Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 531.01

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛАГРАНЖЕВОЙ СИСТЕМЫ

Каримов С. Р., Сокольский А. Г.

Рассматривается автономная многомерная лагранжева система дифференциальных уравнений, зависящая от параметров. Предлагается предиктор-корректорный метод построения семейства периодических решений (в том числе и возвратных), рождающихся из заданного решения при изменении параметров.

При рассмотрении широкого класса задач классической и небесной механики, описываемых лагранжевыми системами дифференциальных уравнений, особый интерес представляет исследование их неизолированных периодических решений, параметризуемых как внешними, так и внутренними параметрами (роль последних выполняют начальные условия решения, например константа энергии). При параметризации семейства константой энергии оно получило название естественного или натурального [1, 2].

Классическим примером естественного семейства периодических орбит являются ляпуновские периодические движения [3], рождающиеся из положения равновесия гамильтоновой системы. Методы их исследования известны [4, 5] и основаны на введении локальных координат в окрестности периодического решения с последующей нормализацией уравнений возмущенного движения и построением решения в виде ряда по малому параметру, характеризующему отклонение движения от положения равновесия.

В более сложной ситуации порождающее решение известно лишь по своим начальным условиям и периоду, а само оно является результатом численного интегрирования исходной системы. Следовательно, такие методы продолжения семейства (не обязательно ляпуновского) по параметрам должны быть численными.

Из имеющегося разнообразия таких методов отметим цикл работ В. А. Сарычева и В. В. Сазонова (ссылки см. в [6]), в которых разработан быстродействующий метод решения возникающих здесь краевых задач. Данная работа идейно примыкает к статьям [7—9] [1], в которых разработан предиктор-корректорный метод продолжения периодических решений для систем с двумя степенями свободы. Этот метод здесь обобщен на случай многомерной системы, в которой не работает теорема Биркгофа о приведении двумерной системы к каноническому виду, и в которой тем не менее удалось свести краевую задачу к задаче Коши за счет специального введения локальных координат.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обобщенно-консервативную механическую систему с $J+1$ степенью свободы, зависящую от $K-1$ параметра. Ее лагранжиан запишем в виде

$$L^* = \frac{1}{2}\sum_{j,\, i=1}^{J+1} l_{ji}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\, q_j^{\cdot} q_i^{\cdot} + \sum_{j=1}^{J+1} l_j(\mathbf{q}, \mathbf{p})\, q_j^{\cdot} + l_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

$$\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_{J+1})^T, \quad \mathbf{q}^{\cdot} = (q_1^{\cdot}, \ldots, q_{J+1}^{\cdot})^T, \quad \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{K-1})^T$$

Здесь $\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}$ — обобщенные координаты и скорости, $\mathbf{p}$ — параметры системы; функции l_{ji}, l_j, l_0 достаточно гладко (в частности, аналитически) зависят от своих переменных, причем матрица $L = \{l_{ji}\}$ — симметричная, определенно-положительная.

[1] См. также *Сокольский А. Г., Хованский С. А.* Вычислительный алгоритм продолжения по параметрам периодических решений двумерных гамильтоновых систем. М.: МАИ, 1986. 33 с.— Деп. в ВИНИТИ, 4.06.86, № 4042-86.

Система уравнений с таким лагранжианом допускает интеграл энергии типа интеграла Якоби: $C = \frac{1}{2} q^{\cdot T} L q^{\cdot} - l_0$, где $C = h$ — константа энергии, определяемая начальными условиями. Если зафиксировать постоянную энергию, (т. е. рассматривать движения, лежащие на гиперповерхности $h = \mathrm{const}$), то константу h можно считать еще одним параметром механической системы, а все остальные ее движения тогда получаются (параметризуются) из рассматриваемых изменением параметра h. Обозначим $p_K = h$ и будем считать вектор параметров $\mathbf{p}$ имеющим размерность K; кроме того, введем обозначения: $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_{J+1})^T$, $W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = l_0 + h$ (последнее позволяет в дальнейшем рассматривать лишь тождественно равные нулю значения интеграла энергии).

В принятых обозначениях лагранжиан и интеграл энергии запишутся так:

$$L^* = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{\cdot T} L \mathbf{q}^{\cdot} + \mathbf{l}^T \mathbf{q}^{\cdot} + W \tag{1.1}$$

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{\cdot T} L \mathbf{q}^{\cdot} - W \equiv 0 \tag{1.2}$$

Соответствующие уравнения движения таковы:

$$\mathbf{q}^{\cdot\cdot} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{f} = L^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{J+1})^T \tag{1.3}$$

$$\varphi_j = \sum_{i,\alpha=1}^{J+1} \left({}^1/_2 \frac{\partial l_{i\alpha}}{\partial q_j} - \frac{\partial l_{ji}}{\partial q_\alpha} \right) q_i^{\cdot} q_\alpha^{\cdot} + \sum_{i=1}^{J+1} \left(\frac{\partial l_i}{\partial q_j} - \frac{\partial l_j}{\partial q_i} \right) q_i^{\cdot} + \frac{\partial W}{\partial q_j}$$

Пусть при некоторых фиксированных значениях параметров $\mathbf{p} = \mathbf{P}$ известны начальные условия для какого-то решения уравнения (1.3)

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{P}), \quad \mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{Q}^{\cdot}(t, \mathbf{P}) \tag{1.4}$$

имеющего период $T = T(\mathbf{P})$, т. е. известны

$$\mathbf{Q}(0, \mathbf{P}) = \mathbf{Q}(T, \mathbf{P}), \quad \mathbf{Q}^{\cdot}(0, \mathbf{P}) = \mathbf{Q}^{\cdot}(T, \mathbf{P}) \tag{1.5}$$

При этом сами функции (1.4) могут быть определены в результате численного интегрирования уравнений (1.3) на промежутке $t \in [0, T]$.

Ставится задача построения и исследования свойств периодических решений, являющихся аналитическим продолжением (по параметрам) решения (1.4), т. е. требуется найти такие решения

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{p}), \quad \mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{q}^{\cdot}(t, \mathbf{p}) \tag{1.6}$$

которые удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \lim \mathbf{q}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{Q}(t, \mathbf{P}), \quad \lim \mathbf{q}^{\cdot}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{Q}^{\cdot}(t, \mathbf{P}), \\ \lim T(\mathbf{p}) = T(\mathbf{P}) \quad (\mathbf{p} \to \mathbf{P}) \\ \mathbf{q}(0, \mathbf{p}) = \mathbf{q}(T(\mathbf{p}), \mathbf{p}), \quad \mathbf{q}^{\cdot}(0, \mathbf{p}) = \mathbf{q}^{\cdot}(T(\mathbf{p}), \mathbf{p}) \end{gathered} \tag{1.7}$$

Соотношения (1.8) — условия периодичности. Соотношения (1.7) — условия принадлежности решения (1.6) семейству периодических решений, порождаемых решением (1.4). Несуществование решений (1.6), удовлетворяющих условиям принадлежности и периодичности, называется смертью семейства [I], неединственность решения (1.6), удовлетворяющего этим условиям, называется бифуркацией семейства.

Описанная постановка задачи по существу не отличается от классической. Наиболее распространенный метод ее решения — метод малого параметра, где вопрос о продолжаемости и бифуркации решается достаточной теоремой Пуанкаре и ее развитиями. Полученные ниже условия существования семейства аналогичны условиям Пуанкаре.

Отметим, что достаточно найти не сами решения (1.6), а соответствующие им начальные условия $\mathbf{q}(0, \mathbf{p})$, $\mathbf{q}^{\cdot}(0, \mathbf{p})$, удовлетворяющие условиям периодичности (1.8) и условиям принадлежности (1.7) при $t \equiv 0$. Кроме того, заметим, что численный подход к решению задачи диктует необходимость перехода в последних условиях от бесконечно малых приращений параметров к конечным малым значениям приращений. При этом если будет получаться вывод о смерти (или бифуркации) семейства, то необходимо уменьшить значения приращений и повторить вычисления. Возможность достижения цели за конечное число шагов определяется возможностями ЭВМ.

2. Введение локальных координат. Пусть (1.4) — какое-нибудь известное решение уравнений (1.3) с интегралом (1.2) и значениями параметров $\mathbf{P}$. Пусть (1.6) — другое решение уравнений (1.3), соответствующее значениям параметров $\mathbf{p}$. Введем обозначения

$$\pi = \mathbf{p} - \mathbf{P}, \quad \xi = \mathbf{q} - \mathbf{Q} \tag{2.1}$$

Такие подстановки будут ниже использованы в трех вариантах: при исследовании устойчивости, в предикторной части метода, в его корректорной части. Уравнения для локальных координат ξ (и их замен) будут аналогичными. Поэтому сразу проведем единые формальные выкладки и преобразования уравнений.

Будем пока считать в (2.1) приращения π и ξ независимыми малыми одного порядка малости и сохраним в разложениях лишь члены первого порядка. Для ξ получим такие линейные уравнения

$$\xi^{\cdot\cdot} = f_Q \xi + f_{Q^{\cdot}} \xi^{\cdot} + f_P \pi \tag{2.2}$$
$$f_Q = \partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{q}|_0, \quad f_{Q^{\cdot}} = \partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{q}^{\cdot}|_0, \quad f_P = \partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{p}|_0$$

где нижний нулевой индекс означает, что после дифференцирования сделана подстановка $\mathbf{q} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{p} = \mathbf{P}$, т. е. положено $\xi = \mathbf{0}$, $\pi = \mathbf{0}$.

Уравнения (2.2) допускают такой интеграл, получаемый из (1.2) сохранением членов первого порядка малости:

$$w = g_Q \xi + g_{Q^{\cdot}} \xi^{\cdot} + g_P \pi \equiv 0 \tag{2.3}$$
$$g_Q = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{\cdot T} L_Q \mathbf{Q}^{\cdot} - W_Q, \quad g_{Q^{\cdot}} = \mathbf{Q}^{\cdot T} L, \quad g_Q = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{\cdot T} L_P \mathbf{Q}^{\cdot} - W_P$$
$$L_Q = \partial L/\partial \mathbf{q}|_0, \quad W_Q = \partial W/\partial \mathbf{q}|_0, \quad L_P = \partial L/\partial \mathbf{p}|_0,$$
$$W_P = \partial W/\partial \mathbf{p}|_0$$

Обозначим

$$V(t) = |\mathbf{Q}^{\cdot}(t)| = \Big[\sum_{j=1}^{J+1} Q_j^{\cdot 2}(t)\Big]^{1/2} \tag{2.4}$$

т. е. V — модуль мгновенной скорости на орбите.

Будем считать, что (1.4) не является положением равновесия (в противном случае пригодны методы [4, 5]). Следовательно, $V(t) \not\equiv 0$. Пусть кроме того, на всей орбите $V(t) \neq 0$.

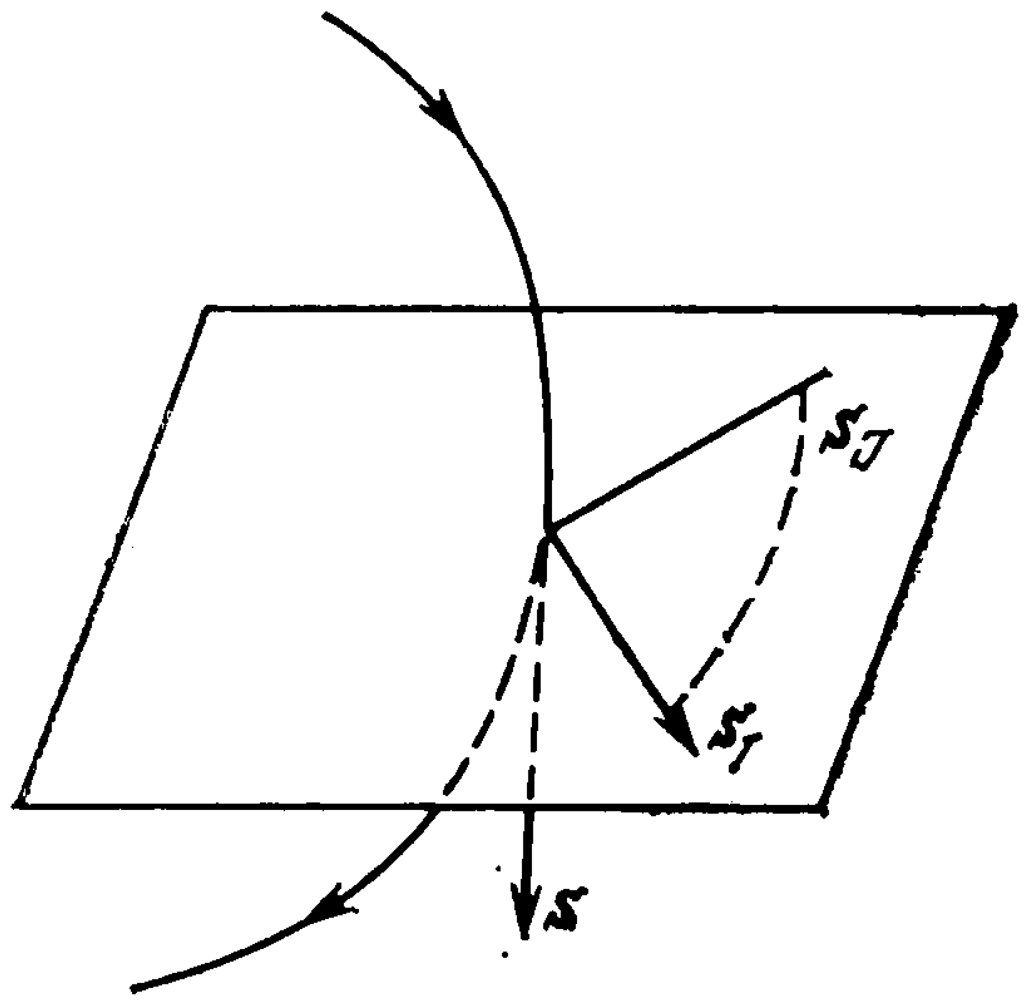
Тогда для каждой точки орбиты существует касательная в конфигурационном пространстве. Поэтому с орбитой можно связать подвижную систему координат, одна из осей которой направлена по вектору скорости $\mathbf{Q}^{\cdot}$, а остальные лежат в плоскости, нормальной к орбите.

Пусть S — матрица перехода к новой системе координат, ее последний столбец $\mathbf{s}(t) = \mathbf{Q}^{\cdot}(t)/V(t)$ — единичный вектор касательной к орбите, а первые J столбцов $\mathbf{s}_j$ $(j = 1, \ldots, J)$ расположены в нормальной к орбите плоскости, т. е. ортогональны вектору $\mathbf{s}$. Орбита $\mathbf{Q}(t)$ в конфигурационном пространстве $\{\mathbf{Q}\}$, ее касательная и ее нормальная плоскость (гиперплоскость) в момент времени t, а также новые базисные векторы $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_J$, $\mathbf{s}$ изображены на фиг. 1.

Таким образом,

$$S = \{R, \mathbf{s}\}, \quad R = \{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_J\}, \quad \dim R = (J+1) \times J \qquad (2.5)$$
$$\mathbf{s}^T\mathbf{s} = 1, \quad R^T\mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad S^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{e} = (0, \ldots, 0, 1)^T$$

Кроме того, обозначим через R^* матрицу S^{-1} без ее последней строки $\mathbf{s}^*$, т. е. из (2.5) имеем $R^*\mathbf{s} = \mathbf{0}$, $\mathbf{s}^*\mathbf{s} = 1$. Заметим, что на практике матрицу S удобно выбирать ортогональной, но в излагаемом ниже алгоритме это не используется. Ясно, что в случае периодичности решения (1.4) матрица S также будет периодической.



Фиг. 1

Обозначим через $\mathbf{x}$ вектор локальных координат в новой системе координат, представив его в виде

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n} \\ m \end{Bmatrix}, \qquad \dim \mathbf{n} = J \times 1, \quad \dim m = 1 \times 1$$

Геометрически это означает, что m — смещение (или возмущение) вдоль орбиты, а $\mathbf{n}$ — смещения (возмущения) по нормалям к орбите. Связь между старыми и новыми локальными координатами дается формулами

$$\boldsymbol{\xi} = S\mathbf{x} = R\mathbf{n} + \mathbf{s}m; \quad \mathbf{x} = S^{-1}\boldsymbol{\xi}; \quad \mathbf{n} = R^*\boldsymbol{\xi}, \quad m = \mathbf{s}^*\boldsymbol{\xi} \qquad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\xi}^{\cdot} = S^{\cdot}\mathbf{x} + S\mathbf{x}^{\cdot} = R^{\cdot}\mathbf{n} + R\mathbf{n}^{\cdot} + \mathbf{s}^{\cdot}m + \mathbf{s}m^{\cdot} \qquad (2.7)$$

Подставляя эти выражения в интеграл (2.3), получаем

$$w = g_n\mathbf{n} + g_{n^{\cdot}}\mathbf{n}^{\cdot} + g_m m + g_{m^{\cdot}} m^{\cdot} + g_P\boldsymbol{\pi} \equiv 0 \qquad (2.8)$$
$$g_n = g_Q R + g_{Q^{\cdot}} R^{\cdot}, \quad g_{n^{\cdot}} = g_{Q^{\cdot}} R$$
$$g_m = g_Q\mathbf{s} + g_{Q^{\cdot}}\mathbf{s}^{\cdot}, \quad g_{m^{\cdot}} = g_{Q^{\cdot}}\mathbf{s}$$

Используя формулы (2.3) и соотношения

$$\dot{C} = \mathbf{Q}^{\cdot\cdot T} L\mathbf{Q}^{\cdot} + \frac{1}{2}\mathbf{Q}^{\cdot T}(L_Q\mathbf{Q}^{\cdot})\mathbf{Q}^{\cdot} - W_Q\mathbf{Q}^{\cdot} =$$
$$= V[V^{\cdot}\mathbf{s}^T L\mathbf{s} + g_Q\mathbf{s} + g_{Q^{\cdot}}\mathbf{s}^{\cdot}] \equiv 0, \quad \mathbf{s}^T L\mathbf{s} = 2W/V^2 \qquad (2.9)$$

интеграл (2.8) можно переписать в виде

$$w = (m^{\cdot}V - mV^{\cdot})\cdot 2W/V^2 + g_n\mathbf{n} + g_{n^{\cdot}}\mathbf{n}^{\cdot} + g_P\boldsymbol{\pi} \equiv 0 \qquad (2.10)$$

Составим теперь уравнения для новых локальных координат, использовав, что $S\mathbf{x}^{\cdot\cdot} = \boldsymbol{\xi}^{\cdot\cdot} - 2S^{\cdot}\mathbf{x}^{\cdot} - S^{\cdot\cdot}\mathbf{x}$. Подставляя сюда выражения (2.2), (2.6), (2.7), найдем

$$S\mathbf{x}^{\cdot\cdot} = (f_Q R + f_{Q^{\cdot}} R^{\cdot} - R^{\cdot\cdot})\mathbf{n} + (f_{Q^{\cdot}} R - 2R^{\cdot})\mathbf{n}^{\cdot} +$$
$$+ (f_Q\mathbf{s} + f_{Q^{\cdot}}\mathbf{s}^{\cdot} - \mathbf{s}^{\cdot\cdot})m + (f_{Q^{\cdot}}\mathbf{s} - 2\mathbf{s}^{\cdot})m^{\cdot} + f_P\boldsymbol{\pi} \qquad (2.11)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{Q}^{\cdot\cdot\cdot} = \mathbf{f}^{\cdot} = f_Q\mathbf{Q}^{\cdot} + f_{Q^{\cdot}}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot} = (Vf_Q + V^{\cdot}f_{Q^{\cdot}})\mathbf{s} + Vf_{Q^{\cdot}}\mathbf{s}^{\cdot} \qquad (2.12)$$

получаем, что в (2.11) векторный коэффициент при m имеет вид $-(V^{\cdot}/V)(f_{Q^{\cdot}}\mathbf{s} - 2\mathbf{s}^{\cdot}) + (V^{\cdot\cdot}/V)\mathbf{s}$ (сравни с коэффициентом при $m^{\cdot}$). Таким образом, после подстановки в (2.11) выражения для $m^{\cdot}V - mV^{\cdot}$ из интеграла (2.10) и выражений (2.8) получим такие уравнения для новых локальных координат:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{\cdot\cdot} = S^{-1}[F_n n + F_{n^\cdot}\mathbf{n}^\cdot + f_\pi \boldsymbol{\pi} + (V^{\cdot\cdot}/V)m\mathbf{s}] \\ &F_n = [f_Q - f_s g_Q]R + [f_{Q^\cdot} - f_s g_{Q^\cdot}]R^\cdot - R^{\cdot\cdot}, \\ &f_s = (V/2W)(f_{Q^\cdot}\mathbf{s} - 2\mathbf{s}^\cdot) \\ &F_{n^\cdot} = [f_{Q^\cdot} - f_s g_{Q^\cdot}]R - 2R^\cdot, \quad F_\pi = f_P - f_s g_P \end{aligned} \tag{2.13}$$

Напомним, что $S^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{e}$ (см. (2.5)). Поэтому очевидно, что вместо системы (2.13) можно рассматривать два таких линейных уравнения:

$$\mathbf{n}^{\cdot\cdot} = R^*[F_n\mathbf{n} + F_{n^\cdot}\mathbf{n}^\cdot + F_\pi\boldsymbol{\pi}] \tag{2.14}$$

$$m^{\cdot\cdot} = (V^{\cdot\cdot}/V)m + \mathbf{s}^*[F_n\mathbf{n} + F_{n^\cdot}\mathbf{n}^\cdot + F_\pi\boldsymbol{\pi}] \tag{2.15}$$

Замечательное свойство уравнений (2.14), (2.15), ради которого делалась замена (2.6), состоит в том, что уравнения для нормальных координат $\mathbf{n}$ не зависят от тангенциальной координаты m. Это означает, что сначала можно находить нормальные смещения (возмущения) $\mathbf{n}$, а потом при найденных $\mathbf{n}$ тангенциальное смещение (возмущение) m.

3. Предиктор. Итак, пусть (1.4) — известное T-периодическое решение уравнений (1.3) с интегралом (1.2) и значениями параметров $\mathbf{P}$. Предположим, что при значениях параметров $\mathbf{p} = \mathbf{P} + \boldsymbol{\pi}$, где $\boldsymbol{\pi}$ — заданные приращения параметров, существует периодическое решение (1.6), удовлетворяющее условиям принадлежности (1.7) и периодичности (1.8). Цель — найти решение (1.6). Алгоритм продолжения по параметрам реализуем в два этапа. Сначала (предиктор) найдем линейные по приращениям параметров поправки к начальным условиям и периоду, а затем (корректор) учтем нелинейный характер поправок, построив сходящуюся итерационную процедуру. В этом разделе излагается предикторная часть метода.

Введем смещения $\boldsymbol{\xi}$ (локальные координаты) по формулам (2.1) и представим новый период в виде $T^* = T + \tau$, где $T = T(\mathbf{P})$, $T^* = T(\mathbf{p})$. Будем считать $\boldsymbol{\xi}$ и τ величинами первого порядка малости по $\boldsymbol{\pi}$. Тогда для смещений получаем уравнения (2.2) с интегралом (2.3). После введения нормальных и тангенциального смещений $\mathbf{n}$ и m по формулам п. 2 приходим к уравнениям (2.14), (2.10). Все коэффициенты при $\mathbf{n}$ и m в этих уравнениях имеют период T.

Из условий периодичности решений (1.4) и (1.6), оставляя только члены первого порядка малости, получаем такие краевые условия:

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(T), \quad \mathbf{n}^\cdot(0) = \mathbf{n}^\cdot(T) \tag{3.1}$$

$$m(0) = m(T), \quad m^\cdot(0) = m^\cdot(T) + V^\cdot(0)\tau \tag{3.2}$$

Представим смещения $\mathbf{n}$, m, τ в виде линейных комбинаций варьируемых параметров

$$\mathbf{n} = \sum_{k=1}^{K}\mathbf{n}^{(k)}\pi_k, \quad m = \sum_{k=1}^{K}m^{(k)}\pi_k, \quad \tau = \sum_{k=1}^{K}\tau^{(k)}\pi_k \tag{3.3}$$

и подставим эти соотношения в уравнения (2.14), (2.10) и краевые условия (3.1), (3.2). Используя независимость приращений параметров π_k, получаем K комплектов всех этих соотношений.

Рассмотрим сначала краевую задачу для нормальных смещений:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}^{(k)} = \left\|\begin{matrix} 0 & E_J \\ R^*F_n & R^*F_{n^\cdot} \end{matrix}\right\|\mathbf{v}^{(k)} + \left\|\begin{matrix} 0 \\ R^*F_{\pi_k} \end{matrix}\right\|, \quad \mathbf{v}^{(k)} = \left\|\begin{matrix} \mathbf{n}^{(k)} \\ \mathbf{n}^{\cdot(k)} \end{matrix}\right\| \tag{3.4}$$

$$\mathbf{v}^{(k)}(0) = \mathbf{v}^{(k)}(T) \tag{3.5}$$

где F_{π_k} k-й столбец матрицы F_π из (2.13), т. е. результат дифференцирования соответствующих функций только по k-му параметру p_k, E_J—единичная матрица порядка J.

Краевую задачу (3.4), (3.5) можно свести к начальной задаче Коши. В самом деле, общее решение неоднородных уравнений (3.4) можно записать в виде

$$\mathbf{v}^{(k)}(t) = N(t)\,\mathbf{v}^{(k)}(0) + \mathbf{v}^{(\pi_k)}(t) \tag{3.6}$$

Здесь $N(t)$ — матрица фундаментальных решений однородной системы, нормированная условием $N(0) = E_{2J}$, $\mathbf{v}^{(k)}(0)$ — начальные условия для $\mathbf{v}^{(k)}(t)$, $\mathbf{v}^{(\pi_k)}(t)$ — частное решение неоднородных уравнений с нулевыми начальными условиями, т. е. $\mathbf{v}^{(\pi_k)}(0) = \mathbf{0}$. Подставляя решение (3.6) в краевые условия (3.5), имеем

$$\mathbf{v}^{(k)}(0) = -[N(T) - E_{2J}]^{-1}\,\mathbf{v}^{(\pi_k)}(T) \tag{3.7}$$

Таким образом, (3.6) с вектором (3.7) — решение краевой задачи (3.4), (3.5).

Для нахождения смещения τ в периоде перепишем получающийся из уравнения (2.10) коэффициент при π_k в виде

$$m^{\cdot(k)} = \frac{V^{\cdot}}{V}\,m^{(k)} - \frac{V}{2W}\,[g_{\mathbf{v}}\mathbf{v}^{(k)} + g_{P_k}] \tag{3.8}$$

где $g_{\mathbf{v}} = \{g_n, g_{n^{\cdot}}\}$, а g_{P_k} — k-й элемент матрицы-строки g_P из (2.3). Подставим сюда решение (3.6). Тогда общее решение уравнения (3.8) можно записать в виде

$$m^{(k)}(t) = (V(t)/V(0))\,m^{(k)}(0) + \mu(t)\,\mathbf{v}^{(k)}(0) + \mu^{(\pi_k)}(t) \tag{3.9}$$

где вектор-строка $\mu(t)$ и $\mu^{(\pi_k)}(t)$ — решения таких задач Коши:

$$\dot{\mu} = (V^{\cdot}/V)\mu - (V/(2W))g_{\mathbf{v}}N, \quad \mu(0) = 0$$

$$\mu^{\cdot(\pi_k)} = (V^{\cdot}/V)\,\mu^{(\pi_k)} - (V/2W)\,[g_{\mathbf{v}}\mathbf{v}^{(\pi_k)} + g_{P_k}], \quad \mu^{(\pi_k)}(0) = 0$$

Начальное смещение $m^{(k)}(0)$ можно положить равным нулю, так как смещение вдоль орбиты не меняет ее. Тогда из первого условия периодичности (3.2) получаем $m^{(k)}(0) = m^{(k)}(T) + V(0)\tau$ и, следовательно,

$$\tau^{(k)} = -m^{(k)}(T)/V(0) = [\mu(T)\,\mathbf{v}^{(k)}(0) + \mu^{(\pi_k)}(T)]/V(0) \tag{3.10}$$

Непосредственным дифференцированием решения (3.9) находим, что второе условие периодичности (3.2) выполняется тождественно при выборе $\tau^{(k)}$ по формуле (3.10), причем

$$m^{(k)}(0) = 0, \quad m^{\cdot(k)}(0) = (-V(0)/(2W(0)))\,[g_{\mathbf{v}}(0)\,\mathbf{v}^{(k)}(0) + g_{P_k}(0)] \tag{3.11}$$

Итак, для нахождения нового периодического движения необходимо проинтегрировать от $t = 0$ до $t = T$ следующую систему уравнений:

$$\mathbf{Q}^{\cdot\cdot} = f(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\cdot}, \mathbf{P}) \tag{3.12}$$

$$\mathbf{N}_j^{\cdot} = \begin{Vmatrix} 0 & E_J \\ R^*F_n & R^*F_{n^{\cdot}} \end{Vmatrix} N_j, \quad \mathbf{N}_j(0) = \mathbf{e}_j \tag{3.13}$$

$(j = 1, \ldots, 2J)$

$$\mu_j^{\cdot} = \frac{V^{\cdot}}{V}\,\mu_j - \frac{V}{2W}\,g_{\mathbf{v}}\mathbf{N}_j, \quad \mu_j(0) = 0 \tag{3.14}$$

$$\mathbf{v}^{\cdot(\pi_k)} = \begin{Vmatrix} 0 & E_J \\ R^*F_n & R^*F_{n^\cdot} \end{Vmatrix} \mathbf{v}^{(\pi_k)} + \begin{Vmatrix} 0 \\ R^*F_{\pi_k} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{v}^{(\pi_k)}(0) = \mathbf{0} \tag{3.15}$$

$(k = 1, \ldots, K)$

$$\mu^{\cdot(\pi_k)} = \frac{V^\cdot}{V}\mu^{(\pi_k)} - \frac{V}{2W}[g_v\mathbf{v}^{(\pi_k)} + g_{p_k}], \quad \mu^{(\pi_k)}(0) = 0 \tag{3.16}$$

В формулах (3.12)—(3.16) обозначено $E_{2J} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{2J}\}$, $N = \{\mathbf{N}_1, \ldots, \mathbf{N}_{2J}\}$, $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_{2J}\}$, а начальные условия $\mathbf{Q}(0)$, $\mathbf{Q}^\cdot(0)$ считаются, конечно, известными. Порядок системы равен $2(J+1) + 2J(2J+1) + (2J+1)K$.

В результате интегрирования этой системы становятся известными величины $N(T)$, $\mathbf{v}^{(\pi_k)}(T)$, $\mu(T)$, $\mu^{(\pi_k)}(T)$ и по формулам (3.7), (3.11) и (3.10) подсчитываются величины $\mathbf{n}^{(k)}(0)$, $\mathbf{n}^{\cdot(k)}(0)$, $m^{\cdot(k)}(0)$ и $\tau^{(k)}$. Затем по формулам (3.3) находятся величины $\mathbf{n}(0)$, $\mathbf{n}^\cdot(0)$, $m(0)$, $m^\cdot(0)$ и τ, а по ним при помощи формул (2.6) и (2.7) — величины $\xi(0)$, $\xi^\cdot(0)$.

Наконец, для новых значений параметров $\mathbf{p} = \mathbf{P} + \pi$ находятся начальные условия и период нового периодического решения по формулам

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{Q}(0) + \xi(0), \quad \mathbf{q}^\cdot(0) = \varkappa\mathbf{q}^{\cdot*}(0), \quad T^* = T(\mathbf{p}) = T + \tau$$
$$\mathbf{q}^{\cdot*}(0) = \mathbf{Q}^\cdot(0) + \xi^\cdot(0), \quad \varkappa = \left[\frac{2W(\mathbf{q}(0), \mathbf{p})}{\mathbf{q}^{\cdot*T}(0)\,L(\mathbf{q}(0), \mathbf{p})\,\mathbf{q}^{\cdot*}(0)}\right]^{1/2} \tag{3.17}$$

Здесь поправочный коэффициент $\varkappa$ введен для того, чтобы удовлетворить интегралу энергии (1.2); если бы в (3.17) было $\varkappa \equiv 1$, то в (1.2) $C \neq 0$ из-за того, что предиктор дает лишь приближенные значения смещений в начальных условиях.

4. Корректор. Движения с начальными условиями (3.17) будут периодическими лишь приближенно, т. е. разности $\mathbf{q}(T^*) - \mathbf{q}(0)$, $\mathbf{q}^\cdot(T^*) - \mathbf{q}^\cdot(0)$ ненулевые, но являются малыми второго порядка относительно приращений параметров π на предыдущем шаге. Для уточнения начальных условий и периода служит корректорная часть метода.

Пусть теперь (1.4) — непериодическое решение уравнений (1.3), но такое, что в его близкой окрестности в фазовом пространстве существует периодическое решение (1.6), соответствующее тем же значениям параметров. Цель — найти такое движение, приняв данное движение за исходное приближение.

Введем локальные координаты (смещения) по формулам (2.1) и будем искать при $\pi \equiv \mathbf{0}$ смещения в начальных условиях $\xi(0)$, $\xi^\cdot(0)$ и периоде τ.

Смещения $\xi(t)$ удовлетворяют уравнениям (2.2) с интегралом (2.3). Вводя нормальные $\mathbf{n}$ и тангенциальное m смещения по формулам (2.6), приходим к уравнениям (2.14), (2.10).

Будем считать величины $\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(T) - \mathbf{Q}(0) \neq \mathbf{0}$, $\Delta\mathbf{Q}^\cdot = \mathbf{Q}^\cdot(T) - \mathbf{Q}^\cdot(0) \neq \mathbf{0}$ малыми одного порядка с ξ, $\xi^\cdot$, τ. Тогда для уравнений (2.14), (2.10) краевые условия будут такими:

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(T) + R^*(0)\Delta\mathbf{Q} \tag{4.1}$$
$$\mathbf{n}^\cdot(0) = \mathbf{n}^\cdot(T) + R^{\cdot*}(0)\,\Delta\mathbf{Q} + R^*(0)\,\Delta\mathbf{Q}^\cdot$$

$$m(0) = m(T) + V(0)\tau + \mathbf{s}^*(0)\,\Delta\mathbf{Q} \tag{4.2}$$
$$m^\cdot(0) = m^\cdot(T) + V^\cdot(0)\tau + \mathbf{s}^{\cdot*}(0)\,\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{s}^*(0)\,\Delta\mathbf{Q}^\cdot$$

где $R^{\cdot*}$ — первые J строк матрицы dS^{-1}/dt, $\mathbf{s}^{\cdot*}$ — последняя строка этой матрицы.

Как и в предикторе, общее решение уравнений (2.14) представим в виде (3.6) (разумеется, нужно отбросить верхние индексы k; $\mathbf{v}^{(\pi_k)} \equiv 0$). Тогда из краевых условий (4.1) находим

$$\mathbf{v}(0) = \begin{Vmatrix} \mathbf{n}(0) \\ \mathbf{n}^{\cdot}(0) \end{Vmatrix} = -[N(T) - E_{2J}]^{-1} \begin{Vmatrix} R^{*}(0)\,\Delta\mathbf{Q} \\ R^{\cdot *}(0)\,\Delta\mathbf{Q} + R^{*}(0)\,\Delta\mathbf{Q}^{\cdot} \end{Vmatrix} \tag{4.3}$$

Рассмотрим теперь краевую задачу для тангенциального смещения. Подставим в (2.10) найденные нормальные смещения. Тогда его общее решение можно записать в виде (3.9), где надо отбросить индексы k и положить $\mu^{(\pi_k)} \equiv 0$.

Начальное смещение вдоль орбиты опять можно положить равным нулю, т. е.

$$m(0) = 0, \quad m^{\cdot}(0) = -(V(0)/(2W(0)))\, g_{\mathbf{v}}(0)\,\mathbf{v}(0) \tag{4.4}$$

Тогда из первого условия периодичности (4.2) получаем смещение в периоде в виде

$$\tau = -[\mu(T)\,\mathbf{v}(0) + \mathbf{s}^{*}(0)\,\Delta\mathbf{Q}]/V(0) \tag{4.5}$$

Непосредственным дифференцированием (3.9) получаем, что второе краевое условие (4.2) с принятой степенью точности выполняется, а получающаяся при этом невязка может служить критерием точности работы корректора.

Собирая все результаты этого раздела, получаем, что для нахождения смещений в начальных условиях и периоде необходимо проинтегрировать от $t = 0$ до $t = T$ систему порядка $2(J + 1) + 2J(2J + 1)$, состоящую из уравнений (3.12)—(3.14).

В результате интегрирования этой системы вычисляются величины $\mathbf{n}(0)$, $\mathbf{n}^{\cdot}(0)$, $m(0)$, $m^{\cdot}(0)$ и τ по формулам (4.3)—(4.5), а по ним находятся смещения $\boldsymbol{\xi}(0)$, $\boldsymbol{\xi}^{\cdot}(0)$ и новые начальные условия по формулам (2.6), (2.7) и (3.17).

Погрешность работы корректора определяется относительной ошибкой (ε_1, ε_2 — весовые коэффициенты)

$$\varepsilon = [\varepsilon_1 \,|\boldsymbol{\xi}(0)|/|\mathbf{q}(0)| + \varepsilon_2\, |\boldsymbol{\xi}^{\cdot}(0)|/|\mathbf{q}^{\cdot}(0)|] \tag{4.6}$$

Если ε окажется меньше заданной величины ε^{*}, то за начальные условия и период искомого периодического решения принимаются величины (3.17). Если ошибка (4.6) больше заданной, то полагается $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{q}(0)$, $\mathbf{Q}^{\cdot}(0) = \mathbf{q}^{\cdot}(0)$, $T = T^{*}$ и работу корректора надо повторить до достижения неравенства $\varepsilon < \varepsilon^{*}$. Обратим внимание, что построенный корректор обладает ускоренной квадратичной сходимостью типа ньютоновской.

5. О возвратных периодических решениях. Выше было сделано допущение, что вектор скорости не обращается в нуль ни в одной точке орбиты. Покажем, как обобщить метод на этот случай.

Пусть (1.4) — T-периодическое решение (орбита) уравнений (1.3) с интегралом (1.2) при фиксированных значениях параметров $\mathbf{P}$. Пусть это решение не является положением равновесия, т. е. в (1.3) $\mathbf{f}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\cdot}, \mathbf{P}) \not\equiv \mathbf{0}$ при $\mathbf{Q}^{\cdot} = \mathbf{0}$. Поэтому в тех точках орбиты, в которых вектор скорости $\mathbf{Q}^{\cdot}$ будет нулевым, вектор ускорения $\mathbf{Q}^{\cdot\cdot}$ ненулевой.

Пусть t_i — такие моменты времени (без ограничения общности считаем $t_1 \neq 0$), т. е.

$$\mathbf{Q}^{\cdot}(t_i) = 0, \quad \mathbf{Q}^{\cdot\cdot}(t_i) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, I, \quad 0 < t_1 < \ldots \ldots < t_I < T \tag{5.1}$$

Это означает, что в конфигурационном пространстве $\{\mathbf{Q}\}$ точка $\mathbf{Q}(t_i)$ лежит на поверхности (гиперповерхности) нулевой скорости $W(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = 0$ (см. (1.2)), а точки $\mathbf{Q}(t)$ при $0 < |t - t_i| < \varepsilon$ на этой поверхности не лежат.

В окрестности точки t_i вектор-функцию $\mathbf{Q}^{\cdot}(t)$ и ее модуль $|\mathbf{Q}^{\cdot}(t)|$ представим рядами:

$$\mathbf{Q}^{\cdot}(t) = \mathbf{Q}^{\cdot\cdot}(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{2}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot\cdot}(t_i)(t - t_i)^2 + \frac{1}{6}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}(t_i)(t - t_i)^3 + \ldots \tag{5.2}$$

$$|\mathbf{Q}^{\cdot}(t)| = \sqrt{\mathbf{Q}^{\cdot T}\mathbf{Q}^{\cdot}} = \sqrt{\mathbf{Q}^{\cdot\cdot T}(t_i)\mathbf{Q}^{\cdot\cdot}(t_i)}\,|t - t_i| + \ldots, \quad |t - t_i| < \varepsilon$$

Следовательно, не существует $\lim \mathbf{s}(t)$ при $t \to t_i$, где $\mathbf{s}(t) = \mathbf{Q}^{\cdot}(t)/|\mathbf{Q}^{\cdot}(t)|$ — единичный касательный вектор орбиты. Однако существуют односторонние пределы

$$\lim_{t \to t_i - 0} \mathbf{s}(t) = -\lim_{t \to t_i + 0} \mathbf{s}(t) = \frac{\mathbf{Q}^{\cdot\cdot}(t_i)}{|\mathbf{Q}^{\cdot\cdot}(t_i)|} \neq 0 \tag{5.3}$$

т. е. касательный вектор орбиты $\mathbf{s}(t)$ имеет при $t = t_i$ разрыв первого рода, причем при переходе через точку t_i этот вектор меняет свое направление на противоположное. Следовательно, $\mathbf{Q}(t_i)$ — точка возврата орбиты $\mathbf{Q}(t)$, причем нормальная плоскость (гиперплоскость) в этой точке совпадает с касательной плоскостью к поверхности $W(\mathbf{Q}) = 0$. Другими словами, орбита «падает» и «отражается» от поверхности нулевой скорости в направлении нормали к этой поверхности [I].

Покажем, как это свойство «нормальности падения и отражения» использовать для применения предиктор-корректорного метода в случае возвратных движений.

Итак, пусть орбита имеет точки возврата $t = t_i$, в которых выполнены условия (5.1). Введем вместо определения (2.4) новую функцию:

$$V(t) = \delta(t)|\mathbf{Q}^{\cdot}(t)|, \quad |\mathbf{Q}^{\cdot}(t)| = \sqrt{\mathbf{Q}^{\cdot T}(t)\mathbf{Q}^{\cdot}(t)} \tag{5.4}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < t_1 \\ -1, & t_1 \leqslant t < t_2 \\ \ldots & \\ (-1)^i, & t_i \leqslant t < t_{i+1} \\ \ldots & \\ (-1)^I, & t_I \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{5.5}$$

Ясно, что при всех $t \in [0, T]$ функция (5.4) будет непрерывна и обращается в нуль только при $t = t_i$. Запишем ее разложение в окрестности точки t_i, т. е. при $|t - t_i| < \varepsilon$

$$V(t) = \delta(t)|t - t_i|\left\{V^{\cdot}(t_i) + \frac{1}{2}V^{\cdot\cdot}(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{6}V^{\cdot\cdot\cdot}(t_i)(t - t_i)^2 + \ldots\right\} \tag{5.6}$$

$$V^{\cdot}(t_i) = |\mathbf{Q}^{\cdot\cdot}(t_i)| = \sqrt{\mathbf{Q}^{\cdot\cdot T}(t_i)\mathbf{Q}^{\cdot\cdot}(t_i)} \neq 0$$

$$V^{\cdot\cdot}(t_i) = \frac{1}{V^{\cdot}}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot\cdot T}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot}\Big|_{t=t_i}$$

$$V^{\cdot\cdot\cdot}(t_i) = \left[\frac{1}{V^{\cdot}}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot\cdot\cdot T}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot} + \frac{3}{4V^{\cdot}}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot\cdot T}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot\cdot} - \frac{3}{4V^{\cdot 3}}(\mathbf{Q}^{\cdot\cdot T}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot\cdot})^2\right]\Big|_{t=t_i}$$

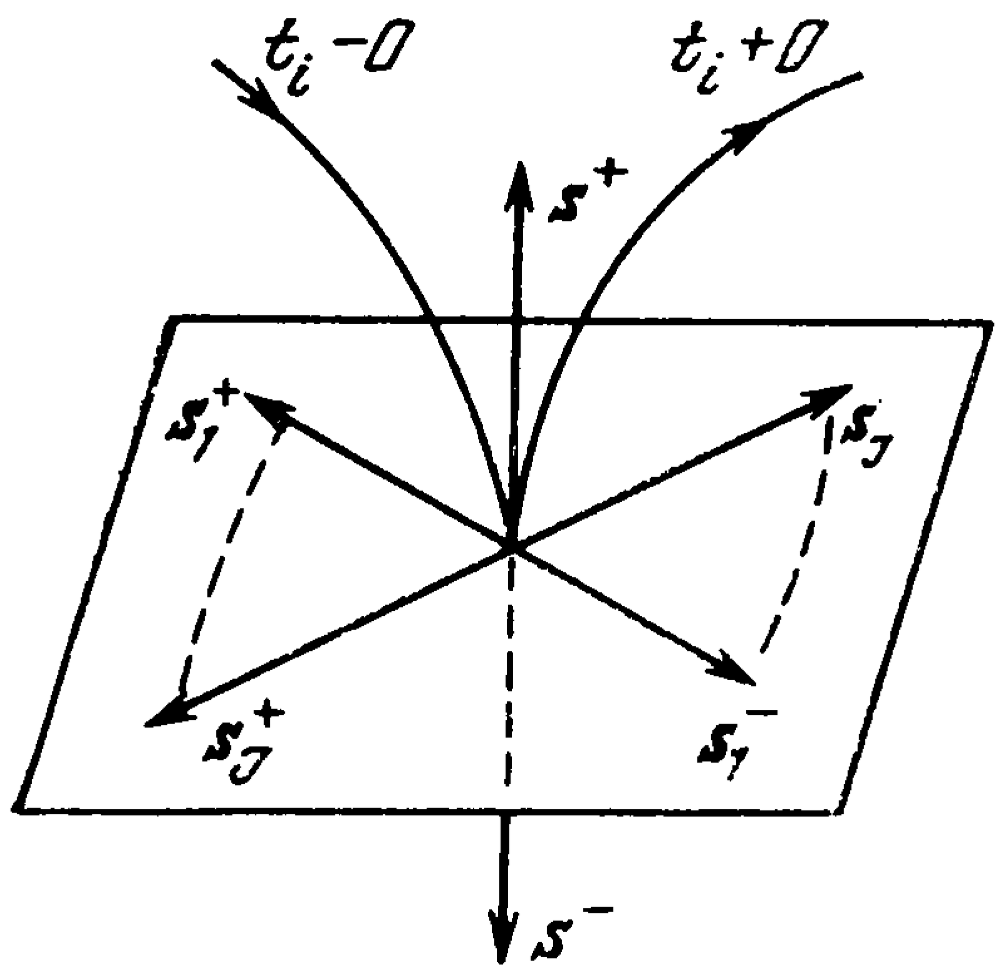
Следовательно, функция $V(t)$ аналитична при всех $t \in [0, T]$.

Как и ранее, касательный вектор $\mathrm{s}(t)$ определим по формуле $\mathrm{s}(t) = \mathbf{Q}^{\cdot}(t)/V(t)$. Тогда вектор-функция $\mathrm{s}(t)$ станет аналитической при $t \in [0, T]$, причем при $t = t_i$, имеем

$$\mathrm{s}(t_i) = \frac{1}{V^{\cdot}} \mathbf{Q}^{\cdot\cdot}\Big|_{t=t_i}, \quad \mathrm{s}^{\cdot}(t_i) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{V^{\cdot}}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot\cdot} - \frac{V^{\cdot\cdot}}{V^{\cdot 2}}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot}\right]\Big|_{t=t_i} \tag{5.7}$$

$$\mathrm{s}^{\cdot\cdot}(t_i) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{V^{\cdot}}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \frac{3}{2}\frac{V^{\cdot\cdot}}{V^{\cdot 2}}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot\cdot} - \frac{V^{\cdot\cdot\cdot}}{V^{\cdot 2}}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot} + \frac{3}{2}\frac{V^{\cdot\cdot}}{V^{\cdot 3}}\mathbf{Q}^{\cdot\cdot}\right]\Big|_{t=t_i}$$

Ясно, что вновь определенный вектор $\mathrm{s}(t)$ получается из определенного в п. 2 вектора просто его умножением на функцию $\delta(t)$.



Фиг. 2

Как и в п. 2, введем невырожденную матрицу перехода $S(t)$ к новому базису; последний ее столбец — вектор $\mathrm{s}(t)$. Определим теперь матрицу $S(t)$ как произведение такой же матрицы из п. 2 на функцию $\delta(t)$. Тогда все свойства матрицы S сохранятся и сохранится вид уравнений для нормальных и тангенциального смещений. Отметим, что $S(0) = (-1)^I S(T)$.

На фиг. 2 изображена орбита $\mathbf{Q}(t)$ в конфигурационном пространстве $\{\mathbf{Q}\}$, а также ее нормальная плоскость (гиперплоскость) в момент $t = t_i$. Орбита не пересекает, а «отражается» от своей нормальной плоскости, которая совпадает с плоскостью, касательной к поверхности $W = 0$. Видно, что при $t = t_i - 0$ и при $t = t_i + 0$ базисные векторы (отмечены верхними индексами минус и плюс) скачком изменили свое направление на противоположное. Однако выше эта особенность устранена введением функции $\delta(t)$.

Правые части уравнений (2.14) для нормальных смещений не содержат особенностей.

В самом деле, из вида функций F_n, $F_n^{\cdot}$, F_π вытекает, что особенность может быть только в слагаемых вида

$$S^{-1}(V/(2W))(f_{Q}\cdot\mathrm{s} - 2\mathrm{s}^{\cdot}) = S^{-1}f_s \tag{5.8}$$

причем при $t = t_i$ функция $V(t)$ имеет нуль первого, а $W(t)$ — второго порядков. Поэтому возникает подозрение, что в выражении (5.8) есть полюс первого порядка. Но это не так. В самом деле, при выводе уравнений (2.13) из (2.11) было использовано соотношение

$$\frac{1}{V}(f_{Q}\cdot\mathrm{s} - 2\mathrm{s}^{\cdot}) = -\frac{1}{V^{\cdot}}(f_Q\mathrm{s} + f_{Q}\cdot\mathrm{s}^{\cdot} - \mathrm{s}^{\cdot\cdot}) + \frac{V^{\cdot\cdot}}{V}\mathrm{s}$$

где теперь V определяется формулой (5.4). Используя свойство (2.5) $S^{-1}\mathrm{s} = \mathbf{e}$, вместо (5.8) получаем

$$\frac{V^2}{2W}\left[-\frac{1}{V^{\cdot}}S^{-1}(f_Q\mathrm{s} + f_{Q}\cdot\mathrm{s}^{\cdot} - \mathrm{s}^{\cdot\cdot}) + \frac{V^{\cdot\cdot}}{V}\mathbf{e}\right]$$

Или окончательно

$$R^* f_s = -\frac{1}{V^{\cdot}}\frac{1}{\mathrm{s}^T L \mathrm{s}} R^*(f_Q\mathrm{s} + f_{Q}\cdot\mathrm{s}^{\cdot} - \mathrm{s}^{\cdot\cdot})$$

Таким образом, показано, что и в случае возвратных периодических движений правые части уравнений для нормальных смещений не имеют особенностей.

Отметим, что на практике для вычисления при $t = t_i$ векторов s, $\mathrm{s}^{\cdot}$, $\mathrm{s}^{\cdot\cdot}$ вовсе не требуется использовать формулы (5.7), (5.6). Достаточно вычислить эти векторы в нескольких точках при $t < t_i$ и $t > t_i$, а затем применить какую-нибудь интерполяционную формулу.

Рассмотрим теперь уравнение для тангенциального смещения (2.10). Для применения предиктор-корректорного метода требуется найти его частное решение с начальным условием $m(0) = 0$. Однако численное интегрирование этого уравнения на ЭВМ может создать большую трудность, так как здесь коэффициент при старшей производной обращается в нуль при $t = t_i$. Поэтому лучше интегрировать уравнение второго порядка, получающееся из (2.11):

$$\begin{aligned}
&m^{\cdot\cdot} = \mathrm{s}^*[(f_Q \mathrm{s} + f_{Q^\cdot}\mathrm{s}^\cdot - \mathrm{s}^{\cdot\cdot})m + (f_{Q^\cdot}\mathrm{s} - 2\mathrm{s}^\cdot)m^\cdot + \\
&+ (f_Q R + f_{Q^\cdot} R^\cdot - R^{\cdot\cdot})\mathbf{n} + (f_{Q^\cdot} R - 2R^\cdot)\mathbf{n}^\cdot + f_P \pi] \\
&m(0) = 0, \quad m^\cdot(0) = -(V(0)/(2W(0)))[g_n(0)\mathbf{n}(0) + \\
&+ g_{n^\cdot}(0)\mathbf{n}^\cdot(0) + g_P(0)\pi]
\end{aligned}$$

и не содержащее никаких особенностей.

Наконец, рассмотрим как изменяются краевые условия для случая возвратных периодических движений. Из соотношений $S(0) = (-1)^I S(T)$, $V(0) = (-1)^I V(T)$ получаем, что в краевых условиях предиктора (3.1), (3.2) и корректора (4.1), (4.2) перед смещениями $\mathbf{n}(T)$, $\mathbf{n}^\cdot(T)$, $m(T)$, $m^\cdot(T)$ появляется множитель $(-1)^I$. Соответственно и в формулах (3.7), (3.10) и (4.3), (4.5) необходимо поставить множитель $(-1)^I$ перед функциями, вычисленными при $t = T$.

Таким образом, алгоритм исследования полностью обобщен на случай возвратных движений.

6. Об устойчивости. Кратко рассмотрим задачу об устойчивости известного T-периодического решения (1.4). Для этого введем возмущения ξ по формулам (2.1), полагая параметры фиксированными, т. е. $\pi \equiv 0$ в (2.1). Тогда матрицы f_Q, $f_{Q^\cdot}$ в вариационных уравнениях (2.1) и вектор-строки g_Q, $g_{Q^\cdot}$ в их интеграле (2.3) являются T-периодическими.

Ясно, что по отношению к возмущениям ξ периодическое движение является неустойчивым, так как его период зависит от начальных условий. Но можно поставить задачу об орбитальной устойчивости периодического движения [3], которая означает, что вводятся нормальные к орбите возмущения $\mathbf{n}$, а устойчивость относительно тангенциального возмущения m не изучается.

Пусть $X(t)$ — матрица фундаментальных решений системы (2.13) (в которой, разумеется, $\pi \equiv 0$), нормированная начальным условием $X(0) = E_{2J+2}$ — единичная матрица порядка $2J + 2$. Вычислим эту матрицу при $t = T$ и составим характеристическое уравнение

$$I_X(\rho) = \det \| X(T) - \rho E_{2J+2} \| = 0 \qquad (6.1)$$

В силу лагранжевости исходной системы характеристическое уравнение (6.1) будет возвратным [3, 11], т. е. характеристический многочлен можно представить в виде

$$I_X(\rho) = \prod_{j=1}^{J+1} (\rho^2 - 2A_j\rho + 1) \qquad (6.2)$$

Рассмотрим структуру многочлена (6.2). Так как система (2.13) эквивалентна системе (2.14), (2.15), можно убедиться, что $I_X(\rho) = I_n(\rho) I_m(\rho)$, где $I_n(\rho)$ — характеристическое уравнение системы (2.14), соответствующее только нормальным возмущениям $\mathbf{n}, \mathbf{n}^\cdot$; $I_m(\rho)$ — характеристический многочлен дифференциального уравнения второго порядка $m^{\cdot\cdot} = (V^{\cdot\cdot}(t)/V(t))m$. Непосредственным интегрированием этого уравнения находим, что $I_m(\rho) = \rho^2 - 2\rho + 1$, т. е. характеристический многочлен (6.1) имеет, как и следовало ожидать [1, 3], пару единичных мультипликаторов $\rho_{2J+1} = \rho_{2J+2} = 1$. Но тогда характеристическое уравнение для нормальных возмущений можно записать в виде

$$I_n(\rho) = \det \| N(T) - \rho E_{2J} \| = \prod_{j=1}^{J} (\rho^2 - 2A_j\rho + 1) \qquad (6.3)$$

где $N(t)$ — матрица фундаментальных решений вариационной системы нормальных возмущений (2.14), нормированная начальным условием $N(0) = E_{2J}$.

Таким образом, для нормальных возмущений доказана теорема Ляпунова — Пуанкаре [3, 10, 11] о возвратности характеристического многочлена. В качестве ее следствия получаем критерий орбитальной устойчивости в первом приближении: такая устойчивость имеет место тогда и только тогда, когда все корни уравнения $I_n(\rho) = 0$ (называемые мультипликаторами) лежат в комплексной плоскости на единичной окружности, а матрица $N(T)$ при этом приводится к диагональному виду.

Отметим, что в процессе работы корректора матрица $N(T)$ автоматически вычисляется на последней итерации. Поэтому в качестве достоинства используемого метода можно отметить, что для исследования устойчивости в первом приближении никаких дополнительных вычислений, кроме построения самого движения, производить не надо.

Сделаем несколько замечаний о границах применимости предлагаемого предиктор-корректорного метода.

1°. Если матрица $\| N(T) - E_{2J} \|$ вырождена, то начальные условия для нормальных смещений по формулам (3.7), (4.3) определять нельзя. Равенство $\det \| N(T) - E_{2J} \| = 0$ означает, что матрица $N(T)$ имеет собственное значение, равное единице, причем в силу возвратности характеристического уравнения (6.3) корень $\rho_j = 1$ может иметь лишь четную кратность. Такое периодическое решение естественно назвать критическим [2, 3]. Критичность периодического решения означает нарушение достаточных условий теоремы Пуанкаре о существовании периодического решения. Однако критичность означает не невозможность продолжить периодическое решение вообще, а лишь невозможность продолжения описанным методом. Учет в предикторе нелинейных по смещениям параметров π членов, безусловно, может исправить положение. Такое исследование выходит за рамки данной работы.

2°. Так как при вычислениях на ЭВМ никогда нельзя точно выйти на равенство $\det \| N(T) - E_{2J} \| = 0$, то и особенность в вычислительной схеме при «перешагивании» критической орбиты не возникает при соответствующем подборе конечных приращений π. Таким образом, можно с использованием той же вычислительной схемы получить новое семейство, рождающееся из критической орбиты. При этом, правда, удается построить, строго говоря, одно семейство из всех возможных, т. е. не получить решение задачи о бифуркации. Однако соединение такого вычислительного эксперимента с анализом физической сущности задачи может дать дополнительную информацию.

В заключение отметим, что описанный выше метод был применен при исследовании периодических движений, рождающихся из малых либраций, перпендикулярных плоскости вращения основных притягивающих тел в пространственной круговой ограниченной задаче трех тел [1]. Для характеристики быстродействия метода укажем, что в этой задаче получение нового движения занимает порядка 90 с на ЭВМ ЕС-1061.

[1] *Каримов С. Р., Сокольский А. Г.* Периодические движения в задаче трех тел, рождающиеся из пространственных либраций в окрестности лагранжевых решений. М.: МАИ, 1987. 48 с.— Деп. в ВИНИТИ, 24.08.87, № 6182—В87.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967. 523 с.
2. *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. 656 с.
3. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7—263.
4. *Маркеев А. П., Сокольский А. Г.* Метод построения и исследования устойчивости периодических движений автономных гамильтоновых систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 52—65.
5. *Маркеев А. П., Сокольский А. Г.* Метод исследования периодических движений Ляпунова в гамильтоновых системах и его реализация на ЭВМ // Тр. Ин-та теорет. астрономии АН СССР. 1978. № 17. С. 62—68.
6. *Сазонов В. В.* Периодические решения дифференциальных уравнений с большим параметром, описывающих движение обобщенно-консервативных механических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 56—65.
7. *Deprit A., Henrard J.* Natural families of periodic orbits // Astron. J. 1967. V. 72. № 2. P. 158—172.
8. *Сокольский А. Г., Хованский С. А.* О численном продолжении периодических решений лагранжевой системы с двумя степенями свободы // Космич. исследования. 1983. Т. 21. № 6. С. 851—860.
9. *Каримов С. Р., Сокольский А. Г.* Периодические движения, рождающиеся из короткопериодических либраций в окрестности лагранжевых решений // Письма в «Астрон. журн.». 1986. Т. 12. № 7. С. 566—574.
10. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
11. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972, 718 с.

Москва

Поступила в редакцию 24.V.1988