

УДК 531.38

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА СТРУННОМ ПОДВЕСЕ

Мирер С. А., Одинцова С. А., Сарычев В. А.

Обсуждается характер стационарных вращений осесимметричного твердого тела на струнном подвесе при больших значениях угловой скорости. Найдена область в пространстве безразмерных параметров системы, где при одной и той же угловой скорости возможно максимальное число различных перманентных вращений (шестнадцать).

Ранее было доказано [1]¹, что при неограниченном увеличении угловой скорости система стремится к положению, при котором какая-либо главная центральная ось инерции тела совпадает с неподвижной вертикалью. Показано [2] существование стационарных движений, при которых ось симметрии тела горизонтальна. Исследованию различных типов перманентных вращений посвящены, например, работы [2, 3]².

Рассмотрим твердое осесимметричное тело с центром масс G , подвешенное на невесомом абсолютно жестком стержне в произвольной точке O_2 (фиг. 1). Второй конец стержня (точка O_1) связан с устройством, обеспечивающим вращение системы вокруг вертикальной оси со скоростью ω . Уравнения, описывающие перманентные вращения системы, имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \omega^2 (l \sin \alpha + a \sin \theta) \cos \alpha - g \sin \alpha &= 0 \\ m\omega^2 a (l \sin \alpha + a \sin \theta) \cos \theta + \frac{1}{2} (A - C) \omega^2 \sin 2(\delta + \theta) &= mga \sin \theta \end{aligned} \quad (1)$$

где m — масса тела, A, C — центральный экваториальный и осевой моменты инерции тела, a — расстояние O_2G , l — длина стержня O_1O_2 . Углы между нисходящей вертикалью и векторами O_1O_2 и O_2G обозначим α и θ соответственно. Угол δ между прямой O_2G и осью симметрии удобно считать всегда положительным и изменяющимся в интервале $[0, \pi/2]$ независимо от того, находится ли точка O_2 выше оси симметрии или ниже. Тогда, чтобы различать эти случаи, договоримся о следующем. Будем отсчитывать δ от прямой O_2G против часовой стрелки. Если при этом δ получится большим, чем $\pi/2$, перейдем к рассмотрению положения системы через полпериода. Тогда δ будет лежать в требуемом диапазоне, а α и θ заменятся на $-\alpha$, $-\theta$. Это означает, что и α , и θ необходимо считать изменяющимися в интервале $(-\pi, \pi]$.

Введем параметры

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\omega^2 a}{g} + \frac{(A - C) \omega^2}{mga} \cos 2\delta, & z_3 &= \frac{(A - C) \omega^2}{mga} \cos 2\delta \\ z_2 &= \frac{(A - C) \omega^2}{2mga} \sin 2\delta, & z_4 &= \frac{\omega^2 l}{g} \end{aligned}$$

¹ См. также Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г. Об одном методе балансировки быстровращающихся тел: Препринт № 146. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1980. 45 с.

² См. также Сарычев В. А., Мирер С. А., Исаков А. В. Положения относительного равновесия осесимметричного твердого тела, подвешенного на стержне: Препринт № 140. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1987. 36 с.

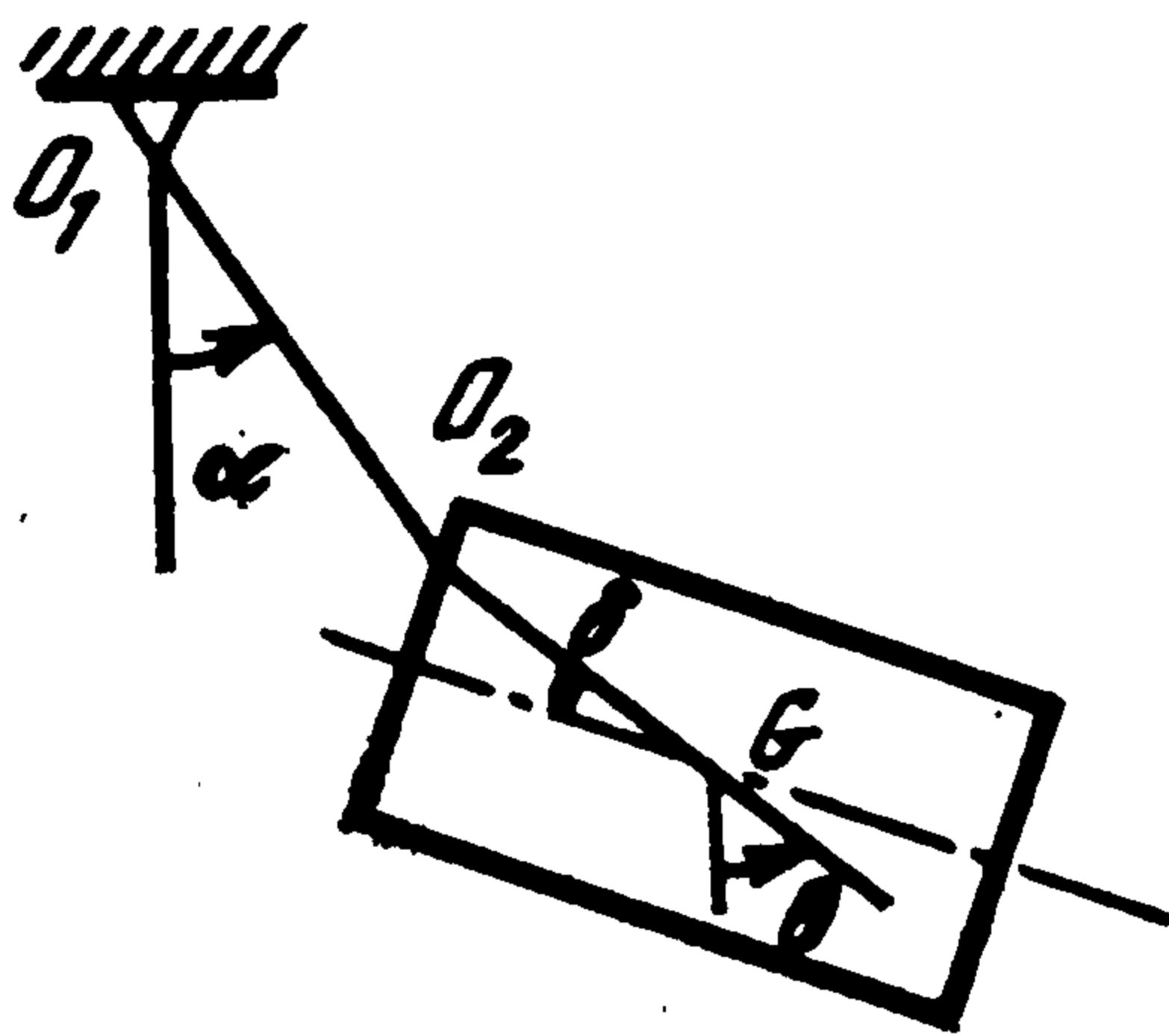
и запишем систему (1) в виде

$$\begin{aligned} [(z_1 - z_3) \sin \theta + z_4 \sin \alpha] \cos \alpha &= \sin \alpha \\ z_1 \sin \theta \cos \theta + z_4 \sin \alpha \cos \theta + z_2 \cos 2\theta &= \sin \theta \end{aligned} \quad (2)$$

Исключая из (2) угол α и вводя переменную $u = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta$, получим уравнение

$$\begin{aligned} f^2(u; z_1, z_2) [f^2(u; z_3, z_2) + (1 - u^4)^2] - z_4^2 (1 - u^4)^2 \times \\ \times f^2(u; z_3, z_2) = 0 \\ f(u; x, y) = 2xu(1 - u^2) + y(u^4 - 6u^2 + 1) - 2u(1 + u^2) \end{aligned} \quad (3)$$

левая часть которого — полином шестнадцатой степени относительно u . Это означает, что уравнение (3) может иметь не более 16 решений, а механическая система — не более 16 стационарных движений. При этом пока не ясно, существуют ли механические системы, для которых реализуются



Фиг. 1

все 16 решений. Дальнейший анализ не только даст положительный ответ на поставленный вопрос, но и покажет, в какой области пространства параметров это возможно.

Рассмотрим уравнение (3) при больших ω . Для этого введем малый параметр $\varepsilon = 1/\omega^2$, обозначим $z_i^\circ = \varepsilon z_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и будем искать решение в виде ряда

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots \quad (4)$$

Для нахождения величины u_0 подставим ряд (4) в уравнение (3) и оставим в нем лишь члены, не зависящие от ε . Полученное равенство будет справедливо в случае, если u_0 — решение какого-либо из трех уравнений

$$2z_1^\circ u_0(1 - u_0^2) + z_2^\circ(u_0^4 - 6u_0^2 + 1) + \sigma z_4^\circ(1 - u_0^4) = 0, \quad \sigma = \pm 1 \quad (5)$$

$$2z_3^\circ u_0(1 - u_0^2) + z_2^\circ(u_0^4 - 6u_0^2 + 1) = 0 \quad (6)$$

Из системы (2) при $\omega \rightarrow \infty$ можно получить, что $\alpha_0 = \pi/2$ для движений, определяемых уравнением (5) при $\sigma = 1$, $\alpha_0 = -\pi/2$ при $\sigma = -1$ и

$$\sin \alpha_0 = -\frac{2u_0(z_1^\circ - z_3^\circ)}{(1 + u_0^2)z_4^\circ} = -\frac{z_1^\circ - z_3^\circ}{z_4^\circ} \sin \theta_0 \quad (7)$$

если u_0 удовлетворяет уравнению (6).

Начнем с исследования уравнения (6). Запишем его через физические параметры, подставив $z_2^\circ/z_3^\circ = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\delta$ и $u_0 = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta_0$. Можно проверить, что полученное уравнение эквивалентно уравнению

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 + \operatorname{tg} 2\delta = 0$$

четыре корня которого удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} 1) \theta_0 + \delta = \pi, \quad 2) \theta_0 + \delta = \pi/2, \quad 3) \theta_0 + \delta = 0, \\ 4) \theta_0 + \delta = -\pi/2 \end{aligned} \quad (8)$$

При этом, согласно соотношению (7), для угла α_0 справедливо равенство

$$\sin \alpha_0 = -al^{-1} \sin \theta_0 \quad (9)$$

т. е. в нулевом приближении центр масс тела лежит на оси вращения системы.

Выражения (8) и (9) означают существование типов стационарных движений, для которых при неограниченном увеличении ω какая-либо главная центральная ось инерции тела стремится к совмещению с неподвижной вертикалью. Это свойство, теоретически исследованное в [1], является основой метода динамической балансировки, цель которого — определение главной центральной оси инерции в теле и, быть может, проверка ее совпадения с осью геометрической симметрии.

Вернемся к уравнению (6) и представим четыре его решения в виде

$$\begin{aligned} u_{0\pm} &= (v \pm \sqrt{v^2 + 4})/2, \quad v_{\pm} = p_1 \pm \sqrt{p_1^2 + 4} \\ p_1 &= z_3/z_2 \end{aligned} \quad (10)$$

(Здесь, как и везде далее, опущен индекс o у параметров z_1, \dots, z_4 .) Заметим, что равенствам 1) — 4) из (8) соответствуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1) \quad u_+(v_+) &> 1, \quad 2) \quad 0 < u_+(v_-) < 1 \\ 3) \quad u_-(v_+) &= -1/u_+(v_+), \quad 4) \quad u_-(v_-) = -1/u_+(v_-) \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив ряд (4) в уравнение (3) и оставив слагаемые, содержащие ε во второй степени, получим

$$\frac{1}{(cu_1 + b)^2} = \frac{1}{[2p_2u_0(1 - u_0^2)]^2} - \frac{1}{(1 - u_0^4)^2}, \quad p_2 = \frac{z_1 - z_3}{z_4} \quad (12)$$

где c и b — выражения, зависящие от u_0, z_i . В случае

$$(1 + u_0^2)^2 - (2p_2u_0)^2 > 0 \quad (13)$$

когда уравнение (12) имеет действительные решения u_1 , существует восемь типов перманентных вращений, определяемых в нулевом приближении выражениями (8) или им эквивалентными (10). Решения в каждой паре, отвечающей одному и тому же u_0 , отличаются величиной u_1 и знаком $\cos \alpha_0$ (фиг. 2).

Исследуем неравенство (13), для чего разложим его левую часть на множители по формуле для разности квадратов. Поскольку $p_2 = a/l > 0$, то (13) равносильно неравенству

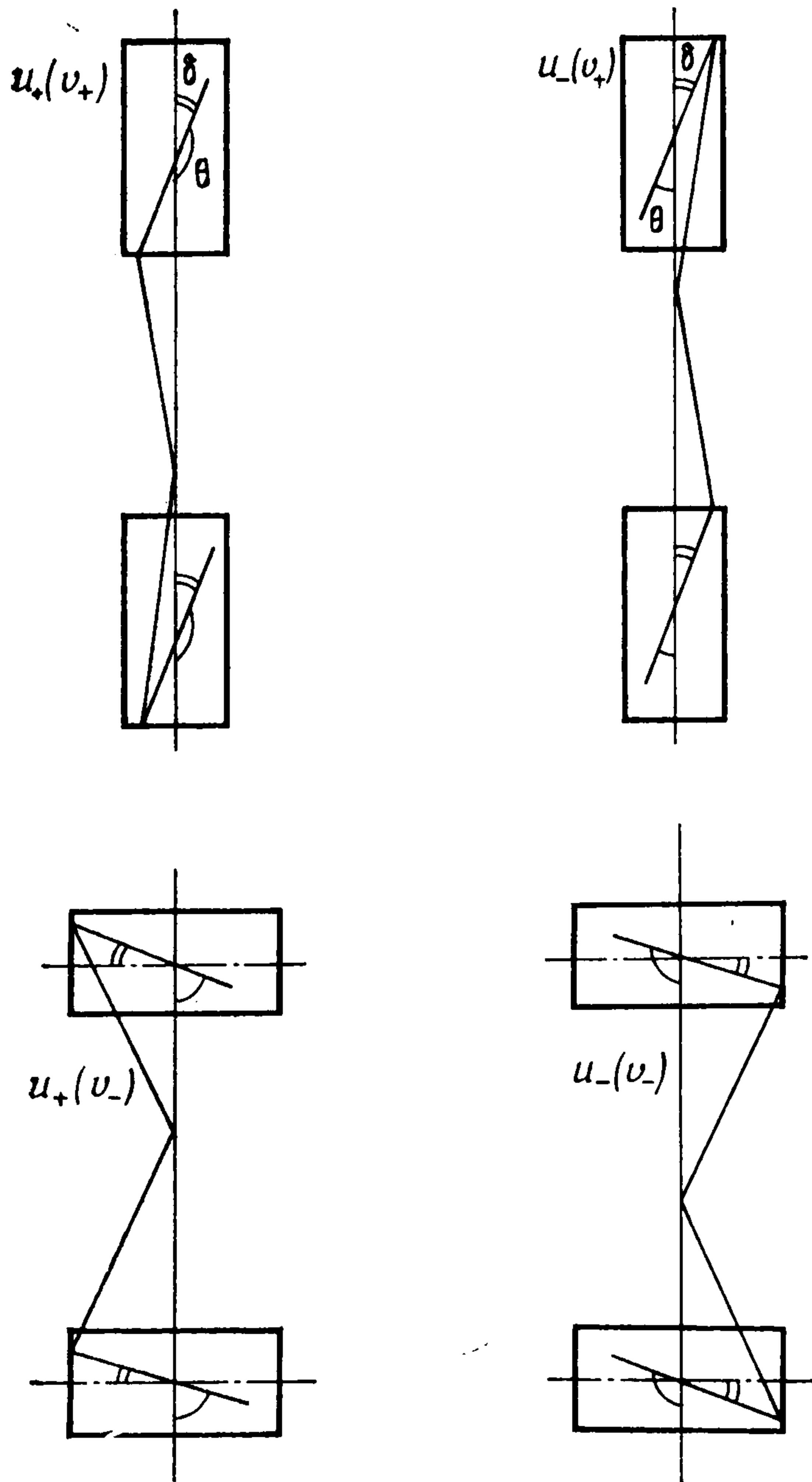
$$(1 + u_0^2) - \sigma \cdot 2p_2u_0 > 0 \quad (14)$$

где $\sigma = 1$, если $u_0 > 0$, и $\sigma = -1$, если $u_0 < 0$.

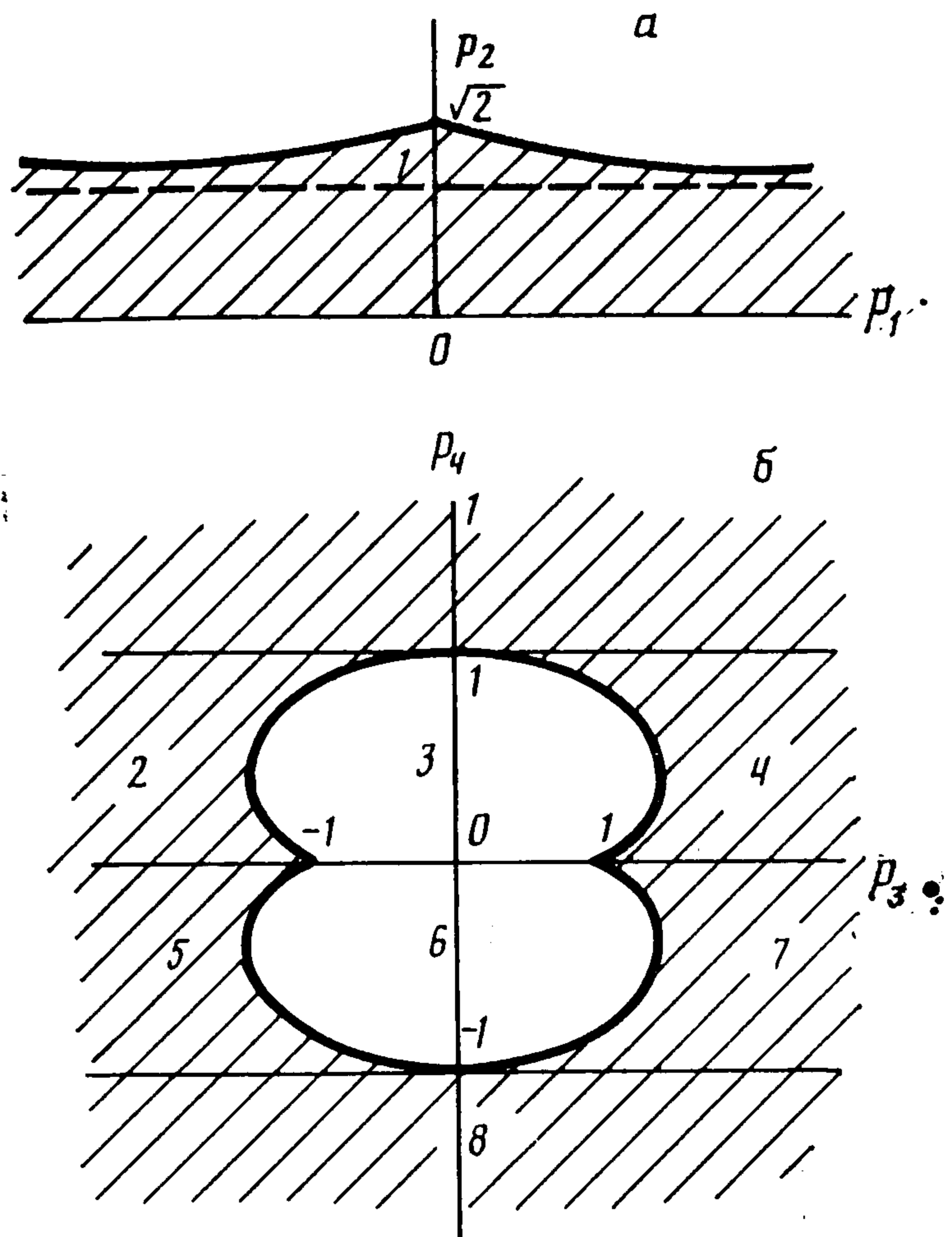
Предположим, что для $u_0 > 0$ выполняется неравенство (14) при $\sigma = 1$, тогда, очевидно, для $-1/u_0$ будет выполняться неравенство (14) при $\sigma = -1$. Вспоминая, что для значений (10) справедливы соотношения (11), достаточно потребовать лишь выполнения неравенства (14) при $\sigma = 1$ для положительных u_0 : $u_+(v_+)$ и $u_+(v_-)$. Решение неравенства (14) при $\sigma = 1$ с привлечением выражений (10) для каждого корня дает области в пространстве параметров p_1, p_2 , в которых это неравенство справедливо. Указанные области будут определяться следующими совокупностями неравенств:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} L > 0 \\ 0 < p_2 < \sqrt{2} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} L < 0 \\ \sigma p_1 > 0 \end{array} \right. \quad (15) \\ L = (2 - p_2^2)^2 + p_1^2(1 - p_2^2) \end{aligned}$$

где $\sigma = 1$ для корня $u_+(v_+)$ и $\sigma = -1$ для корня $u_+(v_-)$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Область пространства параметров, где выполняются одновременно обе совокупности неравенств, определяется первой системой (15) и изображена на фиг. 3, а. В механической системе, параметры которой принадлежат этой области, будут существовать все восемь типов перманентных вращений, изображенных на фиг. 2.

Перейдем к рассмотрению уравнений (5). Заметим, что если u_0 — корень уравнения (5) при $\sigma = 1$, то $-1/u_0$ — корень уравнения (5) при $\sigma = -1$, поэтому ограничимся исследованием только случая $\sigma = 1$. Путем анализа знаков функции

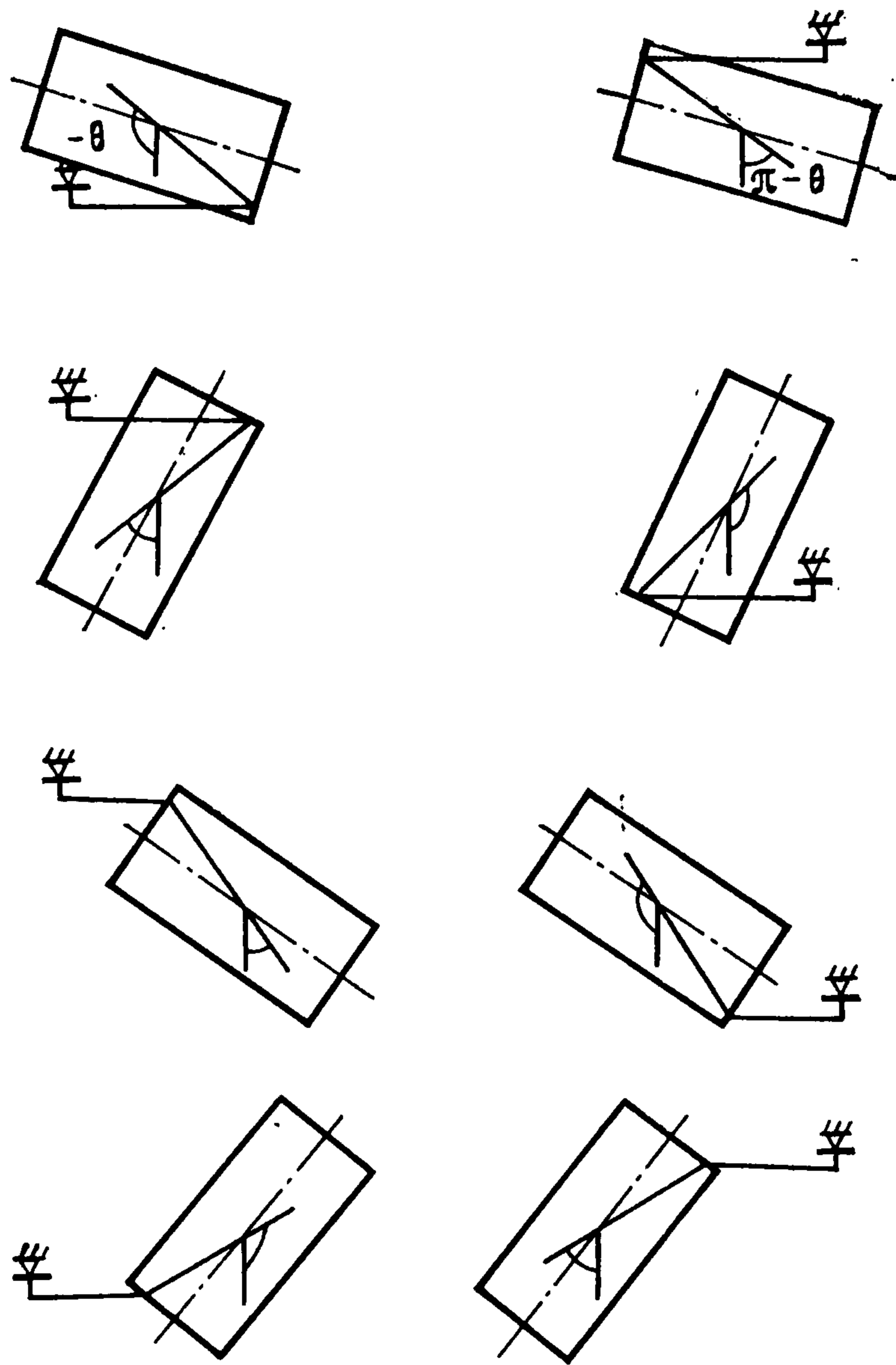
$$F(u) = (z_2 - z_4)u^4 - 2z_1u^3 - 6z_2u^2 + 2z_1u + (z_2 + z_4) \quad (16)$$

в точках $u = \pm 1, 0$ и при стремлении u к $\pm \infty$ можно убедиться, что уравнение (5) при $\sigma = 1$ всегда имеет по крайней мере два действительных корня. Для существования второй пары действительных корней критическим является момент ее вырождения в один двукратный корень. Этот момент определяется, кроме равенства $F = 0$, также условием $F'_u = 0$, т. е. системой уравнений, из которой оказывается возможным исключить u и тем самым получить зависимость

$$p_3 = \pm \sqrt{1 - p_4^{2/3}} (1 + 2p_4^{2/3}) \quad (17)$$

$$p_3 = z_1/z_4, \quad p_4 = z_2/z_4$$

связывающую параметры p_3 и p_4 . Кривая, определяемая выражением (17) (фиг. 3, б), разграничивает области существования четырех (в заштрихо-



Фиг. 4

ванной части) и двух корней уравнения (5) при $\sigma = 1$ и вместе с прямыми $p_4 = \pm 1$ образует области 1 — 8, в которых функция (16) отличается количеством нулей хотя бы на одном из следующих интервалов:

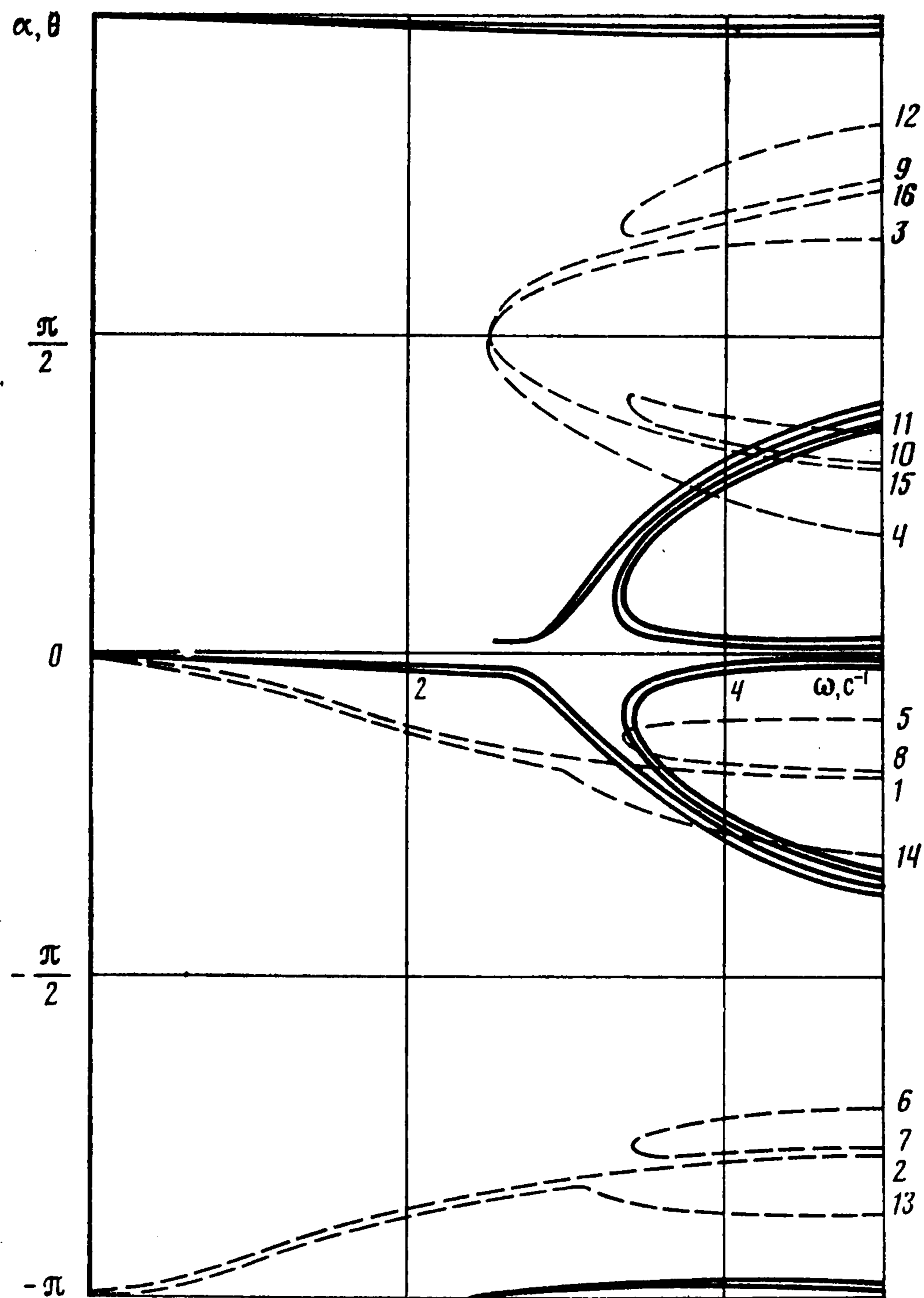
$$u < -1, \quad -1 < u < 0, \quad 0 < u < 1, \quad 1 < u \quad (18)$$

Интервалы (18) изменения u соответствуют следующим интервалам изменения θ :

$$-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < 0, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad (19)$$

Нули u_0 функции F , попадающие в разные интервалы (18), в совокупности с α_0 определяют разные типы движений. Таким образом, анализ качественного вида графиков функции (16) в каждой из областей 1 — 8 позволяет сразу определить, какие типы стационарных движений могут существовать в механической системе с соответствующими параметрами.

Все возможные типы перманентных вращений при $\alpha_0 = \pi/2$ ($\alpha_0 = -\pi/2$) изображены на фиг. 4 слева (справа). Типы движений, находящиеся на одном горизонтальном уровне фиг. 4, соответствуют решениям u_0 и $-1/u_0$ ($|\theta_0(\alpha_0 = \pi/2) - \theta_0(\alpha_0 = -\pi/2)| = \pi$) уравнений (5) при $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$. Анализ графиков показывает, что для механической системы со значениями параметров из областей 1 и 8 в каждом из интервалов (19) будет находиться по одному корню, а предельные режимы будут принадлежать различным типам, показанным на фиг. 4. В областях 2, 4, 5, 7 общее количество предельных режимов, определяемых уравнениями (5), будет также восемь, но из них какие-то две пары однотипны.



Фиг. 5

Итак, показано, что если физические параметры системы таковы, что точка (p_1, \dots, p_4) попадает внутрь области в четырехмерном пространстве, являющейся декартовым произведением заштрихованных областей на фиг. 3, а, б, то можно гарантировать существование шестнадцати стационарных движений при больших ω . Если параметры таковы, что $|p_4| > 1$, а точка (p_1, p_2) принадлежит заштрихованной области на фиг. 3, а, то 16 предельных стационарных режимов будут разных типов.

Пользуясь полученным результатом, для любой механической системы можно указать количество и типы стационарных движений при больших значениях ω . Однако существование между параметрами зависимости

$$p_1 p_4 = p_3 - p_2 \quad (20)$$

означает, что не любым точкам (p_1, \dots, p_4) из четырехмерной области соответствует набор параметров, определяющий реальную систему, а только тем, которые принадлежат гиперповерхности (20). Этот факт означает невозможность немедленного решения обратной задачи, а именно указание параметров механической системы, имеющей желаемые предельные типы конических режимов. Попытка перехода от четырехмерных к трехмерным областям, сводящаяся к необходимости решения системы трех не простых неравенств, не приводит к успеху.

Во многих задачах, вероятно, достаточно работать с подмножествами областей фиг. 3, *a*, *б*, в которых по сравнению с точными областями отброшены некоторые участки ради получения простых выражений для описания границы. Если перейти к такому подмножеству хотя бы для одной из двух плоскостей параметров, т. е. заменить область на фиг. 3, *a* полосой или область на фиг. 3, *б* прямоугольником (или дополнением к прямоугольнику), то переход от четырех к трем независимым параметрам происходит автоматически.

Приведем пример реальной механической системы, которой при больших ω могут отвечать 16 различных стационарных режимов типа перманентных вращений. Подвесим на стержне длины $l = 1$ м однородный диск радиуса 45 см. Пусть $\delta = 0,77$ рад, $a = 2$ см, тогда толщина диска должна быть равна $2a \cos \delta = 2,9$ см (стержень крепится к диску на его торцевой поверхности). Для такой системы безразмерные параметры принимают значения

$$p_1 = 0,06, \quad p_2 = 0,02, \quad p_3 = -0,06, \quad p_4 = -1,26$$

и, таким образом, принадлежат заштрихованной области на фиг. 3, *a* и области 8 на фиг. 3, *б*. Следовательно, система действительно должна допускать 16 стационарных режимов, которые, как видно из фиг. 5, где представлены зависимости α (сплошные линии) и θ (штриховые линии) от угловой скорости вращения системы, существуют, начиная с $\omega \approx 3,4 \text{ с}^{-1}$ (нумерация зависимостей $\theta(\omega)$ соответствует нумерации $\alpha(\omega)$, причем последняя ведется вдоль правого среза фиг. 5 сверху вниз и на фиг. не указана).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г. Метод балансировки вращающихся тел на струнном приводе // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 5. С. 3—18.
2. Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е. О движении осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 3—18.
3. Стороженко В. А., Темченко М. Е. Полная картина стационарных движений осесимметричного твердого тела // Аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. С. 110—136.

Москва

Поступила в редакцию
21.VII.1988