

УДК 531.36 : 534

О МЕХАНИЗМЕ ЖЕСТКОГО ВОЗНИКНОВЕНИЯ РЕЖИМА ДВУХЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ОБРАТНОЙ БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА — ХОПФА

Афраймович В. С., Возовой Л. П.

Методом отображения секущих Пуанкаре доказывается возможность появления режима двухчастотных колебаний (2-тора) в результате жесткой потери устойчивости состояния равновесия. Необходимым условием такого перехода является наличие вблизи состояния равновесия седлового периодического движения, неустойчивое многообразие которого притягивается к стационару. В момент исчезновения цикла (обратная бифуркация Андронова — Хопфа) возникает ситуация, близкая к гомоклинической, когда неустойчивая сепаратриса стационара возвращается в его малую окрестность по устойчивому направлению.

Найдены достаточные условия существования инвариантной кривой у отображения Пуанкаре, соответствующей появлению 2-тора у исходной системы дифференциальных уравнений. Обсуждается возможная связь данного сценария перехода стационар — тор с наблюдавшимся [1, 2] при численном моделировании смешанной конвекции в вертикальном слое с волнистыми границами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = F(u, \mu), \quad u \in R^n, \quad \mu \in [-\mu_0, \mu_0] \quad (1.1)$$

где F — C^∞ -гладкая или аналитическая функция u, μ . Предположим, что $F(0, 0) = 0$ и при изменении знака μ в системе происходит обратная бифуркация Андронова — Хопфа. Пусть состояние равновесия O при $\mu = 0$ является узлом по гиперболическим переменным и неустойчивым негиперболическим фокусом на центральном многообразии.

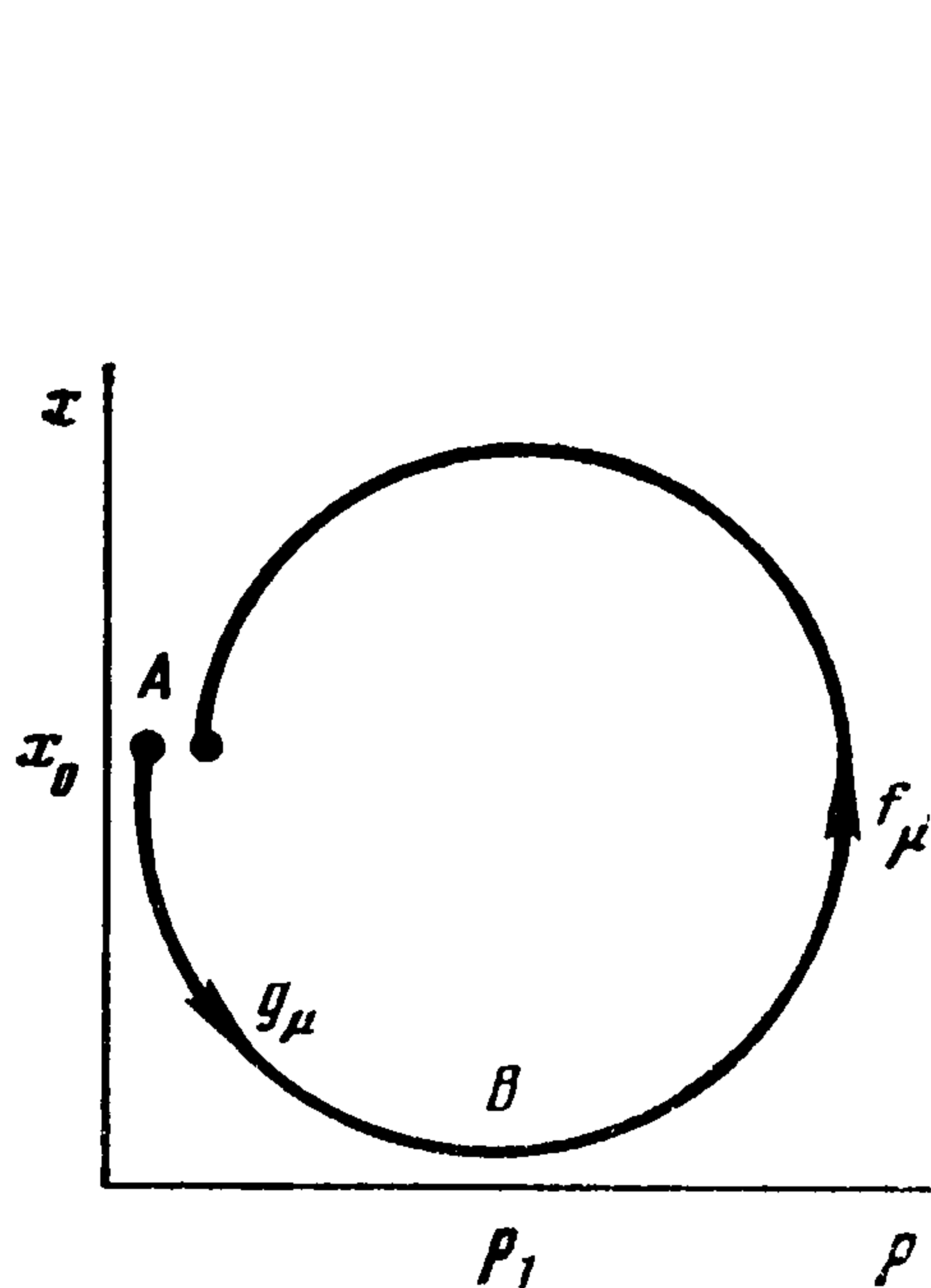
В простейшем случае $n = 3$, когда существует только одна гиперболическая переменная x , в некоторой области переменных μ и u , где $|\mu|$ и $|u|$ достаточно малы, гладкой заменой координат и времени систему (1.1) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \mu\rho + \rho^3 + a\rho^5, & \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{x} &= -\lambda x + N(\rho, \varphi, x, \mu) \end{aligned} \quad (1.2)$$

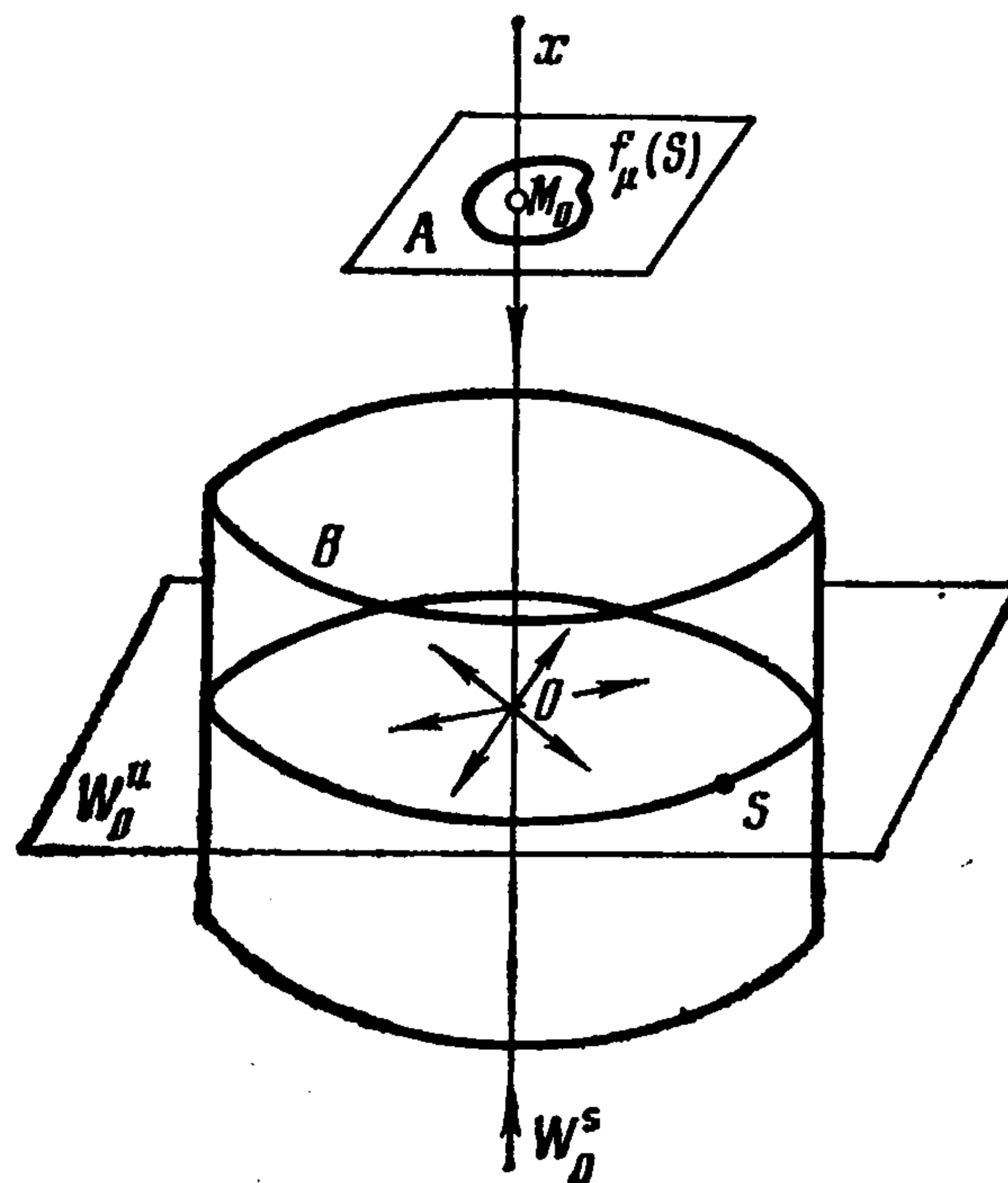
где ρ и φ — полярные координаты на центральном многообразии; функция N включает члены более высокого порядка малости, причем $N = 0$ при $x = 0$.

При $\mu > 0$ система обладает состоянием равновесия (СР) седлового типа. При $\mu < 0$ имеется устойчивое СР и ответвившееся от него в точке $\mu = 0$ седловое периодическое движение L_μ . Обозначим $W_0^s(\mu)$ и $W_0^u(\mu)$ соответственно устойчивое и неустойчивое множества (сепаратрисы) точки O при $\mu \geq 0$, а $W_L^s(\mu)$, $W_L^u(\mu)$ — устойчивое и неустойчивое многообразия периодического движения при $\mu < 0$. Видно, что $\dim W_0^u = 2$, $\dim W_0^s = 1$ при $\mu \geq 0$ и $\dim W_L^u = 2$, $\dim W_L^s = 2$ при $\mu < 0$.

Основное предположение о нелокальном поведении траекторий состоит в том, что при $\mu = 0$ неустойчивая сепаратриса СР возвращается в малую окрестность его устойчивого множества (ситуация, близкая к образованию гомоклиники). Математическая формулировка этого факта будет



Фиг. 1



Фиг. 2

приведена ниже. Отметим, что налагаемые условия носят общий характер и не повышают коразмерности исследуемой бифуркации.

2. **Нелокальное отображение.** Будем изучать поведение траекторий, выходящих из малой окрестности СР O . Следуя подходу [3, 4], построим отображение Пуанкаре в виде суперпозиции локального отображения (по траекториям, близким к СР) и глобального (по траекториям, проходящим в окрестности нелокального участка неустойчивой сепаратрисы).

Рассмотрим две трансверсальные траекториям площадки $A = \{x = x_0, \rho \leq \varepsilon_0\}$ и $B = \{\rho = \rho_1, |x| < \varepsilon_1\}$, где $\varepsilon_1 < x_0$, $\varepsilon_0 < \rho_1$ — достаточно малые положительные числа (фиг. 1, 2). След $W_0^u(0)$ на B запишется в виде $x = 0$ (окружность S), а след $W_0^s(0)$ на A — в виде $\rho = 0$ (точка M_0). Будем предполагать, что любая выходящая из S полутраектория достигает A . Это означает, что определено отображение f_μ по траекториям системы (1.1) из малой окрестности S на B в A , являющееся диффеоморфизмом как при $\mu = 0$, так и при достаточно малых $\mu > 0$ (ε_1 считаем настолько малым, что диффеоморфизм f_μ определен для всех точек B).

Замкнутая кривая $f_\mu(S)$ может либо охватывать точку M_0 (случай *a*, фиг. 2), либо не охватывать ее (случай *б*). Запишем отображение

$$f_\mu: (x_1, \varphi_1) \mapsto (\bar{\rho}_0, \bar{\varphi}_0) \quad (2.1)$$

$$\bar{\rho}_0 = R(\varphi_1, \mu) + G(\varphi_1, x_1, \mu) x_1$$

$$\bar{\varphi}_0 = \Gamma \varphi_1 + P(\varphi_1, \mu) + V(\varphi_1, x_1, \mu) x_1$$

$$R(\varphi_1, 0) \geq R_L(0) > 0, \quad dR_L/d\mu > 0$$

где R, G, P и V — периодические функции φ_1 ; значение $\Gamma = 1$ соответствует случаю *a*, $\Gamma = 0$ — случаю *б*.

3. **Теорема о существовании инвариантной кривой.** Перейдем к доказательству существования инвариантной кривой у отображения Пуанкаре $B \mapsto B$ на основе принципа сжатых отображений в форме [5]. Напомним соответствующие условия.

Пусть задано отображение $T: \bar{x} = f(x, \varphi), \bar{\varphi} = \varphi + g(x, \varphi) \pmod{2\pi}$, где $\varphi \in R^m, x \in R^n, m \geq 1, n \geq 1$; $f(x, \varphi), g(x, \varphi)$ — дифференцируемые вектор-функции, 2π -периодические по $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Предположим, что T переводит кольцо $K = \{(x, \varphi): \|x\| < r_0, \varphi \in R^m\}$ в себя. Введем в K норму матрицы или вектора: $\|(\cdot)\|_0 = \sup_{(x, \varphi) \in L} \|(\cdot)\|$, где $\|(\cdot)\|$ —

евклидова норма. Тогда при выполнении условий

$$\begin{aligned} \| (E_m + \partial g / \partial \varphi)^{-1} \|_0 &= D^{-1} \leq \text{const} < \infty, \quad \| \partial f / \partial x \|_0 < 1 \quad (3.1) \\ 1 - D^{-1} \| \partial f / \partial x \|_0 &> 2 [D^{-1} \| \partial g / \partial x \|_0 \| (E_m + \\ &+ \partial g / \partial \varphi)^{-1} \partial f / \partial \varphi \|_0]^{1/2} \\ 1 + D^{-1} \| \partial f / \partial x \|_0 &< 2D^{-1} \end{aligned}$$

где E_m — единичная $(m \times m)$ -матрица, отображение T имеет в K инвариантный притягивающий m -мерный тор.

Условия (3.1) накладывают ограничения на параметр Γ и функции l_i , G , P и V . Чтобы их сформулировать, найдем время перехода из A в B . Интегрируя первое из уравнений (1.2), с точностью до членов высшего порядка по ρ получим

$$t_n = \frac{1}{\mu} \ln \frac{\rho_1 (\mu + \rho_1^2)^{-1/2}}{\rho_0 (\mu + \rho_0^2)^{-1/2}}$$

где ρ_0 — координата точки на A , постоянная ρ_1 определяет положение сечения B . Выберем $\rho_1 \gg \varepsilon_0$. Тогда

$$t_n(\rho_0) \approx \frac{1}{2\mu} \ln \left(1 + \frac{\mu}{\rho_0^2} \right) \sim \begin{cases} \rho_0^{-2}, & \mu \lesssim \rho_0^2 \\ \rho_0^{-1} \ln \rho_0^{-1}, & \mu \sim \rho_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Обозначим g_μ отображение $A \mapsto B$. Предположим, что функция N в уравнении (1.2) тождественно равна нулю (при $N \neq 0$ схема доказательства совершенно аналогична, но выкладки более громоздки). Для этого модельного случая отображение g_μ имеет вид

$$x_1 = x_0 \exp(-\lambda t_n(\rho_0)), \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \omega t_n(\rho_0) \quad (3.3)$$

(функция $t_n(\rho_0)$ дается выражением (3.2)).

Запишем суперпозицию отображений $h_\mu: g_\mu \circ f_\mu: B \mapsto B$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_0 \exp(-\lambda t_n(\bar{\rho}_0)) \\ \bar{\varphi}_1 &= \Gamma \varphi_1 + P + V x_1 + \omega t_n(\bar{\rho}_0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

(величина $\bar{\rho}_0$ определена в (2.1)). Непосредственно из (3.4) вытекает

Лемма 1. При выполнении условия

$$x_0 \exp(-\lambda t_n(\bar{\rho}_0)) < \varepsilon_1 \quad (3.5)$$

кольцо B является поглощающей областью отображения Пуанкаре $h_\mu(B) \in \text{int}(B)$.

Проверим теперь выполнение условий (3.1). Будем отмечать максимальное и минимальное значения функций, зависящих от φ_1 , соответственно индексами H и L :

$$\max_{\varphi_1}(\cdot) = (\cdot)_H, \quad \min_{\varphi_1}(\cdot) = (\cdot)_L$$

Лемма 2. Условия (3.1) следуют из неравенств

$$\begin{aligned} \Gamma \neq 0, \quad D &= (1 + \partial P / \partial \varphi_1 + \omega \bar{\rho}_0^{-1} (\mu + \bar{\rho}_0^2)^{-1/2} \partial R / \partial \varphi_1)_L > 0 \\ E &= (\lambda \bar{x}_1 G \delta)_H < 1 \\ D - E &> 2 (V + \omega G \delta)_H^{1/2} (\lambda \bar{x}_1 \delta (\partial R / \partial \varphi_1 + \bar{x}_1 \partial G / \partial \varphi_1))_H^{1/2} \\ D &< 1; \quad \delta = \bar{\rho}_0^{-3} (1 + \mu \bar{\rho}_0^{-2})^{-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

величина \bar{x}_1 определена в (3.4).

Отметим, что выполнение неравенств (3.5), второго и третьего неравенств (3.6) обеспечивается малостью экспоненты в левой части (3.5), что предполагает в свою очередь малость величины $\bar{\rho}_0$. Учитывая выражения (3.2), это условие можно записать в виде $\bar{\rho}_0^2 \ll \lambda$ (при $\mu \lesssim \bar{\rho}_0^2$) либо

$\rho_0 \ln \rho_0 \ll \lambda$ (при $\mu \sim \bar{\rho}_0$). Первое неравенство (3.6) будет выполнено, если функции P и R достаточно слабо зависят от φ_1 , причем $\partial P / \partial \varphi_1 < 1$, $\partial R / \partial \varphi_1 \ll 1$.

Теорема 1. При выполнении условий (3.5), (3.6) отображение h_μ при достаточно малых $\mu > 0$ имеет в кольце B единственную замкнутую инвариантную кривую.

Замечания. 1°. Можно убедиться, что в общем случае $N \neq 0$ условия (3.1) для отображения Пуанкаре системы (1.1) будут заведомо выполнены, если в (3.6) заменить λ на $\lambda/2$. Следовательно, теорема 1 в этом случае также будет иметь место. Доказательство опускается ввиду громоздкости.

2°. Достаточные условия существования инвариантной кривой (условия типа (3.6)) выполняются для открытого множества в классе семейств систем, демонстрирующих обратную бифуркацию Андронова—Хопфа, и тем самым являются условиями общего положения.

4. Следствия (особенности смены режимов и фазового портрета). Траектории системы (1.1), проходящие через инвариантную кривую, образуют притягивающий 2-тор. В условиях теоремы 1 этот тор обладает следующими особенностями.

1°. Вследствие отмеченной выше малости величины $\bar{\rho}_0$ тор имеет сильно сжатую «горловину» радиуса $\bar{\rho}_0$ и внешнюю «оболочку», близкую к неустойчивому многообразию $W_0^u(\mu)$ (фиг. 3, x_1, x_2 — фазовые переменные). Благодаря слабой зависимости R от φ_1 ($\partial R / \partial \varphi_1 \ll 1$) фазовый портрет обладает почти точной аксиальной симметрией.

2°. Время прохождения горловины гораздо больше времени движения фазовой точки по внешней поверхности тора: $t_n \gg \lambda^{-1}$.

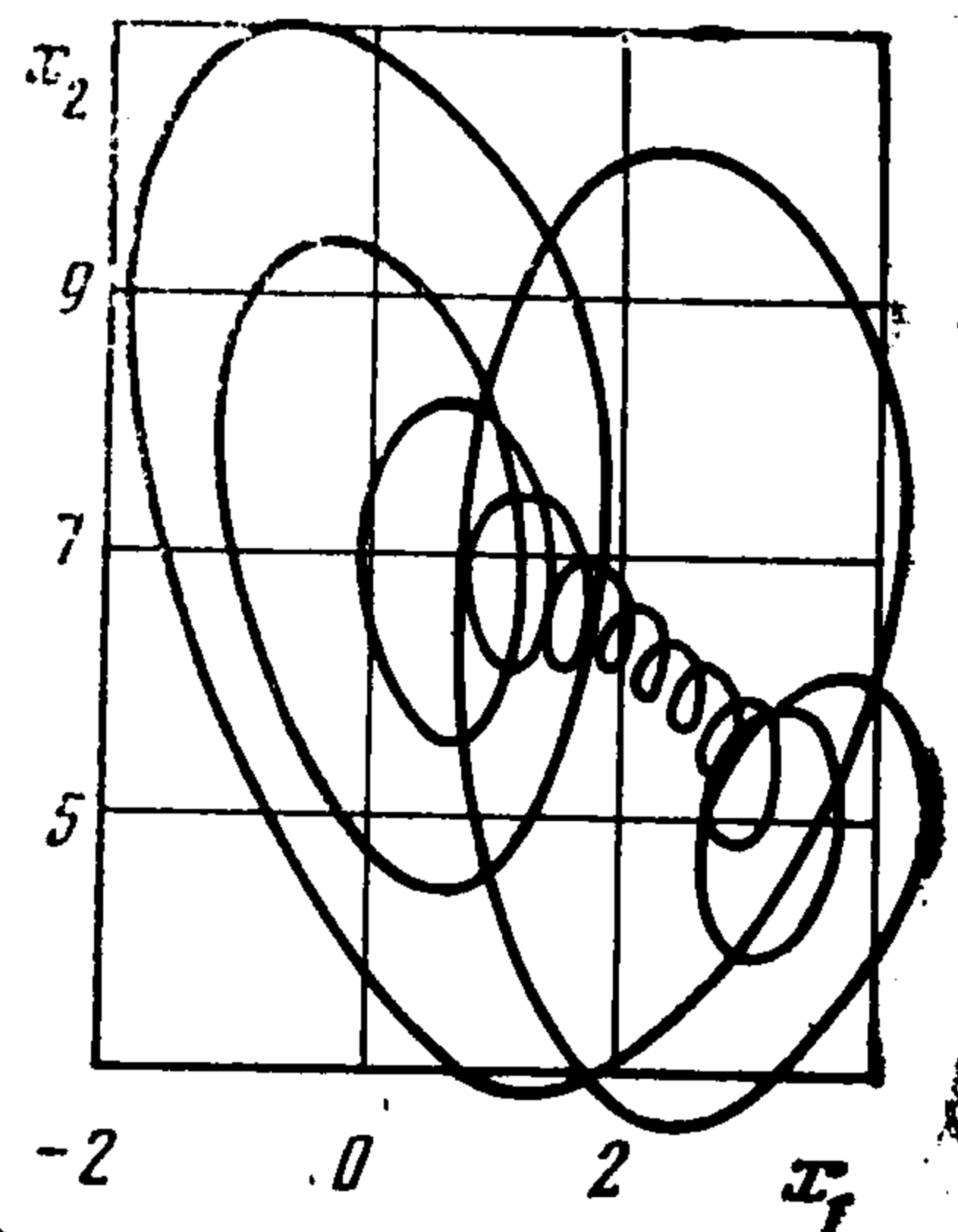
3°. Частота вращения по внутренним виткам горловины ω близка к собственной частоте затухающей моды стационара O в области его устойчивости (при $\mu < 0$).

4°. Перестройка движения при изменении параметра μ происходит следующим образом. В области $\mu < 0$ фазовая точка притягивается к устойчивому СР, однако уже при достаточно малых $\mu < 0$, $|\mu|^{1/2} \lesssim R_L(\mu)$, появляется устойчивый 2-тор, к которому притягивается часть траекторий (лежащих на «половине» неустойчивого многообразия $W_L^u(\mu)$). Остальные траектории на $W_L^u(\mu)$ идут в СР. При $\mu = 0$ изображающая точка срывается из малой окрестности СР и вдоль W_0^u асимптотически приближается к тору. При $\mu > 0$ тор остается единственным аттрактором в рассматриваемой области фазового пространства.

Изменяя μ в обратном направлении, можно наблюдать жесткий переход к стационарному движению при $\mu = \mu_* < 0$, $|\mu_*|^{1/2} \approx R_L(\mu)$.

Отметим, что указанные закономерности перехода от стационарного режима к двухчастотным колебаниям хорошо согласуются с установленными численно [1, 2] при исследовании конвективных течений в вертикальном слое с волнообразно искривленными границами (отсутствие гистерезиса связано, по-видимому, с малой глубиной подкритичности $|\mu_*| \ll \ll 1$).

5. Случай четырехмерного фазового пространства. Предыдущее рассмотрение относилось к случаю, когда СР при $\mu = 0$ являлось узлом на устойчивом множестве. Предположим теперь, что СР представляет собой



Фиг. 3

на W_0^s фокус. Минимальная размерность n фазового пространства, отвечающая этому случаю, равна четырем.

В окрестности СР O система (1.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \mu\rho + \rho^3 + a\rho^5, & \dot{\varphi} &= \omega_1 \\ \dot{r} &= -\lambda r + N, & \dot{\psi} &= \omega_2 + M \end{aligned} \quad (5.1)$$

где ρ, φ — полярные координаты на центральном многообразии, а r, ψ — на трансверсальной плоскости; N и M содержат члены высшего порядка малости. Ограничимся, как и раньше, рассмотрением модельной ситуации $N, M \equiv 0$. Заметим, что, действуя по приведенной ниже схеме, можно установить (при соответствующих условиях) наличие 2-тора и в общем случае $N, M \neq 0$.

Пусть $A = \{r = r_0, \rho \leq \varepsilon_0\}$, $B = \{\rho = \rho_1, r < \varepsilon_1\}$ — секущие, трансверсальные траекториям системы (1.1). Постоянные $\varepsilon_0, \rho_1, \varepsilon_1$ и r_0 достаточно малы, причем $0 < \varepsilon_0 < \rho_1, 0 < \varepsilon_1 < r_0$. Обозначим $S_1 = W_0^u(0) \cap B$ и $S_2 = W_0^s(0) \cap A$. Предположим, что каждая полутраектория с началом в точке S_1 достигает A . Отсюда следует, что при достаточно малых μ и ε_1 определен диффеоморфизм $f_\mu: B \mapsto A$. Точке (r_1, ψ_1, φ_1) на B при отображении f_μ отвечает на секущей A точка $(\bar{\rho}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0)$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_0 &= R(\varphi_1, \mu) + G(\varphi_1, r_1, \psi_1, \mu) r_1 \\ \bar{\varphi}_0 &= \Gamma_1 \varphi_1 + P(\varphi_1, \mu) + V(\varphi_1, r_1, \psi_1, \mu) r_1 \\ \bar{\psi}_0 &= \Gamma_2 \varphi_1 + Q(\varphi_1, \mu) + W(\varphi_1, r_1, \psi_1, \mu) r_1 \\ R(\varphi_1, 0) &\geq R_L(0) > 0, \quad dR_L/d\mu > 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

где R, P, Q — периодические функции φ_1 ; G, V и W — периодические функции φ_1 и ψ_1 ; $\Gamma_{1,2}$ — целые числа, значения которых будут уточнены ниже.

При построении локального отображения Пуанкаре $g_\mu: A \mapsto B$ отметим, что выражение для времени перехода t_n по-прежнему имеет вид (3.2). Интегрируя систему (5.1), получим

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 \exp(-\lambda t_n(\rho_0)) \\ \varphi_1 &= \varphi_0 + \omega_1 t_n(\rho_0), \quad \psi_1 = \psi_0 + \omega_2 t_n(\rho_0) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Запишем суперпозицию отображений $h_\mu = g_\mu \circ f_\mu$

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= r_0 \exp(-\lambda t_n(\bar{\rho}_0)) \\ \bar{\varphi}_1 &= \Gamma_1 \varphi_1 + P + V r_1 + \omega_1 t_n(\bar{\rho}_0) \\ \bar{\psi}_1 &= \Gamma_2 \varphi_1 + Q + W r_1 + \omega_2 t_n(\bar{\rho}_0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Справедлива

Лемма 3. При выполнении условия

$$r_0 \exp(-\lambda t_n(\bar{\rho}_0)) < \varepsilon_1 \quad (5.5)$$

секущая B является поглощающей областью отображения Пуанкаре h_μ .

Замечание. Поскольку секущая B гомеоморфна произведению 2-тора на отрезок, а поток (1.1) в B является надстройкой над отображением Пуанкаре h_μ , можно показать, что при $\Gamma_1 = 1$ и выполнении условия (5.5) существует поглощающая область для системы (1.1), гомеоморфная произведению 3-тора на отрезок.

Приведем условия, выделяющие в B поглощающую область, гомеоморфную произведению окружности на 2-диск.

Лемма 4. При выполнении условий

$$\Gamma_2 = 0, \quad 0 < \zeta_1 \leq Q + W\varepsilon_1 + \omega_2 t_n(\bar{\rho}_0) \leq \zeta_2 < 2\pi \quad (5.6)$$

имеется поглощающая область по переменной ψ .

Действительно, если в качестве поглощающей области выбрать отрезок $[\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2]$, $0 < \bar{\zeta}_1 < \bar{\zeta}_2 < 2\pi$, где $\bar{\zeta}_1 < \zeta_1$ и $\bar{\zeta}_2 > \zeta_2$, то для достаточно малых ε_1 и μ имеем $\psi_1 \in (\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2)$.

Теорема 2. Из лемм 3, 4 следует существование у отображения h_μ в B поглощающей области B_1 , гомеоморфной произведению окружности на 2-диск.

Проверим теперь выполнение в области B_1 условий (3.1), где под x в данном случае следует понимать вектор (r, ψ) . Имеет место

Лемма 5. Условия (3.1) вытекают из неравенств

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\neq 0, \quad D = (1 + \partial P / \partial \varphi_1 + r_1 \partial V / \partial \varphi_1 + \omega_1 t_n'(\bar{\rho}_0) \partial \bar{\rho}_0 / \partial \varphi_1)_L > 0 \\ E &= \{[\lambda \bar{r}_1 t_n'(\bar{\rho}_0) G]_H^2 + [W + \omega_2 t_n'(\bar{\rho}_0) G]_H^2\}^{1/2} < 1 \\ D - E &> 2 \{[V + \omega_1 t_n'(\bar{\rho}_0) G]_H [(\partial Q / \partial \varphi_1 + r_1 \partial W / \partial \varphi_1 + \\ &+ \omega_2 t_n'(\bar{\rho}_0) \partial \bar{\rho}_0 / \partial \varphi_1)^2 + (\lambda \bar{r}_1 t_n'(\bar{\rho}_0) \partial \bar{\rho}_0 / \partial \varphi_1)^2]_H^{1/2}\}^{1/2}, \quad D < 1 \\ (t_n'(\bar{\rho}_0) &= \frac{1}{\bar{\rho}_0^3 (1 + \mu / \bar{\rho}_0^2)}, \quad \frac{\partial \bar{\rho}_0}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial R}{\partial \varphi_1} + r_1 \frac{\partial G}{\partial \varphi_1}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

(величина \bar{r}_1 определена в (5.4)).

Для выполнения неравенств (5.7) необходимы следующие условия: $t_n \gg \lambda^{-1}$ (как следствие, $r_1 \ll 1$ из (5.4)); функции G , V и W достаточно малы (причем $G \ll 1$); функции R , P и Q слабо зависят от φ_1 (причем $\partial R / \partial \varphi_1$, $\partial Q / \partial \varphi_1 \ll 1$).

Теорема 3. При выполнении условий (5.5)–(5.7) отображение Пуанкаре h_μ имеет в области B_1 единственную притягивающую инвариантную кривую, а система (1.1) — 2-тор.

6. Заключительные замечания. 1°. В системах с более высокой размерностью фазового пространства также может осуществляться бифуркационный механизм, подобный рассмотренному. Математическое описание будет отличаться только тем, что число «сжимающихся» координат в отображении возрастет, а условия типа (3.1) и (5.7) практически не изменятся (в качестве λ в них будет фигурировать декремент наиболее слабо затухающей моды).

2°. Первое условие (3.1) на отображение фазы φ_1 означает, что близкие по фазе точки не могут сильно разойтись во времени. Если предположить обратное, т. е. $\partial (P + \omega t_n(\bar{\rho}_0)) / \partial \varphi_1 > 1$ (отсутствие взаимной однозначности отображения $\varphi_1 \mapsto \varphi_1$), то, следуя [6], можно выписать условия, при которых в B имеет место стохастическое поведение траекторий. То же относится и к рассмотренному в п. 5 случаю $n = 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Возовой Л. П. Конечно-амплитудные режимы смешанной конвекции в вертикальном слое с волнистыми границами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 16—20.
2. Возовой Л. П. Численное исследование нелинейных квазипериодических режимов конвекции в вертикальном слое с волнообразно искривленными границами // Мат. модели, аналитические и численные методы в теории переноса. Ч. 2. Минск: 1986. С. 12—17.
3. Шильников Л. П. О рождении периодического движения из траектории, двояко-асимптотической к состоянию равновесия типа седло // Мат. сб. 1968. Т. 77. № 3. С. 461—472.
4. Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло — фокус // Мат. сб. 1970. Т. 81. № 1. С. 92—103.
5. Афраймович В. С., Гаверилов Н. К., Лукьянов В. И., Шильников Л. П. Основные бифуркации динамических систем: Горький: Горьк. ун-т, 1985. 92 с.
6. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Принцип кольца и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 618—627.