Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 531.36

КОНСТРУИРОВАНИЕ АГРЕГАТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ НОСИТЕЛЯ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Коноплев В. А.

В развитие полученных ранее результатов [1, 2] с использованием основных положений [3, 4] разрабатываются универсальные и экономичные алгоритмы конструирования агрегативных матричных моделей механики (кинематики, динамики и управления) носителя систем твердых тел со структурой дерева [5—10]. Рассматриваются ва варианта моделей: с учетом и без учета влияния движения носителя на относительное движение несомых тел.

Название моделей определяется тем, что на первом этапе их формирования конструируются динамические агрегаты (записанные в специальном виде уравнения динамики в квазискоростях) отдельных звеньев системы — одиночных твердых тел. Объединение полученных уравнений в матричной форме приводит к одному векторному уравнению движения системы тел под действием внешних сил, сил управления, трения и реакций в шарнирах. Умножением указанного уравнения на структурную матрицу, определяемую графом и мгновенной конфигурацией системы тел, находится уравнение движения носителя с учетом его влияния на относительное движение несомых тел.

Матричные коэффициенты полученных уравнений оказываются по определенному правилу (заданному графом системы) построенными из аналогичных матричных коэффициентов уравнений движения изолированных тел. Это делает указанные модели удобными для компьютерного конструирования как в символьной форме [11, 12], так и, независимо, в числовой форме по простому легко формализуемому и поэтому хорошо понятному для ЭВМ правилу. Рассмотренные модели учитывают произвольный класс кинематических пар несомых систем, наличие на телах динамически несбалансированных и асимметричных вращающихся маховиков, наличие инерционной внешней среды (в рамках потенциального обтекания).

1. Все построения выполняются с использованием следующих конструкций [1—4].

1°. Числовой комплект векторного пространства винтов H и группа его движений

$$L(H.6) = \{L_t^s : L_t^s = T_t^s[c_t^s];\ s, t \in N\}; \qquad L_t^s = L_{s+1}^s L_{s+2}^{s+1} \times \ldots \times L_t^{t-1}, \quad (L_t^s)^{-1} = L_s^t \tag{1.1}$$

Здесь и далее обозначения совпадают с введенными в [2, 3].

Группа $L(H.6)$ удобна для реализации на ЭВМ матричной формализации многократно повторяющихся операций преобразования плюккеровых координат винтов при переходе к новой системе координат: если X_s^s и X_t^t — один и тот же винт $X \in H$ в E_s и E_t, причем L_t^s: $E_s \to E_t$, то $X_s^s = L_t^s X_t^t$, $X_t^t = L_s^t X_s^s$.

2°. Уравнение кинематики на группе $L(H.6)$

$$L_t^{s\cdot} = L_t^s \Phi_t^{st}, \quad \Phi_t^{st} = \left\| \begin{matrix} \langle\omega_t^s\rangle^t & 0 \\ \langle\vartheta_t^s\rangle^t & \langle\omega_t^s\rangle^t \end{matrix} \right\| \tag{1.2}$$

Равенство (1.2) является удобной для реализации на ЭВМ матричной формализацией дифференцирования движений $L_t^s \in L(H.6)$

3°. Рекуррентные кинематические равенства

$$V_t^{st} = L_t^{s+1,\,T} V_{s+1}^{s.s+1} + V_t^{s+1.t}$$

$$\Phi_t^{st} = L_{s+1}^{t} \Phi_{s+1}^{s.s+1} L_t^{s+1} + \Phi_t^{s+1.t} \qquad (1.3)$$

$$L_{s+1}^{t},\ L_t^{s+1} \in L\,(H.\,6), \quad V_t^{st} = \| V_t^{st}, \omega_t^{st} \|^T$$

4°. Древовидный граф системы, ориентация которого определяется векторами конфигурации E_{lk} в $E_{\mu.k-1}$, $\mu \leqslant l$ (μ, l — номера стволов, k — номер уровня графов, для тела-носителя $l = 1$, $k = 1$)

$$\mathbf{r}^{lk} = \| s^{lk},\ \theta^{lk} \|^T \qquad (1.4)$$

где $s^{lk} = \| s_1^{lk}, s_2^{lk}, s_3^{lk} \|^T$ — вектор параллельного переноса E_{lk} в $E_{\mu.k-1}$ и базисе $[e^{\mu.k-1}]$; $\theta^{lk} = \| \theta_4^{lk},\ \theta_5^{lk},\ \theta_6^{lk} \|^T$ — вектор углов ориентации $[e^{lk}]$ в $[e^{\mu.k-1}]$.

В случае конструктивных (постоянных) переносов и поворотов вместо символов s и θ используются символы p и φ соответственно. Переменные координаты вектора (1.4) составляют вектор обобщенных координат $\mathbf{q}^{lk}$ кинематической пары ($\mu.\ k - 1$; lk), так что

$$\mathbf{r}^{lk\cdot} = \| f^{lk} \| \mathbf{q}^{lk\cdot} \qquad (1.5)$$

где $\| f^{lk} \| = \| \ldots \mid f_\beta^{lk} \mid \ldots \|$ — матрица $(6 \times \dim q^{lk})$, столбцы которой — шестимерные орты $f_\beta^{lk} \in R_6$ осей подвижности с единицей на β-месте, $\beta = 1, 2, \ldots, 6$.

5°. Структурная матрица системы

$$S_M = \| f \|^T M^T L \qquad (1.6)$$

$$\| f \| = \operatorname{diag}\,(\| f^{lk} \|), \quad M = \operatorname{diag}\,(M_{lk}^{\mu.k-1})$$

$$M_{lk}^{\mu.k-1} = \begin{Vmatrix} c_{lk}^{\mu.k-1,\,T} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{lk}^{\mu.k-1} \end{Vmatrix} \qquad (1.7)$$

$$c_{lk}^{\mu.k-1} = c_1\,(\theta_4^{lk})\, c_2\,(\theta_5^{lk})\, c_3\,(\theta_6^{lk}) \qquad (1.8)$$

$$\varepsilon_{lk}^{\mu.k-1} = \| c_3^T\,(\theta_6^{lk})\, c_2^T\,(\theta_5^{lk})\, e_1^{lk} \mid c_3^T\,(\theta_6^{lk})\, e_2^{lk} \mid e_3^{lk} \| \qquad (1.9)$$

$$c_i\,(\theta_\alpha^{lk}) = E + \langle e_i^{lk} \rangle \sin\theta_\alpha^{lk} + \langle e_i^{lk} \rangle^2 (1 - \cos\theta_\alpha^{lk}) \qquad (1.10)$$

Здесь $c_{lk}^{\mu.k-1}$ — матрица вращения $[e^{\mu.k-1}] \to [e^{lk}]$; $\varepsilon_{lk}^{\mu.k-1}$ — матрица из кинематических уравнений Эйлера, $\omega_{lk}^{\mu.k-1;\,lk} = \varepsilon_{lk}^{\mu.k-1} \theta^{lk\cdot}$; $c_i\,(\theta_\alpha^{lk})$ — матрица (3×3) простейшего вращения с ортом e_i^{lk} на угол θ_α; $i = 1, 2, 3$; $\alpha = 4, 5, 6$; L — блочная верхнетреугольная матрица $(6m \times 6m)$ с блоками (6×6) вида

$$\begin{aligned} &L_{lk}^{st} \in L\,(H.\,6), \text{ если } (lk) \in (st)_+ \\ &0, \text{ если } (lk) \notin (st)_+ \end{aligned} \qquad (1.11)$$

на пересечении (st)-матричных $(6 \times 6m)$ строк и (lk)-матричных $(6m \times 6)$ столбцов; m — количество твердых тел в системе; $(\cdot)_+$ — множество достижимости элемента $(\cdot)$ графа.

Блоками матрицы S_M являются либо нулевые числовые строки (1×6), либо строки той же размерности вида

$$s_{lk}^{st-\alpha} = f_\alpha^{st,\,T} M_{st}^{\mu.t-1,\,T} L_{lk}^{st} \qquad (1.12)$$

Любой винт X_{lk}^{lk} действием указанной строки последовательно преобразуется из E_{lk} в E_{st}, из E_{st} в систему обобщенных координат q^{st} и затем умножением на орт $f_\alpha^{st,T} \in R_6$ проектируется на α-направление этой системы координат, $\alpha = 1, 2, \ldots, 6$.

2. Динамический агрегат одиночного твердого тела — элемента системы, перемещающегося в инерционной жидкости и несущего на себе динамически несбалансированные ($\langle r_c{}^{lk}\rangle^{lk} \neq 0$ в матрице Мизеса $\Theta_{lk}{}^{lk}$) и асимметричные ($\theta_{11}{}^{lk} \neq \theta_{22}{}^{lk}$ в матрице $\Theta_{lk}{}^{lk}$),— записывается в виде [2]

$$A_{lk}^{lk} V_{lk}^{10.lk*} + B_{lk}^{lk} V_{lk}^{10.lk} = F_{lk}^{lk} \tag{2.1}$$

$$A_{lk}^{lk} = \Theta_{lk}^{lk} + \Sigma_{s=1}^{m_{lk}} L_s^{lk} \Theta_s{}^s L_s^{lk,T} + \Lambda_{lk}^{lk}$$

$$B_{lk}^{lk} = \Phi_{lk}^{10.lk} A_{lk}^{lk} + A_{lk}^{lk*}$$

$$A_{lk}^{lk*} = \Sigma_{s=1}^{m_{lk}} L_s^{lk} ([\langle e_3{}^s\rangle]\, \Theta_s^{lk} - \Theta_s^{lk} [\langle e_3{}^s\rangle])\, L_s^{lk,T} \psi_s^{lk\cdot}$$

$$F_{lk}^{lk} = T_{lk}^{lk} + R_{lk}^{lk} + U_{lk}^{lk} + N_{lk}^{lk}$$

$$T_{lk}^{lk} = P_{lk}^{lk} + \Sigma_{s=1}^{m_{kl}} L_s^{lk} P_s{}^s - \Sigma_{s=1}^{m_{lk}} (I_s^{lk} \psi_s^{lk\cdot\cdot} + J_s^{lk} \psi_s^{lk\cdot})$$

$$R_{lk}^{lk} = R_{lk}^{lk}(\mu.k-1; lk) - L_{\nu.k+1}^{lk} R_{\nu.k+1}^{\nu.k+1}(lk; \nu.k+1)$$

$$U_{lk}^{lk} = U_{lk}^{lk}(\mu.k-1; lk) - L_{\nu.k+1}^{lk} U_{\nu.k+1}^{\nu.k+1}(lk; \nu.k+1)$$

$$N_{lk}^{lk} = N_{lk}^{lk}(\mu.k-1; lk) - L_{\nu.k+1}^{lk} N_{\nu.k+1}^{\nu.k+1}(lk; \nu.k+1)$$

В уравнении (2.1) $L_s{}^{lk} \in L$ (*Н*. 6) — матрица перехода от E_{lk} к системе координат E_s, неподвижно связанной с *s*-маховиком, установленным на (*lk*)-звене в силовом модуле, управляющим изменением обобщенной $q_\beta{}^{lk}$ координаты (ν, $k+1$)-звена ($\nu \geqslant l$), $\Theta_s{}^{lk}$, $e_3{}^s$, $\psi_s{}^{lk}$ — матрица Мизеса, орт оси вращения и угловая скорость вращения этого маховика; m_{lk} — количество маховиков, установленных на (*lk*)-теле для управления изменением координаты $q_\beta{}^{\nu.k+1}$; $R_{lk}{}^{lk}$ (μ. $k-1$; lk); $U_{lk}{}^{lk}$ (μ. $k-1$; lk), $N_{lk}{}^{lk}$ (μ. $k-1$; lk) — динамические винты реакций, управляющих усилий и усилий трения, передаваемых с (μ. $k-1$)-звена на (*lk*)-вено в E_{lk}.

Объединением равенств (2.1) (для всех (*lk*) индексов системы) находится матричное уравнение движения системы тел под действием внешних сил, сил реакций в шарнирах, усилий управления и трения

$$A\mathbf{V}^* + B\mathbf{V} = \mathbf{F} \tag{2.2}$$

$$A = \operatorname{diag}(A_{lk}{}^{lk}), \quad B = \operatorname{diag}(B_{lk}{}^{lk})$$

$$\mathbf{F} = \|\ldots, F_{lk}^{lk}, \ldots, \|^T = \mathbf{T} + \mathbf{R} + \mathbf{U} + \mathbf{N}$$

$$\mathbf{V} = \|\ldots, V_{lk}^{10.lk}, \ldots\|^T$$

$$\mathbf{T} = \|\ldots, T_{lk}^{lk}, \ldots, \|^T, \quad \mathbf{R} = \|\ldots, R_{lk}^{lk}, \ldots\|^T$$

$$\mathbf{U} = \|\ldots, U_{lk}^{lk}, \ldots\|^T, \quad \mathbf{N} = \|\ldots, N_{lk}^{lk}, \ldots\|^T$$

Уравнение движения носителя в квазискоростях с учетом влияния его движения на относительное движение несомых тел получается умножением равенства (2.2) слева на структурную матрицу S_M (1.6)

$$S_M A\mathbf{V}^* + S_M B\mathbf{V} = S_M \mathbf{T} + \mathbf{u} + \mathbf{n}$$

$$S_M \mathbf{R} = 0, \quad S_M \mathbf{U} = \mathbf{u}, \quad S_M \mathbf{N} = \mathbf{n} \tag{2.3}$$

$$\mathbf{u} = \|\ldots, u_\alpha{}^{st}, \ldots\|^T, \quad \mathbf{n} = \|\ldots, n_\alpha{}^{st}, \ldots\|^T$$

($u_\alpha{}^{st}$, $n_\alpha{}^{st}$ — усилия управления и трения, передаваемые на (*st*)-тело по α-координате).

С использованием равенства (1.4) получается кинематический агрегат системы тел

$$\mathbf{V} = S_M^T \mathbf{q}^{\cdot}, \quad \mathbf{q}^{\cdot} = \|\ldots, \mathbf{q}^{lk\cdot}, \ldots\|^T \tag{2.4}$$

дифференцирование которого дает

$$\mathbf{V}^* = S_M^T \mathbf{q}^{\cdot\cdot} + S_M^{T^\cdot} \mathbf{q}^\cdot$$

$$S_M{}^{T^\cdot} = (L^{T^\cdot} M + L^T M^\cdot) \| f \| \tag{2.5}$$

где звездочка обозначает производную в связанных системах координат.

Матрицы $L^\cdot$ и $M^\cdot$ получаются из матриц L и M заменой блоков $L_{lk}{}^{st}$ на $L_{lk}{}^{st^\cdot} = L_{lk}{}^{st} \Phi_{lk}{}^{st.lk}$ (1.2) и $M_{lk}{}^{\mu.k-1}$ (1.7) на $M_{lk}{}^{\mu.lk^\cdot}$, причем

$$M_{lk}^{\mu.k-1^\cdot} = \left\| \begin{matrix} \langle \omega_{lk}^{\mu.k-1} \rangle^{lk,\,T} c_{lk}^{\mu.k-1,\,T} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{lk}^{\mu.k-1^\cdot} \end{matrix} \right\| \tag{2.6}$$

$$\varepsilon_{lk}^{\mu.k-1^\cdot} = \| (\langle e_3^{lk} \rangle^T c_3{}^T (\theta_6^{lk}) c_2{}^T (\theta_5^{lk}) \theta_6^{lk^\cdot} +$$

$$+ c_3{}^T (\theta_6^{lk}) c_2{}^T (\theta_5^{lk}) \langle e_2^{lk} \rangle^T \theta_5^{lk^\cdot}) e_1^{lk} \,|$$

$$| \langle e_3^{lk} \rangle^T c_3 (\theta_6^{lk}) \theta_6^{lk^\cdot} e_2^{lk} \,|\, 0 \,\|$$

При получении равенств (2.6) используется уравнение Пуассона $c_p{}^{p-1^\cdot} = c_p{}^{p-1} \langle \omega_p{}^{p-1} \rangle^p = \langle \omega_p{}^{p-1} \rangle^p c_p{}^{p-1}$ при условии, что $c_p{}^{p-1}$ — матрица (3×3) простейшего вращения (1.10).

Подстановка соотношений (2.4), (2.5) в (2.3) приводит к уравнению движения носителя, записанного с учетом влияния его движения на относительное движение несомых тел в обобщенных координатах

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \mathbf{q}^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot) \mathbf{q}^\cdot = S_M \mathbf{T} + \mathbf{u} + \mathbf{n} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{A}\,(q) = S_M^T \mathbf{A} S_M{}^T \tag{2.8}$$

$$\mathbf{B}\,(q, q^\cdot) = S_M \mathbf{B} S_M{}^T + S_M \mathbf{A} S_M{}^{T^\cdot}$$

Согласно (2.7) и (2.8), матрицы $\mathbf{A}\,(\mathbf{q})$ и $\mathbf{B}\,(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)$ произвольной системы тел со структурой дерева синтезируются из аналогичных матриц $A_{lk}{}^{lk}$, $B_{lk}{}^{lk}$ составляющих ее тел при помощи структурной матрицы S_M и ее производной $S_M{}^\cdot$.

Если все несомые системы составлены из кинематических пар пятого класса, то матричные коэффициенты в (2.7) принимают вид (в силу $M_{lk}{}^{\mu.k-1} \| f^{lk} \| \equiv M_{lk}{}^{\mu.k-1} f_\beta{}^{lk} \equiv f_\beta{}^{lk}$, $M_{lk}{}^{\mu.k-1^\cdot} f_\beta{}^{lk} \equiv 0$, $lk \neq 11$)

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{q}) = SAS^T M_{11}, \quad S = \| f \|^T L$$

$$\mathbf{B}\,(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot) = SBS^T M_{11} + SAS_M{}^{T^\cdot} \tag{2.9}$$

$$S_M{}^{T^\cdot} = S^{T^\cdot} M_{11} + S^T M_{11}{}^\cdot$$

$$M_{11} = \| f \|^T M \| f \|, \quad M_{11}{}^\cdot = \| f \|^T M^\cdot \| f \|$$

Блочно-диагональные матрицы M_{11}, $M_{11}{}^\cdot$ имеют верхними левыми блоками (6×6) матрицы $M_{11}{}^{10}$ и $M_{11}{}^{10}$. На остальных местах главных диагоналей стоят скалярные единицы и нули.

Формулы (2.8) и (2.9) определяют матрицы $\mathbf{A}\,(\mathbf{q})$ и $\mathbf{B}\,(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)$ в уравнениях (2.7) в виде произведения блочных матриц. Во многих задачах эти матрицы удобнее определять алгоритмами конструирования их элементов, стоящих на пересечении $(st - \alpha)$-строк и $(lk - \beta)$-столбцов

$$A_{lk-\beta}^{st-\alpha} = \sum_{p \in (st,\, lk)_+} s_p^{st-\alpha} A_p{}^p s_p^{lk-\beta,\,T} \tag{2.10}$$

$$B_{lk-\beta}^{st-\alpha} = \sum_{p \in (st,\, lk)_+} (s_p^{st-\alpha} A_p{}^p c_p^{lk-\beta} + s_p^{st-\alpha} K_p^{lk.p} s_p^{lk-\beta,\,T}) \tag{2.11}$$

$$s_p^{st-\alpha} = f_\alpha^{st,\,T} M_{st}^{\mu.t-1} L_p{}^{st}, \quad c_p^{lk-\beta} = L_p^{lk,\,T} M_{lk}^{\mu.k-1^\cdot} f_\beta^{lk}$$

$$K_p^{lk.p} = B_p{}^p + A_p{}^p \Phi_p^{lk.p,\,T}, \quad (st, lk)_+ = (st)_+ \cap (lk)_+$$

$$A_{lk-\beta}^{st-\alpha} = B_{lk-\beta}^{st-\alpha} = 0, \quad (st, lk)_+ = \varnothing$$

Для системы несомых тел ($lk \neq 11$), состоящих из кинематических пар пятого класса, получается

$$
\begin{aligned}
A^{st-\alpha}_{lk-\beta} &= \sum_{p \in (st,\, lk)_+} s_p^{st-\alpha} A_p{}^p s_p^{lk-\beta,\, T} \\
B^{st-\alpha}_{lk-\beta} &= \sum_{p \in (st,\, lk)_+} s_p^{st-\alpha} K_p^{lk.p} s_p^{lk-\beta,\, T}
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

3. Из уравнения (2.7) с использованием равенств (2.10), (2.11) получаются матричные уравнения движения носителя без учета влияния его движения на движение несомых тел.

Указанными уравнениями являются шесть первых скалярных равенств из (2.7), записанные в матричной форме при условии, что $\| f^{11} \| \equiv E$ — единичная матрица (6×6), $u^{11} = 0$, $n^{11} = 0$, после сокращения на общий для всех слагаемых левосторонний сомножитель $M_{11}{}^{10,T}$ ($\det M_{11}{}^{10} \neq \neq 0$)

$$
\mathbf{A}(\mathbf{q}, \gamma)\, \mathbf{q}^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \gamma, \mathbf{q}^{\cdot}, \gamma^{\cdot})\, \mathbf{q}^{\cdot} + \mathbf{I}(\mathbf{q}, \gamma)\, \gamma^{\cdot\cdot} + \mathbf{J}(\mathbf{q}, \gamma, \mathbf{q}^{\cdot}, \gamma^{\cdot})\, \gamma^{\cdot} = L_+{}^{11}\mathbf{T} \tag{3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}(\mathbf{q}, \gamma) = A_+{}^{11} M_{11}{}^{10} \\
&B(\mathbf{q}, \gamma, \mathbf{q}^{\cdot}, \gamma^{\cdot}) = K_+{}^{11} M_{11}{}^{10} + A_+{}^{11} M_{11}^{10^{\cdot}} \\
&\mathbf{I}(\mathbf{q}, \gamma) = \| \ldots | I_\beta^{lk} | \ldots \|, \quad \mathbf{J}(\mathbf{q}, \gamma, \mathbf{q}^{\cdot}, \gamma^{\cdot}) = \| \ldots | J_\beta^{lk} | \ldots \| \\
&I_\beta^{lk} = L_{lk}^{11} A_+^{lk} M_{lk}^{\mu.k-1} f_\beta^{lk} \\
&J_\beta^{lk} = L_{lk}^{11} (K_+^{lk} M_{lk}^{\mu.k-1} + A_+^{lk} M_{lk}^{\mu.k-1^{\cdot}})\, f_\beta^{lk} \\
&A_+^{lk} = \sum_{p \in (lk)_+} L_p^{lk} A_p{}^p L_p^{lk,\, T}, \quad K_p^{lk.p} = B_p{}^p + A_p{}^p \Phi_p^{lk.p,\, T} \\
&K_+^{lk} = \sum_{p \in (lk)_+} L_p^{lk} K_p^{lk.p} L_p^{lk,\, T} \\
&L_+{}^{11} = \| E \,|\, L_{12}{}^{11} \,|\, L_{13}{}^{11} \,|\, \ldots \| \\
&\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}^{11}, \quad \gamma \equiv \mathbf{q}_+{}^{12} = \| \mathbf{q}^{12}, \mathbf{q}^{13}, \ldots \|^T
\end{aligned}
$$

С использованием второго равенства (1.3) матрицу $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \gamma, \mathbf{q}^{\cdot}, \gamma^{\cdot})$ в (3.1) можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{q}, \gamma, \mathbf{q}^{\cdot}, \gamma^{\cdot}) &= \Phi_{11}^{10.11} A_+{}^{11} M_{11}{}^{10} + A_+{}^{11} M_{11}^{10^{\cdot}} + \\
&+ \sum_{p \in (11)_+} L_p{}^{11} (\Phi_p^{11.p} A_p{}^p + A_p{}^p \Phi_p^{11.p,\, T} + A_p^{p*})\, L_p^{11,\, T} M_{11}{}^{10}
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Для несомых систем тел с кинематическими парами пятого класса запись матричных коэффициентов упрощается

$$
I_\beta^{lk} = L_{lk}^{11} A_+^{lk} f_\beta^{lk}, \quad J_\beta^{lk} = L_{lk}^{11} K_+^{lk} f_\beta^{lk} \tag{3.3}
$$

Заметим, что равенство (3.1) — принципиально новое уравнение движения носителя, более простое, чем уравнение Лагранжа второго рода (матрица $\mathbf{A}(\mathbf{q}, \gamma)$ — не является матрицей кинетической энергии «застывшей» системы, имеющей вид $\mathbf{A}(\mathbf{q}, \gamma) = M_{11}{}^{10,T} A_+{}^{11} M_{11}{}^{10}$; вектор $L_+{}^{11}\mathbf{T}$ не является вектором обобщенных сил, отнесенных к координатам $\mathbf{q}$, имеющим вид $M_{11}{}^{10,T} L_+{}^{11}\mathbf{T}$).

При выводе уравнения (3.1) индексами были перенумерованы тела системы. Можно этими же индексами перенумеровать системы координат, участвующие только в одном простейшем движении (переносе или вращении), введя для соответствующих индексов фиктивные безынерционные тела. В этом случае коэффициенты $I_\beta{}^{lk}$ и $J_\beta{}^{lk}$ для несомых систем тел с кинематическими парами произвольного класса будут вычисляться также по простым формулам (3.3). Целесообразность выбора указанных систем координат не очевидна. С одной стороны, алгоритмы из (3.1) принимают более простой вид (3.3), что облегчает задачу программирования, с другой — возрастает количество матричных сомножителей в матрицах $L_p{}^{p-1} \in L$ (H.6) и, следовательно, в матрицах $A_+{}^{lk}$ и $K_+{}^{lk}$. В каждом частном случае (структура графа, количество кинематических пар произвольного класса) вопрос требует отдельного исследования.

4. С помощью уравнения (3.1) можно решать прямые и обратные задачи динамики носителя.

1°. Задано относительное движение несомой системы $\gamma = \gamma(t)$, $\gamma^{\cdot} = \gamma^{\cdot}(t)$, $\gamma^{\cdot\cdot} = \gamma^{\cdot\cdot}(t)$. Движение носителя $\mathbf{q}(t)$ находится интегрированием уравнения

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, \gamma(t))\,\mathbf{q}^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \gamma(t), \mathbf{q}^{\cdot}, \gamma^{\cdot}(t))\,\mathbf{q}^{\cdot} = L_+{}^{11}\mathbf{T} - \mathbf{I}(\mathbf{q}, \gamma(t))\,\gamma^{\cdot\cdot}(t) - \mathbf{J}(\mathbf{q}, \gamma(t), \mathbf{q}^{\cdot}, \gamma^{\cdot}(t))\,\gamma^{\cdot}(t) \qquad (3.4)$$

2°. Задано движение носителя $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{q}^{\cdot}(t)$ и $\mathbf{q}^{\cdot\cdot}(t)$. Класс относительных движений несомой системы тел, обеспечивающих указанное движение носителя (если он существует), находится с помощью уравнения

$$\mathbf{I}(\mathbf{q}(t), \gamma)\,\gamma^{\cdot\cdot} + \mathbf{J}(\mathbf{q}(t), \gamma, \mathbf{q}^{\cdot}(t), \gamma^{\cdot})\,\gamma^{\cdot} = L_+{}^{11}\,\mathbf{T} - \mathbf{A}(\mathbf{q}(t), \gamma)\,\mathbf{q}^{\cdot\cdot}(t) - \mathbf{B}(\mathbf{q}(t), \gamma, \mathbf{q}^{\cdot}(t), \gamma^{\cdot})\,\mathbf{q}^{\cdot}(t)$$

Если $\xi = \dim \gamma > 6$, то, разбив координаты вектора γ на шесть зависимых $\gamma_+ \in R_6$ и $\xi - 6$ независимых $\gamma_- \in R_{\xi-6}$, т. е. $\gamma = \| \gamma_+, \gamma_- \|^T$, можно сформулировать задачу оптимального управления (аналогично (13) в [2]). Можно поставить задачу определения массово-инерционных характеристик несомых систем или их структуры, необходимых для решения задачи управления.

5. Эффективность агрегативных моделей механики носителя систем твердых тел со структурой дерева и алгоритмов их компьютерного конструирования обеспечивается следующим.

1°. Не требуется затрат труда и времени на конструирование символьных выражений для кинетической и потенциальной энергий, функций Гаусса, Аппеля и т. п.

2°. В коэффициентах моделей не используются операторы дифференцирования (матрицы Якоби, гессианы, трехиндексные символы Больцмана, символы Кристоффеля первого и второго рода и т. п.), что позволяет при их символьном конструировании обойтись без использования дифференцирующих модулей систем аналитических вычислений.

3°. Алгоритмы универсальны: позволяют независимо конструировать символьные и числовые формы моделей механики носителя.

4°. Использование полученных алгоритмов сводит задачу конструирования уравнений (2.7) и (3.1) к независимому (последовательному или параллельному) формированию элементов их матричных коэффициентов. Это позволяет при символьном конструировании выполнять указанные действия последовательно с использованием одного и того же небольшого массива оперативной памяти ЭВМ при условии вывода на печать (или записи во внешнюю память) промежуточных результатов, а при числовом конструировании — сокращать время работы за счет распараллеливания вычислений.

5°. Символьные или числовые координаты векторов квазискоростей $V_p{}^{op}$, $V_p^{lk.p}$, используемые в алгоритмах для формирования матриц $\Phi_p{}^{op}$ и $\Phi_p^{lk.p}$, получаются при помощи одного экономичного рекуррентного алгоритма (1.3) или формулы (2.4).

6°. Операции умножения матриц (6×6) на столбцы (6×1) и строки (1×6) во всех слагаемых уравнений (2.7) и (3.1) распадаются на операции умножения матриц (3×3) на векторы (3×1) или (1×3) при условии, что эти матрицы принадлежат одному из четырех типов, не считая диагональных (три простейшие матрицы вращения и кососимметрическая). Это позволяет сочетать глубокую матричную формализацию моделей, удобную для использования алгебраических модулей систем аналитических вычислений с экономичным (в смысле вычислений) представлением указанных выше операций. Для этого достаточно ввести четыре вычислительных алгоритма, реализующих указанные операции в виде бинарных операций на R_3

$$
\begin{aligned}
c_1(\theta)\,x &= \| x_1,\ x_2\cos\theta - x_3\sin\theta,\ x_2\sin\theta + x_3\cos\theta \|^T \\
c_2(\theta)\,x &= \| x_1\cos\theta + x_3\sin\theta,\ x_2,\ x_3\cos\theta - x_1\sin\theta \|^T \\
c_3(\theta)\,x &= \| x_1\cos\theta - x_2\sin\theta,\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta,\ x_3 \|^T \\
\langle y\rangle\,x &= \| x_3y_2 - x_2y_3,\ x_1y_3 - x_3y_1,\ x_2y_1 - x_1y_2 \|^T
\end{aligned}
$$

что исключает необходимость обращения к двумерным массивам и выполнения операций с нулями.

7°. Алгоритмы просты в исполнении и, следовательно, доступны широкому кругу специалистов.

6. Пример. Для космического аппарата (11), несущего антенну (12) на шаровом шарнире и трехзвенный манипулятор (22), (23), (24) без учета вращающихся маховиков, согласно формуле (1.4), имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r}^{11} \equiv \mathbf{q}^{11} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{r}^{12} = \| p_1{}^{12}, p_2{}^{12}, p_3{}^{12}, \theta_4{}^{12}, \theta_5{}^{12}, \\
&\theta_6{}^{12} \|^T, \ \mathbf{r}^{22} = \| p_1{}^{22}, p_2{}^{22}, p_3{}^{22}, \theta_4{}^{22}, 0, 0 \|^T \\
&\mathbf{r}^{23} = \| 0, 0, 0, 0, \theta_5{}^{23}, 0 \|^T \\
&\mathbf{r}^{24} = \| 0, 0, 0, 0, 0, \theta_6{}^{24} \|^T
\end{aligned}
$$

Матричные коэффициенты в (3.1) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{I}(\mathbf{q}, \gamma) = \| I_4{}^{12} \mid I_5{}^{12} \mid I_6{}^{12} \mid I_4{}^{22} \mid I_5{}^{23} \mid I_6{}^{24} \| \\
&\mathbf{J}(\mathbf{q}, \gamma, \mathbf{q}^{\cdot}, \gamma^{\cdot}) = \| J_4{}^{12} \mid J_5{}^{12} \mid J_6{}^{12} \mid I_4{}^{22} \mid I_5{}^{23} \mid I_6{}^{24} \| \\
&I_\beta{}^{lk} = L_{lk}{}^{11} A_+{}^{lk} M_{lk}{}^{\mu.\,k-1} f_\beta{}^{lk}, \quad M_{lk}{}^{\mu.\,k-1} f_\beta{}^{lk} \equiv f_\beta{}^{lk}, \quad lk \neq 12 \\
&J_\beta{}^{12} = L_{12}{}^{11} (K_+{}^{12} M_{12}{}^{11} + A_+{}^{12} M_{12}{}^{11\cdot}) f_\beta{}^{12} \\
&J_\beta{}^{lk} = L_{lk}{}^{11} K_+{}^{lk} f_\beta{}^{lk}\ ; \quad \beta = 4, 5, 6; \qquad lk = 22, 23, 24 \\
&A_+{}^{24} = \Theta_{24}{}^{24}, \quad A_+{}^{23} = \Theta_{23}{}^{23} + L_{24}{}^{23} \Theta_{24}{}^{24} L_{24}{}^{23,T}
\end{aligned}
$$

и т. д.; $K_+{}^{24} = K_{24}{}^{24.24}, \quad K_+{}^{23} = K_{23}{}^{23.23} + L_{24}{}^{23} K_{24}{}^{24.24} L_{24}{}^{23,\,T}$ и т. д.;

$$
\begin{aligned}
&K_{lk}{}^{st.lk} = B_{lk}{}^{lk} + A_{lk}{}^{lk} \Phi_{lk}{}^{st.lk,T}; \ lk = 22, 23, 24, \qquad st = 11, 22 \\
&K_{lk.}{}^{lk.lk} = B_{lk}{}^{lk}; \quad lk = 11, 22, 23, 24.
\end{aligned}
$$

Матрицы $\Phi_{lk}{}^{st.lk}$ ($st = 11, 22, 23;\ lk = 12, 22, 23, 24$) конструируются из координат векторов (1.4):

$$
\begin{aligned}
&V_{12}^{11.12} = M_{12}{}^{11} \| f_4{}^{12} \mid f_5{}^{12} \mid f_6{}^{12} \| \, \| \theta_4^{12\cdot}, \theta_5^{12\cdot}, \theta_6^{12\cdot} \|^T \\
&V_{22}^{11.22} = M_{22}{}^{11} f_4{}^{22} \theta_4^{22\cdot}, \ V_{23}^{11,23} = L_{23}^{22,\,T} V_{22}^{11.22} + f_5{}^{23} \theta_5^{23\cdot}, \ldots, V_{24}^{23.24} = f_6{}^{24} \theta_6^{24\cdot}
\end{aligned}
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коноплев В. А.* Декомпозиция и конструирование агрегативных моделей функционирования больших управляемых систем жестких твердых тел со структурой дерева // Тез. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. Ташкент.: Нац. ком-т по теор. и прикл. механике. 1986. С. 365.
2. *Коноплев В. А.* Уравнения движения носителя динамически несбалансированных и асимметричных маховиков в инерционной среде // Прикладная математика и механика 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 763—766.
3. *Коноплев В. А.* Группа движений векторного пространства винтов и уравнение кинематики на ней // Изв. вузов. Математика. 1985. № 12. С. 48—51.
4. *Юань М., Фрейденштейн Ф.* Кинематический анализ пространственных механизмов с помощью винтовых координат. Винтовые координаты // Конструирование и технология машиностроения. 1971. Том 93. № 1. С. 57—63.
5. *Коноплев В. А.* Динамика судна с подвижными частями // Динамические нагрузки и прочность судовых конструкций. Л.: Ленингр. кораблестроит. ин-т, 1984. С. 70—75.

6. *Коноплев В. А.* Динамика летательного аппарата с подвижными частями // Сб. научн. тр. ЛИАП. 1984. Вып. 173. С. 154—159.
7. *Охоцимский Д. Е., Голубев Ю. Ф.* Механика управляемого движения шагающего аппарата. М.: Наука, 1984. 312 с.
8. *Коноплев В. А.* Управление зеркалом обзорно-информационной системы транспортного робота // Изв. вузов. Приборостроение. 1985. Т. 28. № 5. С. 48—51.
9. *Безбородов В. Г., Жаков А. М.* Суда космической службы. Л.: Судостроение. 1980. 246 с.
10. *Коноплев В. А.* Матричные формы уравнений движения носителей роботов-манипуляторов // Тез. докл. 3-го Всесоюз. совещ. по робототехническим системам. Воронеж. Воронеж. политехн. ин-т. 1984. С. 57—58.
11. *Герд В. П., Тарасов О. В., Широков А. В.* Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике // Успехи математических наук. 1980. Т. 130. Вып. 1. С. 113—147.
12. *Грошева М. В., Ефимов Г. Б., Брумберг В. А. и др.* Системы аналитических вычислений на ЭВМ: Аналитические пакеты прикладных программ. М.: Изд-е ин-та прикл. математики АН СССР, 1983. 85 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.IV.1988