Следствие. Заключение теоремы остается справедливым, если функция $Q(t, z)$ удовлетворяет условию A_2 относительно x при выполнении остальных условий теоремы. Так, например, это условие выполняется, если справедливо одно из соотношений

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0, \quad \int^{\infty} g(t)\, dt < \infty$$

Отметим, что при $m = 0$, $R \equiv 0$ результат теоремы получен в работе [8], а в случае $m = 0$, $Q \equiv 0$ теорема доказана в [9].

3. В качестве примера приложения доказанной теоремы рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2), где $n = 2$, $m = 1$, $X_1 = -x_1^3$, $X_2 = -x_2^3$, $Y = x_1x_2 \sin y$, $R_1^{(1)} = x_2 \cos t^2$, $R_2^{(1)} = x_1 \sin t^2$, $R^{(2)} = x_2 \operatorname{arctg} y \sin t^3$, $Q_1^{(1)} = 0$, $Q_2^{(1)} = x_1 (1 + t\, |\, x_2\, |)^{-1}$, $Q^{(2)} = 0$. Для доказательства равномерной асимптотической x-устойчивости нулевого решения системы (1.1) можно воспользоваться функцией Ляпунова $v = x_1^2 + x_2^2$; справедливость условия A_1 относительно x для функции Q и выполнимость предельных соотношений (2.2) также проверяется элементарно. Следовательно, тривиальное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y = 0$ уравнений (1.2) равномерно асимптотически x-устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Corduneanu C.* Sur. la stabilite partielle // Rev. Roumain. Math. Pure et Appl. 1964. V. 9. № 3. P. 229—236.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., астрон., физ., хим. 1957. № 4. С. 9—16.
3. *Озиранер А. С.* К вопросу об устойчивости движения относительно части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1971. № 1. С. 92—100.
4. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364—384.
5. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 138—143.
6. *Андреев А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости по части переменных // Докл. АН УзССР. 1982. № 5. С. 9—12.
7. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
8. *Strauss A., Yorke J. A.* Perturbation theorems for ordinary differential equations // J. Different. Equat. 1967. V. 3. № 1. P. 15—30.
9. *Игнатьев А. О.* Об асимптотической устойчивости одного класса неавтономных систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2161—2163.

Донецк

Поступила в редакцию
11.II.1988

УДК 531.36 + 62—650

О НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТИЧНО НАБЛЮДАЕМЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ ВОЛЬТЕРРЫ

Шайхет Л. Е.

Предлагается новый метод решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления частично наблюдаемым случайным процессом Вольтерры.

Метод основан на возможности представления и оптимальной оценки и оптимального управления в виде интегралов по наблюдаемому процессу. Подынтегральные функции при этом неслучайны и определяются некоторой системой интегральных уравнений, которая может быть заранее решена численно. Оптимальное управление строится непосредственно по наблюдениям. Приводится пример, демонстрирующий возможность практической реализации этого метода на ЭВМ.

Интегральные уравнения Вольтерры возникли впервые в теории ползучести и составляют основу этой теории [1, 2]. Они включают в себя довольно общий класс уравнений с последействием [3—5], которые играют важную роль в теории управления и различных ее приложениях. Теория оптимального управления уравнениями Вольтерры является естественным развитием теории управляемых дифференциальных уравнений. В настоящее время наблюдается интенсивное развитие теории фильтрации и оптимального управления для стохастических интегральных уравнений. Классическое решение поставленной задачи в соответствии с «принципом разделения» [6, 7] сводится к решению задачи оптимальной фильтрации и задачи оптимального управления по полным данным для некоторой вспомогательной управляемой системы. При этом оптимальное управление исходной задачи получается [8] в виде линейного функционала от оптимальной (в среднеквадратическом смысле) оценки оптимальной траектории движения, которая в свою очередь является решением системы стохастических интегральных уравнений. Таким образом, для построения оптимального управления в каждый момент времени t необходимо решать систему стохастических интегральных уравнений на отрезке $[0, t]$.

1. Пусть $\{\Omega, \sigma, P\}$ — вероятностное пространство, $\{f_t, t \in [0, T]\}$ — поток σ-алгебр, $f_t \subset \sigma$, $(x(t), y(t))$ — частично наблюдаемый случайный процесс, заданный уравнениями

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (a_0(t, s)\, u(s) + a_1(t, s)\, x(s))\, ds + \int_0^t b(t, s)\, dw_1(s) \tag{1.1}$$

$$dy(t) = A(t)\, x(t-h)\, dt + B(t)\, dw_2(t), \quad x(s) = 0, \quad s < 0 \tag{1.2}$$

$$h \geqslant 0, \quad x(t) \in R^n, \quad y(t) \in R^m, \quad u(t) \in R^l, \quad \mathrm{M}x_0 = 0, \quad \mathrm{M}x_0 x_0' = D_0,$$

Здесь $y(t)$ — наблюдаемый процесс, $x(t)$ — ненаблюдаемый, $u(t)$ — управление, $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — f-измеримые независимые между собой винеровские процессы размерности k_1 и k_2 соответственно, x_0 — гауссовская случайная величина, не зависящая от $w_1(t)$ и $w_2(t)$. Коэффициенты уравнений имеют соответствующие размерности, неслучайны, кусочно-непрерывны. Цель управления — минимизация функционала

$$J(u) = \mathrm{M}\left[x'(T)\, Fx(T) + \int_0^T u'(t)\, N(t)\, u(t)\, dt\right] \tag{1.3}$$

Здесь $N(t)$ — кусочно-непрерывная, равномерно по t положительно определенная, а F — неотрицательно определенная неслучайные матрицы, штрих — знак транспонирования.

Пусть f_t^y — минимальная σ-алгебра, порожденная процессом $y(s)$, $s \leqslant t$, $\mathrm{M}_t^y = \mathrm{M}\{\cdot / f_t^y\}$.

Допустимым управлением будем называть произвольный f_t^y-измеримый процесс $u(t)$, для которого система уравнений (1.1), (1.2) имеет решение и $J(u) < \infty$.

Лемма 1. Оптимальное управление задачи (1.1)—(1.3) представимо в виде

$$u_0(\tau) = \int_0^\tau Q_0(\tau, s)\, dy_0(s) \tag{1.4}$$

где $Q_0(\tau, s)$ — неслучайная матрица, $y_0(s)$ — решение системы (1.1), (1,2) при $u = u_0$.

Доказательство. Пусть $R_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $a_1(t, \tau)$. Тогда

$$R_1(t, \tau) = a_1(t, \tau) + \int_\tau^t R_1(t, s)\, a_1(s, \tau)\, ds \tag{1.5}$$

Положим

$$\psi_1(T, \tau, a_0(\cdot, \tau)) = a_0(T, \tau) + \int_\tau^T R_1(T, s)\, a_0(s, \tau)\, ds \tag{1.6}$$

Аналогично [9, 10] можно показать, что оптимальное управление задачи (1.1)—(1.3) имеет вид

$$u_0(\tau) = -N^{-1}(\tau)\, \psi_1(T, \tau, a_0(\cdot, \tau))\, F\mathrm{M}_\tau^{y_0} x_0(T) \tag{1.7}$$

Запишем уравнение (1.1) следующим образом:

$$x_0(t) = \eta_0(t) + \int_0^t a_1(t, s)\, x_0(s)\, ds \tag{1.8}$$

$$\eta_0(t) = x_0 + \int_0^t a_0(t, s)\, u_0(s)\, ds + \int_0^t b(t, s)\, dw_1(s)$$

Как известно [11], оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $m(\tau) = \mathrm{M}_\tau^{y_0} x_0(T)$, $\tau \leqslant T$, величины $x_0(T)$, заданной уравнением (1.8), по наблюдениям $y_0(s)$, $s \leqslant \tau$, представима в виде

$$m_0(\tau) = \int_0^\tau G_0(\tau, s)\, dy_0(s) \tag{1.9}$$

Из (1.7), (1.9) вытекает равенство (1.4) при

$$Q_0(\tau, s) = -N^{-1}(\tau)\, \psi_1(T, \tau, a_0(\cdot, \tau))\, FG_0(\tau, s) \tag{1.10}$$

Из доказательства леммы 1 следует, что матрицы $Q_0(\tau, s)$ и $G_0(\tau, s)$, определяющие оптимальное управление (1.4) и оптимальную оценку (1.9), связаны соотношением (1.10) (вместе с вспомогательными равенствами (1.5), (1.6)).

Получим еще одно соотношение, связывающее матрицы $Q_0(\tau, s)$ и $G_0(\tau, s)$. Для этого введем следующие обозначения. Пусть

$$q_0(t, \tau) = \begin{cases} \int_\tau^t a_0(t, s)\, Q_0(s, \tau)\, ds, & t \geqslant \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases} \tag{1.11}$$

$$P_0(t, \tau) = a_1(t, \tau) + q_0(t, \tau + h)\, A(\tau + h) \tag{1.12}$$

$R_0(t, \tau)$ — резольвента ядра $P_0(t, \tau)$, т. е.

$$R_0(t, \tau) = P_0(t, \tau) + \int_\tau^t R_0(t, s)\, P_0(s, \tau)\, ds \tag{1.13}$$

Для произвольной матрицы $f(\tau)$, $\tau \in [s, t]$, положим

$$\psi_0(t, s, f(\cdot)) = f(t) + \int_s^t R_0(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

Пусть

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &= \psi_0(t, 0, E)\, D_0 \psi_0'(\tau, 0, E) + \\ &+ \int_0^{t\wedge\tau} \psi_0(t, s, b(\cdot, s))\, \psi_0'(\tau, s, b(\cdot, s))\, ds + \\ &+ \int_0^{t\wedge\tau} \psi_0(t, s, q_0(\cdot, s))\, B_0(s)\, \psi_0'(\tau, s, q_0(\cdot, s))\, ds \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$S_h(\tau) = R(T, \tau - h)\, A'(\tau) + \psi_0(T, \tau, q_0(\cdot, \tau))\, B_0(\tau), \quad B_0 = BB' \tag{1.15}$$

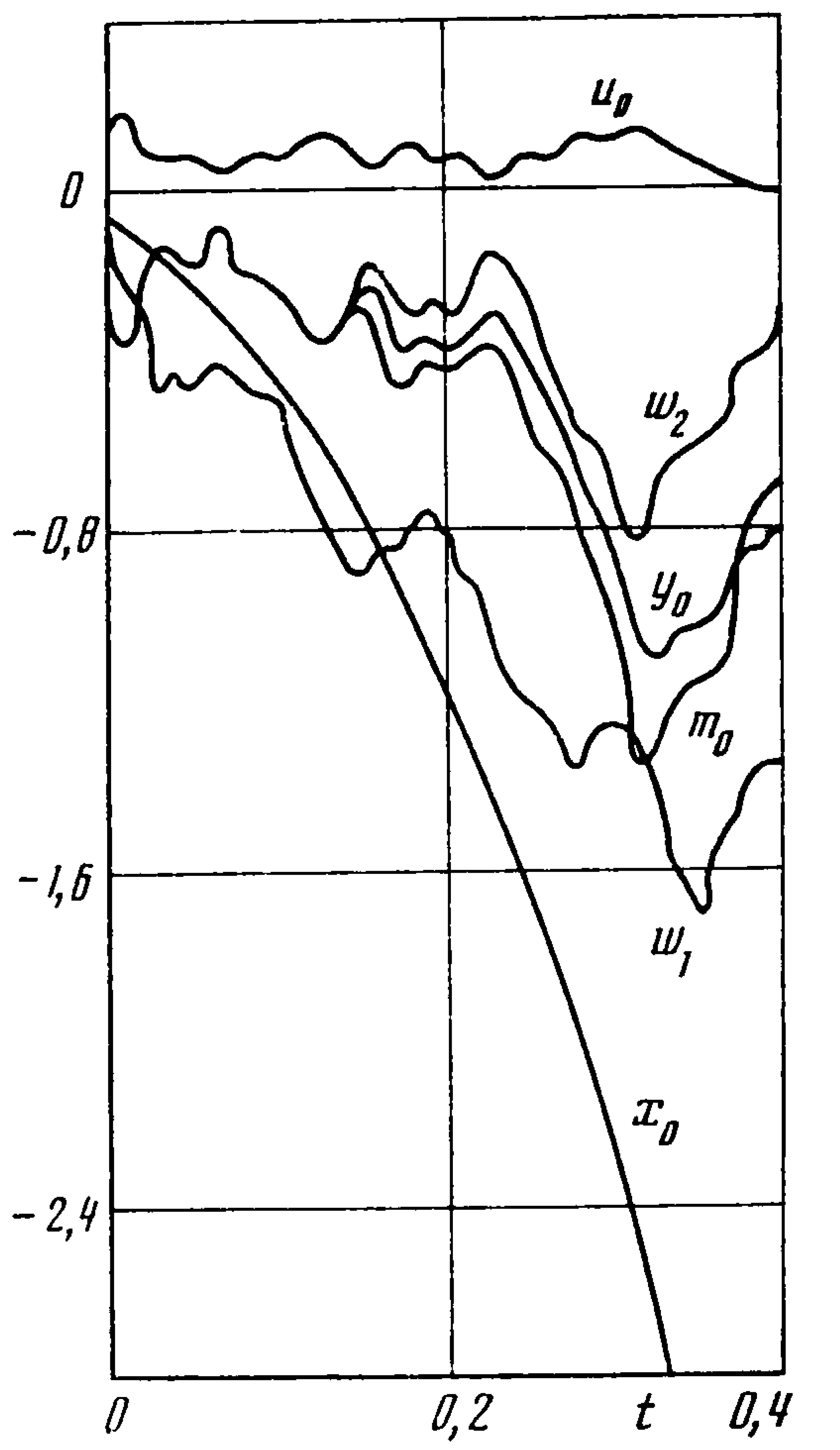
$$\begin{aligned} K_h(s, \tau) &= A(s)\, R(s - h, \tau - h)\, A'(\tau) + \\ &+ B_0(s)\, \psi_0'(\tau - h, s, q_0(\cdot, s))\, A'(\tau) + A(s)\, \psi_0(s - h, \tau, q_0(\cdot, \tau))\, B_0(\tau) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Лемма 2. Матрицы $Q_0(\tau, s)$ и $G_0(\tau, s)$ связаны уравнением

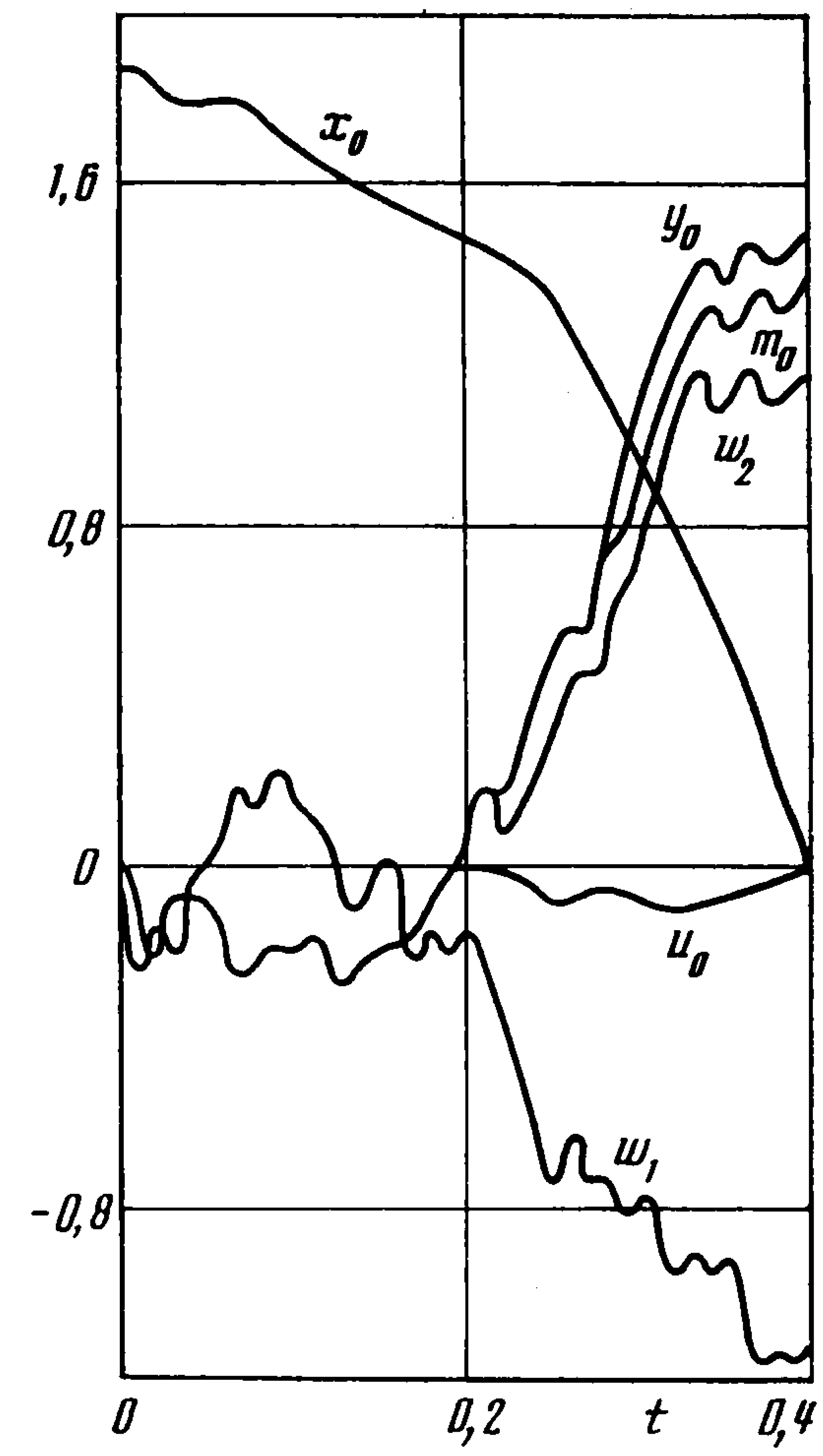
$$G_0(t, \tau)\, B_0(\tau) = S_h(\tau) - \int_0^t G_0(t, s)\, K_h(s, \tau)\, ds, \qquad \tau \in [0, t] \tag{1,17}$$

Доказательство. Пусть $m(t)$ — f_t^y-измеримый процесс вида (1.9) с произвольным ядром $G(t, s)$. Используя (1.9), (1.2) и легко проверяемое соотношение $\mathrm{M}(x_0(T) - m_0(t))\, m'(t) = 0$, получим

$$\begin{aligned} &\int_0^t [\mathrm{M}(x_0(T)\, x_0'(\tau - h))\, A'(\tau)\, d\tau + \mathrm{M}(x_0(T)\, dw_2'(\tau))\, B'(\tau)]\, G(t, \tau) = \\ &= \int_0^t \int_0^t G_0(t, s)\, [A(s)\, \mathrm{M}(x_0(s - h)\, x_0'(\tau - h))\, A'(\tau)\, d\tau\, ds + \\ &+ B(s)\, \mathrm{M}(dw_2(s)\, x_0'(\tau - h))\, A'(\tau)\, d\tau + A(s)\, \mathrm{M}(x_0(s - h)\, dw_2'(\tau))\, B'(\tau)\, ds] \times \\ &\times G'(t, \tau) + \int_0^t G_0(t, \tau)\, B_0(\tau)\, G'(t, \tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{1.18}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Подставляя (1.4) в (1.1) с учетом (1.2), имеем

$$x_0(t) = x_0 + \int_0^t P_0(t, s)\, x_0(s)\, ds + \int_0^t b(t, s)\, dw_1(s) + \int_0^t q_0(t, s)\, B(s)\, dw_2(s)$$

Так как $R_0(t, \tau)$ — резольвента ядра $P_0(t, \tau)$, то

$$x_0(t) = \psi_0(t, 0, E)\, x_0 + \int_0^t \psi_0(t, \tau, b(\cdot, \tau))\, dw_1(\tau) +$$

$$+ \int_0^t \psi_0(t, \tau, q_0(\cdot, \tau))\, B(\tau)\, dw_2(\tau)$$

Следовательно,

$$\mathrm{M}\,(x_0(t)\, x_0'(\tau)) = R(t, \tau)$$

$$\mathrm{M}\,(x_0(t)\, dw_2'(\tau)) = \psi_0(t, \tau, q_0(\cdot, \tau))\, B(\tau)\, d\tau$$

Подставляя (1.19) в (1.18) и учитывая произвольность ядра $G(t, \tau)$, получим (1.17)

Соотношения (1.10), (1.17) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными. Если матрица $B_0(\tau)$ равномерно по τ обратима, то (1.17) при каждом фиксированном t есть уравнение Фредгольма второго рода, которое имеет единственное решение [11, 12]. Численные методы решения таких уравнений рассмотрены в [13].

Полученная система уравнений (1.10), (1.17) легко обобщается и на случай, когда уравнение (1.1) содержит неизвестный параметр, а шумы в уравнениях (1.1), (1.2) зависимы [14, 15].

2. Алгоритм численного решения системы уравнений (1.10), (1.17) основан на методе последовательных приближений и состоит в следующем. Задается произвольно начальное значение матрицы $G_0(t, s)$. По известному $G_0(t, s)$ при помощи соотношений (1,5), (1.6), (1.10) определяется начальное значение матрицы $Q_0(t, s)$. По известному $Q_0(t, s)$ при помощи соотношений (1.11)—(1.16) строится уравнение (1.17), решение которого дает следующее приближение матрицы $G_0(t, s)$. Затем повторяется вычисление $Q_0(t, s)$ и т. д. до совпадения (в пределах заданной точности) двух последовательных приближений. Алгоритм проверялся на тестовых примерах.

Пример. Рассмотрим задачу управления

$$x^{\cdot\cdot}(t) = u + \sigma w_1^{\cdot}(t), \quad x(0) = x_0, \quad x^{\cdot}(0) = 0 \qquad (2.1)$$

$$y^{\cdot}(t) = x(t-h) + w_2^{\cdot}(t), \quad x(s) = 0, \quad s < 0, \quad y(0) = 0 \tag{2.2}$$

$$J(u) = \mathrm{M}\left[x^2(T) + \int\limits_0^T u^2(s)\,ds\right] \tag{2.3}$$

Уравнение (2.1) после двукратного интегрирования принимает вид (1.1) Система уравнений (1.10), (1.17), соответствующая задаче (2.1)—(2.3), решалась численно по описанному алгоритму при $T = 0{,}4$, $\sigma = 10$, $\mathrm{M}x_0^2 = 1$. Гауссовская случайная величина x_0 и винеровские процессы $w_1(t)$, $w_2(t)$ моделировались датчиком нормально распределенных псевдослучайных чисел. Траектории процессов $x_0(t)$, $y_0(t)$, $u_0(t)$ $m_0(t)$ строились численно по формулам (2.1), (2.2), (1.4), (1.9). Результаты расчетов для различных реализаций x_0, $w_1(t)$, $w_2(t)$ и различных значений h представлены на фиг. 1 ($x_0 = -0{,}0865$, $h = 0$) и фиг. 2 ($x_0 = 1{,}856$, $h = 0{,}2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехтеориздат, 1952. 324 с.
2. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Управляемые случайные процессы. Киев: Наук. думка, 1977. 251 с.
4. *Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978. 351 с.
5. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
6. *Wonham W. M.* On the separation theorem of stochastic control // SIAM J. Control. 1968. V. 6. № 2. P. 312—326.
7. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
8. *Shaikhet L. E.* On an optimal control problem of partly observable stochastic Volterra's process // Probl. Control and Inform. Theory. 1987. V. 16. № 6. P. 439—448.
9. *Шайхет Л. Е.* Об оптимальном управлении интегрально-функциональными уравнениями // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 923—934.
10. *Shaikhet L. E.* On optimal control of Volterra equations // Probl. Control and Inform. Theory. 1984. V. 13. № 3. P. 141—152.
11. *Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е.* Об оценивании решений линейных стохастических интегральных уравнений // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 775—781.
12. *Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е.* Фильтрация решений интегральных уравнений // Математическая теория систем / Ред. Болтянский В. Г., Бобылев Н. А., Всехсвятский С. Ю. и др. М.: Наука, 1986. С. 55—56.
13. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986. 544 с.
14. *Шайхет Л. Е.* Оптимальное управление стохастическими системами с последействием в условиях неопределенности // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и прилож. функцион.-дифференц. уравнений, 1987. Душанбе, 1987. Ч. 2. С. 145—146.
15. *Шайхет Л. Е.* Оптимальное управление частично наблюдаемым случайным процессом при наличии неизвестных параметров // Тез. докл. Всесоюз. совещания-семинара «Проблемы оптимизации и управления динамическими системами в машино- и приборостроении», 1987. Владивосток, 1987. С. 100.

Донецк

Поступила в редакцию
15.III.1988