегу на $[t_0, T]$ функции u_i, удовлетворяющие в каждый момент $t \in [t_0, T]$ условию $\|u_i(t)\| \leqslant 1$.

Построим ХФ v. Для этой цели для каждой коалиции $S \subset N$ рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma_S^y(x_0, T-t_0)$ между коалициями S и $N \setminus S$, которая определяется следующим образом. Динамика игры имеет вид (8.1). В качестве допустимых стратегий φ_S и $\varphi_{N\setminus S}$ игроков S и $N \setminus S$ в игре Γ_S^y рассматриваются кусочно-программные стратегии (КПС) [2]. Множество КПС игрока S ($N \setminus S$) будем обозначать D_S ($D_{N\setminus S}$). Выигрыш игрока S (максимизирующего игрока) в каждой ситуации (φ_S, $\varphi_{N\setminus S}$) определяется как $-\theta(x(T), y)$, где $x(T)$ — конечная точка траектории $x(\cdot) = x(\cdot;\, x_0, \varphi_S, \varphi_{N\setminus S})$ системы (8.1), $y \in R^2$, θ — евклидова метрика. Так как правая часть уравнения (8.1) «разделена» относительно управлений и подынтегральные функции в (8.2) непрерывны в R^2, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует ε-седловая точка (φ_S^ε, $\varphi_{N\setminus S}^\varepsilon$) и значение

$$\operatorname{val}\Gamma_S^y(x_0, T-t_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} J(x_0, \varphi_S^\varepsilon, \varphi_{N\setminus S}^\varepsilon)$$

$$(J(x_0, \varphi_S^\varepsilon, \varphi_{N\setminus S}^\varepsilon) = -\theta(x(T;\, x_0, \varphi_S^\varepsilon, \varphi_{N\setminus S}^\varepsilon), y)),$$

Для каждой коалиции $S \subset N$ определим множество

$$Y_S^{T-t_0}(x_0) = \{y \in R^2 \mid \operatorname{val}\Gamma_S^y(x_0, T-t_0) = 0\}$$

Обозначим

$$r_S(t_0) = (|S| - |N \setminus S|)(T-t_0), \quad R(x_0, r_S(t_0)) =$$
$$= \{x \in R^2 \mid \|x\|^2 \leqslant r_S^2(t_0)\}$$

Лемма 6. Пусть $r_S(t_0) > 0$. Для каждой КПС $\varphi_{N\setminus S} \in D_{N\setminus S}$ и точки $y \in R(x_0, r_S(t_0))$ существует КПС $\varphi_S \in D_S$, обеспечивающая достижение точки y (в ситуации $(\varphi_S, \varphi_{N\setminus S})$ точка y достигается, если $x(T; x_0, \varphi_S, \varphi_{N\setminus S}) = y$).

Доказательство. Пусть игрок $N \setminus S$ выбрал КПС $\varphi_{N\setminus S} = (\Delta_{N\setminus S}, a_{N\setminus S})$. Построим КПС $\varphi_S = (\Delta_S, a_S)$, где $\Delta_S = \{t_0 = t_0^{\Delta_S} < \ldots < t_{l_S}^{\Delta_S} = T\}$, $a_S = (a_S{}^\circ, \ldots, a_S^{l_S})$, $a_S{}^k: (t_k{}^{\Delta_S}, x(t_k{}^{\Delta_S})) \to u_S$, $\| u_S \| \leqslant |S|$, $k = 0, \ldots, l_S$, следующим образом: $\Delta_S = \Delta_{N\setminus S}$ и

$$a_S{}^k(x) = -a^k_{N\setminus S}(x) + \omega, \quad \forall x \in R^2, \quad k = 0, \ldots, l_S \tag{8.3}$$

$$\omega = \frac{y - x_0}{T - t_0}, \quad y \in R(x_0, r_S(t_0))$$

Так как

$$\|\omega\| - \frac{1}{T - t_0}\|y - x_0\| \leqslant \frac{1}{T - t_0} r_S(t_0) = |S| - |N\setminus S|$$

то

$$\|a_S{}^k(x)\| = \|a^k_{N\setminus S}(x)\| + \|\omega\| \leqslant |N \setminus S| + |S| - |N \setminus S| = |S|$$

и, значит, соотношение (8.3) корректно.

Для пары КПС $(\varphi_S, \varphi_{N\setminus S})$ из (8.1) получаем $\dot{x} = \omega$, или

$$x(T) = x_0 + \frac{1}{T - t_0}\int_{t_0}^{T}(y - x_0)\,dt = y$$

Следствие. Пусть $r_S(t_0) > 0$. Тогда

$$Y_S^{T-t_0}(x_0) = \{x \in R^2 \mid \|x\|^2 \leqslant r_S{}^2(t_0)\} \neq \varnothing \tag{8.4}$$

Доказательство. Из леммы 6 следует, что

$$\inf_{\varphi_S}\sup_{\varphi_{N\setminus S}} \theta(x(T; x_0, \varphi_S, \varphi_{N\setminus S}), y) = 0, \quad \forall y \in R(x_0, r_S(t_0))$$

Так как правые части (8.1) разделены относительно управлений, то можно переставить inf и sup, отсюда

$$\operatorname{val}\Gamma_S{}^y(x_0, T - t_0) = 0, \quad \forall y \in R(x_0, r_S(t_0))$$
$$\operatorname{val}\Gamma_S{}^y(x_0, T - t_0) > 0, \quad \forall y \notin R(x_0, r_S(t_0))$$

Поэтому справедливо соотношение (8.4).

Так как неравенство $r_S(t_0) < 0$ равносильно неравенству $r_{N\setminus S}(t_0) > 0$, то соотношение (8.4) остается справедливым при замене S на $N\setminus S$ и $r_S(t_0)$ на $r_{N\setminus S}(t_0)$.

Определим теперь ХФ

$$v(S; x_0, T - t_0) = \begin{cases} \max \sum_{i\in S} J_i, & |S| > |N \setminus S| \\ \min \sum_{i\in S} J_i, & |S| < |N \setminus S| \\ 0, & S = \varnothing \end{cases} \tag{8.5}$$

где J_i — функции выигрыша (8.2), операции max, min берутся по $Y_S^{T-t_0}(x_0)$ и $Y_{N\setminus S}^{T-t_0}(x_0)$ соответственно.

Для каждой коалиции $S \subset N$ введем обозначения

$$u_S = (u_S^{(1)}, u_S^{(2)}), \quad u_S^{(m)} = \sum_{i\in S} u_i^{(m)}, \quad m = 1, 2$$

$$a_S = \sum_{i\in S} a_i, \quad b_S = \sum_{i\in S} b_i, \quad c_S = \sum_{i\in S} c_i$$

Вычислим условно-оптимальную траекторию $\bar{x}(\cdot) = x(\cdot; x_0, \bar{u}_N)$:

$$\sum_{i\in N} J_i(x_0, \bar{u}_N) = \max_{u_N} \sum_{i\in N} J_i(x_0, u_N)$$

Используя принцип максимума Л. С. Понтрягина, получаем

$$\bar{u}_N^{(1)} = \frac{3a_N}{\sqrt{a_N^2 + b_N^2}}, \quad \bar{u}_N^{(2)} = \frac{3b_N}{\sqrt{a_N^2 + b_N^2}}$$

Отсюда

$$\bar{x}^{(1)}(t)=\frac{3a_N}{\sqrt{a_N^2+b_N^2}}(t-t_0)+x_0^{(1)}$$

$$\bar{x}^{(2)}(t)=\frac{3b_N}{\sqrt{a_N^2+b_N^2}}(t-t_0)+x_0^{(2)}$$

Для максимальной коалиции N имеем

$$v(N;\bar{x}(t),T-t)=\frac{3}{2}\sqrt{a_N^2+b_N^2}(T^2-t^2)+$$
$$+[(a_Nx_0^{(1)}+b_Nx_0^{(2)}+c_N)-3\sqrt{a_N^2+b_N^2}\,t_0](T-t)$$

Аналогично находим

$$\bar{u}_S^{(1)}=\frac{a_S}{\sqrt{a_S^2+b_S^2}},\quad \bar{u}_S^{(2)}=\frac{b_S}{\sqrt{a_S^2+b_S^2}},\quad S\subset N\colon |S|=2$$

$$\bar{u}_i^{(1)}=-\frac{a_i}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}},\quad \bar{u}_i^{(2)}=-\frac{b_i}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}$$

$$v(S;\bar{x}(t),T-t)=\frac{1}{2}\sqrt{a_S^2+b_S^2}(T-t)^2+\sum\nolimits_{i\in S}(a_i\bar{x}^{(1)}(t)+$$
$$+b_i\bar{x}^{(2)}(t)+c_i)(T-t),\ S\subset N\colon |S|=2;\quad v(i;\bar{x}(t),T-t)=$$
$$=-\frac{1}{2}\sqrt{a_i^2+b_i^2}(T-t)^2+(a_i\bar{x}^{(1)}(t)+b_i\bar{x}^{(2)}(t)+c_i)(T-t)$$

Лемма 7. ХФ v, определенная равенством (8.5), супераддитивна по S.

Лемма доказывается подстановкой значений ХФ v в (1.5).

Таким образом, на основе игры (8.1), (8.2) определена существенная кооперативная игра $\Gamma_v(x_0,\ T-t_0)$ в форме ХФ (8.5).

Так как условия теоремы 3 выполнены, то множество дележей $E_v(x_0,\ T-t_0)$ в этой игре динамически устойчиво.

Для игры трех лиц условие (4.2) существования С-ядра $C_v(\bar{x}(t),\ T-t)$ равносильно неравенству

$$\sum\nolimits_{S\subset N\colon |S|=2} v(S;\bar{x}(t),T-t)\leqslant 2v(N;\bar{x}(t),T-t)$$

Так как справедливость этого условия в данном случае очевидна, то $C_v(\bar{x}(t),\ T-t)\neq\varnothing$. Все условия теоремы 4 выполнены, и потому С-ядро $C_v(x_0,\ T-t_0)$ в рассматриваемой игре существует и динамически устойчиво.

Таким образом, когда под решением $W_v(x_0,\ T-t_0)$ игры $\Gamma_v(x_0,\ T-t_0)$ понимается все множество дележей или С-ядро, условно-оптимальная траектория $\bar{x}(\cdot)$ является оптимальной.

Применяя приведенный в п. 6 алгоритм, решим задачу ДУ для множества дележей, С-ядра и вектора Шепли.

Пусть в (8.2) $T=1$; $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=0$; $b_1=2$, $b_2=b_3=1$; $c_1=10$, $c_2=15$, $c_3=5$. Для этих числовых данных вычислим (с точностью до второго знака после запятой):

$$v^\circ(N)=37{,}50;\quad v^\circ(1)=8{,}88,\ v^\circ(2)=13{,}88,\ v^\circ(3)=4{,}50$$
$$v^\circ(\{1,2\})=27{,}12,\ v^\circ(\{1,3\})=16{,}58,\ v^\circ(\{2,3\})=21{,}41$$

где $v^\circ(S)=v(S;\ x_0,\ T-t_0)$. В произвольный момент $t\in[0,1]$ имеем

$$h_N(\bar{x}(t))=\sum\nolimits_{i=1}^{3}(a_i\bar{x}^{(1)}(t)+b_i\bar{x}^{(2)}(t)+c_i)=15t+30$$

$$v^t(N)=7{,}50(1-t^2)+30(1-t);\ v^t(1)=-7{,}72t^2-1{,}16t+8{,}88$$
$$v^t(2)=-7{,}12t^2-6{,}76t+13{,}88,\ v^i(3)=-2{,}90t^2-1{,}60t+4{,}50$$

$$v^t(\{1,2\}) = -10{,}48t^2 - 16{,}64t + 27{,}12$$
$$v^t(\{1,3\}) = -7{,}42t^2 - 9{,}16t + 16{,}58$$
$$v^t(\{2,3\}) = -6{,}99t^2 - 14{,}42t + 21{,}41$$

где $v^t(S) = v(S;\ \bar{x}(t),\ T - t)$.

Решим задачу ДУ для дележа

$$\xi^\circ = (10;\ 20;\ 7{,}50) \in E_v(x_0,\ T - t_0) \tag{8.6}$$

Вычислим барицентрические координаты дележа (см. (6.2))

$$\lambda_1^\circ = \frac{1{,}12}{10{,}24},\quad \lambda_2^\circ = \frac{6{,}12}{10{,}24},\quad \lambda_3^\circ = \frac{3}{10{,}24}$$

Найдем функции побочных платежей α_i^t, $i = 1, 2, 3$ (по формуле (6.3)), соответствующих дележу ξ° (т. е. при $t = 0$ должно быть $\xi_i^\circ = v(i;\ x_0,\ T - t_0) + \alpha_i^\circ$, $i = 1, 2, 3$)

$$\alpha_1^t = \lambda_1^\circ [v(N;\ \bar{x}(t),\ T - t) - \sum\nolimits_{i=1}^{3} v(i;\ \bar{x}(t), T - t)] = 1{,}12t^2 - 2{,}24t + 1{,}12$$

Аналогично $\alpha_2^t = 6{,}12t^2 - 12{,}24t + 6{,}12$, $\alpha_3^t = 3t^2 - 6t + 3$.

Найдем исходную РФ (см. (6.5))

$$\beta_1^\circ(t) = -[h_N(\bar{x}(t))]^{-1} \frac{d}{ds}[v(i;\ \bar{x}(s),\ T - s) + \alpha_i^s]\big|_t = \frac{13{,}20t + 3{,}40}{15t + 30}$$

Аналогично

$$\beta_2^\circ(t) = \frac{2t + 19}{15t + 30},\quad \beta_3^\circ(t) = \frac{-0{,}20t + 7{,}60}{15t + 30}$$

Заметим, что вектор $\beta^\circ(t) = (\beta_1^\circ(t),\ \beta_2^\circ(t),\ \beta_3^\circ(t))$ удовлетворяет условиям (2.2 и (2.3), т. е. при каждом $t \in [0, 1]$ его компоненты являются весовыми коэффициентами

По теореме 5 вектор-функция $\beta^\circ(\cdot)$ — решение задачи ДУ для дележа ξ°. Действительно, можно проверить, что

$$\begin{gathered}\xi^t = \int_t^1 \beta^\circ(\tau)\, h_N(\bar{x}(\tau))\, d\tau = (-6{,}60t^2 - 3{,}40t + 10,\\ -t^2 - 19t - 20,\ 0{,}10t^2 - 7{,}60t + 7{,}50) = \{v(i;\ \bar{x}(t),\ 1 - t) + \alpha_i^t,\ i = 1, 2, 3\}\end{gathered} \tag{8.7}$$

и, значит,

$$\int_t^1 \beta^\circ(\tau)\, h_N(\bar{x}(\tau))\, d\tau \in E_v(\bar{x}(t),\ 1 - t),\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

При помощи $\beta^\circ(\cdot)$ можно вычислить динамически устойчивые выигрыши, получаемые игроками на любом отрезке времени $[0, t]$ в условиях дележа ξ°. Например, на отрезке $[0, {}^1/_2]$ такими выигрышами являются

$$\int_0^{1/2} \beta^\circ(\tau)\, h_N(\bar{x}(\tau))\, d\tau = (3{,}35;\ 9{,}75;\ 3{,}77)$$

Вектор оставшихся на отрезке времени $[{}^1/_2, 1]$ выигрышей (6,65; 10,25; 3,73) принадлежит множеству $E_v(\bar{x}({}^1/_2),\ {}^1/_2)$, т. е. оптимален в том же смысле, что и дележ ξ°.

Решим задачу ДУ для дележа $\xi^\circ \in C_v(x_0,\ T - t_0)$. Исследуем поведение отношения $\gamma_S(t) = \alpha^t(S)\,[\alpha^t(N)]^{-1}$ (см. теорему 6) при возрастании $t \in [0, 1]$. При S: $|S| = 1$ $\gamma_S(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0, 1]$, а при $S = N$ $\gamma_S(t) \equiv 1$ для всех $t \in [0, 1]$. Пусть $|S| = 2$. Находим

$$\alpha^t(N) = 10{,}24\,(t - 1)^2;\quad \alpha^t(\{1,2\}) = 4{,}36\,(t - 1)^2,$$
$$\alpha^t(\{1,3\}) = 3{,}20\,(t - 1)^2,\quad \alpha^t(\{2,3\}) = 3{,}03\,(t - 1)^2$$

Видно, что отношение $\gamma_S(t)$ для каждой коалиции вдоль оптимальной траектории постоянно. Согласно теореме 6 решением задачи ДУ для $\xi^\circ \in C_v(x_0,\ T - t_0)$ является его исходная РФ.

Покажем это на примере дележа (8.6) (можно проверить, что этот дележ принадлежит С-ядру $C_v(x_0,\ T - t_0)$). Нужно показать, что для любого $t \in [0, 1]$ вектор (8.7) принадлежит текущему С-ядру. По теореме 7 достаточно проверить выполнение условия (4.2) для барицентрических координат дележа ξ°. Можно убедиться, что эти условия выполнены. Следовательно, РФ $\beta^\circ(\cdot)$ действительно является оптимальной для ξ°.

Рассмотрим вектор Шепли. Так как функции $\Phi_i^v(\bar{x}(t),\ T - t)$, $i = 1, 2, 3$, дифференцируемы по t, то функции (7.1) существуют и, следовательно, вектор $\Phi^v(x_0,\ T - t_0)$

динамически устойчив (см. (7.2)). Поэтому траектория $\bar{x}(\cdot)$ является оптимальной траекторией для вектора Шепли.

Текущий вектор Шепли имеет вид

$$\Phi^v(\bar{x}(t),\ T-t) = \{\Phi_i^v(\bar{x}(t),\ T-t),\ \ i=1,2,3\} = (-4{,}06t^2 - 8{,}48t + 12{,}54,\ -3{,}54t^2 - 13{,}92t + 17{,}46,\ 0{,}10t^2 - 7{,}60t + 7{,}50)$$

По формуле (7.1) получаем оптимальную РФ $\bar{\beta}(\cdot)$ для вектора Шепли $\Phi^v(x_0,\ T-t_0)$:

$$\bar{\beta}(t) = \left(\frac{8{,}12t + 8{,}48}{15t+30},\ \frac{7{,}08t + 13{,}92}{15t+30},\ \frac{-0{,}20t + 7{,}60}{15t+30}\right),\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петросян Л. А.* Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками // Вестн. ЛГУ. 1977. № 19. Вып. 4. С. 46—52.
2. *Петросян Л. А., Данилов Н. Н.* Устойчивость решений в неантагонистических дифференциальных играх с трансферабельными выигрышами // Вестн. ЛГУ. 1979. № 1. Вып. 1. С. 52—59.
3. *Данилов Н. Н.* Принципы оптимальности в кооперативных дифференциальных играх с нетрансферабельными выигрышами // Проблемы управления и теории информации. 1982. Т. 11. № 1. С. 29—40.
4. *Воробьев Н. Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985. 271 с.

Кемерово

Поступила в редакцию
4.I.1988