Доказательство. Положим $U = U_2 + U_3 + \ldots$. Ясно, что форма U_2' является ограничением формы U_2 на конфигурационное пространство замороженной системы. Так как $U_2' \not\equiv 0$, то согласно п. 2 форма U_2' не имеет максимума в положении равновесия. Следовательно, тем же свойством обладает и квадратичная форма U_2. Неустойчивость равновесия вытекает теперь из теоремы Ляпунова [5] (п. 25).

Если в положении равновесия не все частицы лежат на Σ и выполнены неравенства (2.1), то силовая функция U не имеет локального максимума. Однако вопрос о неустойчивости в этом случае упирается в нерешенную задачу об обращении теоремы Лагранжа — Дирихле.

Следствие 2 (теорема Кельвина [1]). Предположим, что система упругоотталкивающихся частиц, заключенных в ограниченном объеме V, находится в равновесии и не все частицы лежат на границе $\partial V = \Sigma$. Тогда равновесие неустойчиво.

Действительно, в этом случае $U' \equiv U_2'$, и согласно п. 2, в случае упругого отталкивания форма U_2' — субгармоническая функция.

Если все взаимодействующие частицы лежат на поверхности Σ, то для выяснения условий устойчивости следует воспользоваться теоремой 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука. 1983. 463 с.
2. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир. 1980. 304 с.
3. *Козлов В. В.* Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа — Дирихле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 928—937.
4. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука. 1966. 624 с.
5. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.I.1988

УДК 531.36

О СОХРАНЕНИИ СВОЙСТВА РАВНОМЕРНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Игнатьев А. О.

Рассматриваются две системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (т. е. допускающие нулевое решение), причем их правые части различаются на некоторые «возмущающие» слагаемые. Одна из систем предполагается равномерно асимптотически устойчивой относительно части переменных. Указаны ограничения на возмущающие слагаемые, при выполнении которых нулевое решение второй системы сохраняет свойство равномерной асимптотической устойчивости относительно части переменных.

1. Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$x^{\cdot} = X(t, x, y), \quad y^{\cdot} = Y(t, x, y) \tag{1.1}$$

где x, X — n-мерные, а y, Y — m-мерные векторы соответственно с компонентами x_i, X_i, y_j, Y_j. Наряду с уравнениями (1.1) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= X(t, x, y) + Q^{(1)}(t, x, y) + R^{(1)}(t, x, y) \\ y^{\cdot} &= Y(t, x, y) + Q^{(2)}(t, x, y) + R^{(2)}(t, x, y) \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $Q^{(1)}$, $R^{(1)}$ — n-мерные, а $Q^{(2)}$, $R^{(2)}$ — m-мерные вектор-функции соответственно с компонентами $Q_i^{(1)}$, $R_i^{(1)}$, $Q_j^{(2)}$, $R_j^{(2)}$. В дальнейшем будем предполагать, что правые части систем (1.1), (1.2) удовлетворяют условиям существования единственных решений с заданными начальными условиями, непрерывно зависящих от начальных данных в области

$$\Gamma_H = I \times B_H \times R^m, \quad I = [0, \infty[, \quad B_H = \{x \in R^n : \| x \| < H\} \tag{1.3}$$

Решения систем (1.1), (1.2) считаем y-продолжимыми. Это означает [1], что любое решение $x(t)$, $y(t)$ определено при всех $t \geqslant 0$, для которых $\| x(t) \| \leqslant H$. Здесь знак $\| \cdot \|$ обозначает евклидову норму. В области (1.3) функции $R^{(1)}$, $Q^{(1)}$ удовлетворяют оценкам

$$\| R^{(1)} (t, x, y) \| \leqslant L \| x \|, \ \| Q^{(1)} (t, x, y) \| \leqslant L \| x \| \quad (L = \text{const}),$$

а $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ предполагаем удовлетворяющими условиям Липшица по x, y. Пусть

$$z = (x; y), \ Z (t, z) = (X, Y), \ Q (t, z) = (Q^{(1)}; Q^{(2)})$$
$$R (t, z) = (R^{(1)}, R^{(2)}).$$

Тогда эти условия принимают вид

$$| R_i (t, z^{(1)}) - R_i (t, z^{(2)}) | \leqslant L \| z^{(1)} - z^{(2)} \| \quad (i = 1, \ldots, n + m)$$

а уравнения (1.1), (1.2) соответственно записываются следующим образом:

$$z^{\cdot} = Z (t, z) \tag{1.4}$$
$$z^{\cdot} = Z (t, z) + Q (t, z) + R (t, z). \tag{1.5}$$

Предположим, что системы (1.4) и (1.5) допускают тривиальное решение

$$z = 0 \tag{1.6}$$

Задача об устойчивости решения (1.6) относительно части переменных рассматривалась во многих работах [1—7], достаточно полный обзор в этом направлении можно найти в монографии [7].

2. Введем следующие определения.

Определение 1. Будем говорить, что функция $Q (t, z)$ удовлетворяет условию A_1 относительно x, если существует такое $h > 0$, что для любого $\xi \in]\,0; h\,[$ можно указать момент времени $\tau_\xi \geqslant 0$ и функцию $g_\xi (t)$, непрерывную на $[\tau_\xi; \infty[$, такую, что $| Q_s (t, z) | \leqslant g_\xi (t)$ $(s = 1, \ldots, n + m)$ для всех $z \in \overline{(B_h \setminus B_\xi)} \times R^m$, $t \in [\tau_\xi, \infty[$ и

$$\lim_{t\to\infty} G_\xi (t) = 0, \quad G_\xi (t) = \int_t^{t+1} g_\xi (s) \, ds$$

Определение 2. Будем считать функцию $Q (t, z)$ удовлетворяющей условию A_2 относительно x, если существует число $h > 0$, такое, что если $z \in \bar{F}_h \times R^m$, $t \in I$, то $| Q_s (t, z) | \leqslant g (t)$ $(s = 1, \ldots, n + m)$, причем

$$\lim_{t\to\infty} G (t) = 0, \quad G (t) = \int_t^{t+1} g (s) \, ds$$

Очевидно, что при выполнении условия A_2 относительно x следует выполнимость условия A_1 относительно x.

Теорема. Пусть решение (1.6) системы дифференциальных уравнений (1.4) равномерно асимптотически x-устойчиво, причем устойчивость доказана при помощи дважды непрерывно дифференцируемой функции $v (t, z)$, определенной в области Γ_h $(h < H)$ и допускающей в этой области оценки

$$a (\| x \|) \leqslant v (t, z) \leqslant b (\| x \|), \quad v^{\cdot} |_{(1.4)} \leqslant - c (\| x \|) \tag{2.1}$$
$$\left| \frac{\partial v}{\partial z_i} \right| \leqslant N, \quad \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right| \leqslant N, \quad \left| \frac{\partial^2 v}{\partial z_i \partial z_s} \right| \leqslant N, \quad \left| \frac{\partial^2 v}{\partial z_i \partial t} \right| \leqslant N$$

где a, b, c — функции Хана, N — действительное число. Тогда, если функция $Q (t, z)$ удовлетворяет условию A_1 относительно x, а функция $R (t, z)$ удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+T} R_i (s, z) \, ds = 0 \tag{2.2}$$

равномерно по $T \in I$, $z \in B_H \times R^m$, тривиальное решение (1.6) уравнений (1.5) также равномерно асимптотически устойчиво относительно x и существует $\sigma \in]\,0; h\,[$, такое, что множество $B_\sigma \times R^m$ содержится в области его x-притяжения.

Доказательство. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$, считая $\varepsilon < h$. Обозначим $\xi = b^{-1} \left[\frac{1}{2} a (\varepsilon) \right]$. Тогда в силу неравенств (2.1) имеем

$$\inf_{\|x\| = \varepsilon} v (t, z) \geqslant a (\varepsilon), \quad \sup_{\|x\| \leqslant \xi} v (t, z) \leqslant b (\xi) = \frac{1}{2} a (\varepsilon) \tag{2.3}$$

Покажем, что любая траектория $z(t) = z(t, t_1, z_1)$ уравнений (1.5), проходящая в достаточно большой момент времени t_1 через произвольную точку $z_1 = (x_1, y_1)$, $\| x_1 \| = \xi$, удовлетворяет при $t \geqslant t_1$ неравенству $\| x(t) \| < \varepsilon$. Предположим противное: пусть существует такая система уравнений вида (1.5), удовлетворяющая сформулированным условиям, у которой имеется решение

$$z(t) = z(t, t_1, z_1) \tag{2.4}$$

удовлетворяющее условиям $\| x(t_1) \| = \xi$, $\| x(t_2) \| = \varepsilon$, причем при $t \in [t_1; t_2]$ траектория (2.4) расположена в области

$$\xi \leqslant \| x \| \leqslant \varepsilon, \quad y \in R^m$$

Производная от функции $v(t, z)$ в силу системы (1.5) имеет вид

$$v^{\cdot}|_{(1.5)} = v^{\cdot}|_{(1.4)} + \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial v}{\partial z_i} [Q_i(t, z) + R_i(t, z)]$$

откуда

$$\begin{gathered} \Delta v = v(t_2, z(t_2)) - v(t_1, z(t_1)) \leqslant -c(\xi)(t_2 - t_1) + I_Q + I_R; \\ I_P = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial v(t, z(t))}{\partial z_i} P_i(t, z(t))\, dt; \quad P = Q, R \end{gathered} \tag{2.5}$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части неравенства (2.5):

$$| I_Q | \leqslant N(n+m) \int_{t_1}^{t_2} | Q_i(t, z(t)) |\, dt \leqslant$$

$$\leqslant N(n+m) \int_{t_1}^{t_2} g_\xi(s)\, ds \leqslant N(n+m) \int_{t_1-1}^{t_2} G_\xi(s)\, ds \quad (t_1 > 1) \tag{2.6}$$

Последнее из неравенств в (2.6) следует из результатов [8].

Введем в рассмотрение функцию

$$E_\xi(t) = \sup_{s \in [t-1; \infty[} G_\xi(s)$$

которая в силу свойства $G_\xi(s) \to 0$ при $s \to \infty$ является монотонно невозрастающей и удовлетворяет условию $E_\xi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда получаем

$$\begin{gathered} | I_Q | \leqslant N(n+m) E_\xi(t_1)(t_2 - t_1 + 1) \leqslant \\ \leqslant N(n+m) E_\xi(t_*)(t_2 - t_1 + 1), \quad \tau_\xi + 1 \leqslant t_* < t_1 \end{gathered}$$

Оценим теперь интеграл I_R. Для этого разобьем отрезок $[t_1; t_2]$ на p равных отрезков точками $\theta_k = t_1 + k\tau$ $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$, $\theta_0 = t_1$, $\theta_p = t_2$. Обозначим $z^{(k)} = z(\theta_k)$. Имеем неравенство

$$| I_R | \leqslant | F_1 | + | F_2 |$$

$$F_1 = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial v(t, z(t))}{\partial z_i} R_i(t, z(t))\, dt - F_2$$

$$F_2 = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial v(\theta_k, z^{(k)})}{\partial z_i} R_i(t, z^{(k)})\, dt$$

Так как предельные соотношения (2.2) выполнены равномерно по $T \in I$, $z \in B_H \times R^m$, то они могут быть представлены в виде

$$\left| \int_t^{t+T} R_i(s, z)\, ds \right| \leqslant \varphi(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots n+m),$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция, монотонно убывающая к нулю. Отсюда получаем оценки

$$\begin{gathered} | F_2 | \leqslant pN(n+m)\varphi(t_1) < pN(n+m)\varphi(t_*) = pM\gamma \\ | F_1 | \leqslant pM\tau^2 \end{gathered}$$

где M — число, зависящее лишь от свойств функции $v(t, z)$ и постоянных ε, N, L.

Пусть Δt — нижняя грань разностей $t_2 - t_1$, таких, что $\| x(t_1) \| = \xi(\varepsilon)$, $\| x(t_2) \| = \varepsilon$. Очевидно, что $\Delta t = \Delta t(\varepsilon) > 0$. В дальнейшем считаем $t_* = t_*(\varepsilon)$ удовлетворяющим неравенствам

$$t_* \geqslant \tau_\xi + 1, \quad -c(\xi)/12 + N(n+m) E_\xi(t_*) \leqslant 0 \tag{2.7}$$
$$-c(\xi)\Delta t(\varepsilon)/12 + N(n+m) E_\xi(t_*) < 0$$

Выберем τ удовлетворяющим квадратному неравенству

$$\tau^2 - 2u\tau + \gamma < 0, \quad u = c(\xi)/(3M).$$

Это неравенство справедливо, если $\tau \in]\tau_1, \tau_2[$; $\tau_1 = u - \sqrt{u^2 - \gamma}$, $\tau_2 = u + \sqrt{u^2 - \gamma}$. Величину t_* считаем настолько большой, что выполняется неравенство

$$\varphi(t_*) < c^2(\xi)/(9MN(n+m)) \tag{2.8}$$

Это обеспечивает выполнимость соотношений $u^2 - \gamma > 0$, $\tau_2 > \tau_1 > 0$.

Покажем, что существуют такое натуральное число p и $\tau \in]\tau_1, \tau_2[$, что выполняется равенство

$$p\tau = t_2 - t_1 \tag{2.9}$$

Неравенства $\tau_1 < \tau < \tau_2$ при условии (2.9) можно записать в виде

$$(t_2 - t_1)/\tau_1 > p > (t_2 - t_1)/\tau_2 \tag{2.10}$$

Для существования натурального числа p, удовлетворяющего неравенствам (2.10), достаточно выполнения условия

$$\Delta t(\tau_1^{-1} - \tau_2^{-1}) > 1 \tag{2.11}$$

Можно убедиться, что неравенство (2.11) справедливо при $\gamma \to 0 + 0$, откуда следует его справедливость при $\gamma < \gamma_1$, где $\gamma_1 = \gamma_1(\varepsilon)$ достаточно мало. Таким образом, если t_* наряду с условиями (2.7), (2.8) удовлетворяет неравенству

$$t_* \geqslant \varphi^{-1}\left(\frac{\gamma_1 M}{N(n+m)}\right)$$

то $\Delta v < -c(\xi)(t_2 - t_1)/6$, что противоречит соотношениям (2.3). Полученное противоречие показывает, что для любой системы вида (1.5) не существует моментов времени t_1, t_2 ($t_2 > t_1 > t_*(\varepsilon)$), таких, что $\| x(t_1) \| = \xi$, $\| x(t_2) \| = \varepsilon$.

Из результатов работы [4] следует, что при выполнении условий (2.1) справедлива оценка $\| X(t, x, y) \| \leqslant L \| x \|$. Любое решение $z(t, t_0, z_0)$ уравнений (1.5) непрерывно зависит от начальных условий, поэтому существует $\delta > 0$, такое, что для любых $t_0 \in [0; t_*]$, $z_0 \in B_\delta \times B^m$ выполняется условие $\| x(t_*, t_0, z_0) \| < \xi$. Так как величины ξ и t_* зависят лишь от ε, то δ также будет зависеть только от ε. Этим доказана равномерная x-устойчивость решения (1.6) уравнений (1.5).

Покажем теперь, что решение (1.6) системы (1.5) равномерно асимптотически устойчиво по отношению к x. Пусть λ — какое-либо фиксированное число ($0 < \lambda < h$). По доказанному существует $\sigma(\lambda) > 0$, такое, что любая траектория $z(t) = z(t, t_0, z_0)$ системы (1.5), удовлетворяющая условию $z_0 \in B_\sigma \times R^m$, удовлетворяет при любом $t > t_0 \geqslant 0$ условию $z(t) \in B_\lambda \times R^m$.

Покажем, что для любого $\rho > 0$ ($\rho < \lambda$) можно указать $T(\rho) > 0$, такое, что при произвольных $z_0 \in B_\sigma \times R^m$, $t_0 \in I$, $t \geqslant t_0 + T$ справедливо неравенство $\| x(t) \| < \rho$. Пусть $0 < \rho < \lambda$. По доказанному существует $\delta(\rho) > 0$, такое, что из условия $z(T_0) \in B_\delta \times R^m$ следует $z(t) \in B_\rho \times R^m$ для любого $t \geqslant T_0 \geqslant 0$. Оценим время, в течение которого траектория может располагаться в области $(B_\lambda \setminus B_\delta) \times R^m$. Аналогично предыдущему можно показать, что

$$\Delta v = v(t, z(t)) - v(T_1, z(T_1)) \leqslant -c(\delta)(t - T_1)/6 \tag{2.12}$$

при $t \geqslant T_1$, где T_1 зависит лишь от $\delta(\rho)$, т. е. $T_1 = T_1(\rho)$. Из неравенства (2.12) получаем

$$t - T_1 \leqslant 6\Delta v/c(\delta) \leqslant$$
$$\leqslant 6[h(\lambda) - a(\delta)]/c(\delta) = T_2(\rho)$$

Полагая $T(\rho) = T_1(\rho) + T_2(\rho)$, получаем, что при любых $z_0 \in B_\sigma \times R^m$, $t_0 \in I$, $t \geqslant t_0 + T$ справедливо неравенство $\| x(t, t_0, z_0) \| < \rho$. Это и означает, что решение (1.6) системы (1.5) равномерно асимптотически устойчиво по отношению к x и множество $B_\sigma \times R^m$ содержится в области x-притяжения.

Следствие. Заключение теоремы остается справедливым, если функция $Q(t, z)$ удовлетворяет условию A_2 относительно x при выполнении остальных условий теоремы. Так, например, это условие выполняется, если справедливо одно из соотношений

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0, \quad \int^{\infty} g(t)\,dt < \infty$$

Отметим, что при $m = 0$, $R \equiv 0$ результат теоремы получен в работе [8], а в случае $m = 0$, $Q \equiv 0$ теорема доказана в [9].

3. В качестве примера приложения доказанной теоремы рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2), где $n = 2$, $m = 1$, $X_1 = -x_1^3$, $X_2 = -x_2^3$, $Y = x_1x_2 \sin y$, $R_1^{(1)} = x_2 \cos t^2$, $R_2^{(1)} = x_1 \sin t^2$, $R^{(2)} = x_2 \operatorname{arctg} y \sin t^3$, $Q_1^{(1)} = 0$, $Q_2^{(1)} = x_1(1 + t\,|\,x_2\,|)^{-1}$, $Q^{(2)} = 0$. Для доказательства равномерной асимптотической x-устойчивости нулевого решения системы (1.1) можно воспользоваться функцией Ляпунова $v = x_1^2 + x_2^2$; справедливость условия A_1 относительно x для функции Q и выполнимость предельных соотношений (2.2) также проверяется элементарно. Следовательно, тривиальное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y = 0$ уравнений (1.2) равномерно асимптотически x-устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Corduneanu C.* Sur. la stabilite partielle // Rev. Roumain. Math. Pure et Appl. 1964. V. 9. № 3. P. 229—236.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., астрон., физ., хим. 1957. № 4. С. 9—16.
3. *Озиранер А. С.* К вопросу об устойчивости движения относительно части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1971. № 1. С. 92—100.
4. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364—384.
5. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 138—143.
6. *Андреев А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости по части переменных // Докл. АН УзССР. 1982. № 5. С. 9—12.
7. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
8. *Strauss A., Yorke J. A.* Perturbation theorems for ordinary differential equations // J. Different. Equat. 1967. V. 3. № 1. P. 15—30.
9. *Игнатьев А. О.* Об асимптотической устойчивости одного класса неавтономных систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2161—2163.

Донецк

Поступила в редакцию 11.II.1988

УДК 531.36 + 62—650

О НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТИЧНО НАБЛЮДАЕМЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ ВОЛЬТЕРРЫ

Шайхет Л. Е.

Предлагается новый метод решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления частично наблюдаемым случайным процессом Вольтерры.

Метод основан на возможности представления и оптимальной оценки и оптимального управления в виде интегралов по наблюдаемому процессу. Подынтегральные функции при этом неслучайны и определяются некоторой системой интегральных уравнений, которая может быть заранее решена численно. Оптимальное управление строится непосредственно по наблюдениям. Приводится пример, демонстрирующий возможность практической реализации этого метода на ЭВМ.

Интегральные уравнения Вольтерры возникли впервые в теории ползучести и составляют основу этой теории [1, 2]. Они включают в себя довольно общий класс уравнений с последействием [3—5], которые играют важную роль в теории управления и различных ее приложениях. Теория оптимального управления уравнениями Вольтерры является естественным развитием теории управляемых дифференциальных уравнений. В настоящее время наблюдается интенсивное развитие теории фильтрации и оптимального управления для стохастических интегральных уравнений. Классиче-