Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 531.36

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КЕЛЬВИНА

Козлов В. В.

Рассматривается задача об устойчивости равновесия системы взаимодействующих частиц, расположенных в ограниченном объеме евклидова пространства. Получены достаточные условия неустойчивости и существования движений, неограниченно приближающихся к положению равновесия, содержащие как частный случай теорему Кельвина [1]. Эти результаты основаны на общей теореме о неустойчивости равновесия в силовом поле с субгармонической силовой функцией.

1. Рассмотрим динамику обратимой системы с кинетической энергией $T = (g_{ij}v^iv^j)/2$ и силовой функцией $U(x)$. Движения описываются уравнениями Лагранжа

$$(L'_{v^i})^{\cdot} - L'_{x^i} = 0, \quad v^i = d(x^i)/dt, \quad L = T + U, \quad i \leqslant n \tag{1.1}$$

Коэффициенты метрического тензора g_{ij} и функция U считаются гладко зависящими от координат x. Предположим, что точка $x = 0$ является критической для силовой функции U. Следовательно, $x = 0$ — равновесие системы (1.1). Можно считать, что $U(0) = 0$. Функция U называется субгармонической, если $\Delta U \geqslant 0$, где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами, взятый со знаком минус:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad g = \det \| g_{ij} \|$$

Ясно, что условие субгармоничности силовой функции не зависит от выбора лагранжевых координат x^i.

Теорема 1. Предположим, что силовая функция U субгармонична и ее ряд Маклорена отличен от нуля. Тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво. В аналитическом случае для неустойчивости достаточно условия субгармоничности.

Доказательство. Пусть g_0^{ij} — значения метрического тензора в точке $x = 0$. Разложим силовую функцию U в ряд по однородным формам: $U_m + U_{m+1} + \ldots$, $m \geqslant 2$. Можно проверить, что $\Delta U = \Delta_0 U_m + \ldots$, где Δ_0 — оператор Лапласа — Бельтрами метрики g_0^{ij}, многоточие обозначает слагаемые порядка $\geqslant m - 2$. Так как $\Delta U \geqslant 0$, то $\Delta_0 U_m \geqslant 0$. Коэффициенты оператора Δ_0 не зависят от x. Следовательно, функция U_m субгармоническая в смысле классического определения [2].

Из известного неравенства

$$0 = U_m(0) \leqslant \frac{1}{s_n r^{n-1}} \int_S U_m d\sigma$$

где S — сфера радиуса r с центром в точке $x = 0$, s_n — площадь единичной сферы, получим, что форма U_m обязательно принимает положительные значения. Поэтому U_m не имеет в точке $x = 0$ максимума. При указанном условии доказано [3] существование решений уравнений (1.1), неограниченно приближающихся к точке $x = 0$ при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$. Отсюда в свою очередь вытекает неустойчивость равновесия $x = 0$.

Следствие 1. Пусть коэффициенты метрического тензора g_{ij} аналитичны и силовая функция гармонична: $\Delta U = 0$. Тогда любое равновесие неустойчиво.

Действительно, если ряд Маклорена U отличен от нуля, то заключение следствия вытекает из теоремы 1. В противном случае $U \equiv 0$, поскольку гармонические функции аналитичны. При этом каждая точка $x = x_0$ будет безразличным равновесием. Все они, очевидно, неустойчивы.

Из следствия 1 заключаем, в частности, что справедлива известная гипотеза Ирншоу о неустойчивости равновесия системы свободных зарядов в стационарном электрическом поле в трехмерном пространстве [1,4]. Эта гипотеза была обоснована ранее в наиболее важном частном случае, когда $U = U_2 + U_3 + \ldots$ и $U_2 \not\equiv 0$ [5].

2. Кельвин рассмотрел задачу об устойчивости равновесия системы взаимно отталкивающихся материальных точек, заключенной в ограниченном объеме. Часть из этих точек может при этом находиться на границе, и точная постановка задачи должна опираться на теорию освобождающихся связей. Сначала рассмотрим условия устойчивости системы взаимодействующих точек в n-мерном евклидовом пространстве, часть из которых неподвижна. С точки зрения приложений наибольший интерес представляет случай $n \leqslant 3$. Пусть U_{ij} — силовая функция взаимодействующих частиц с массами m_i и m_j $(i \neq j)$. Она зависит лишь от их взаимного расстояния.

Теорема 2. Предположим, что функции $U_{ij}(r)$ аналитичны при $r > 0$ $(i \neq j)$ и

$$\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{dU_{ij}}{dr}\right) \geqslant 0 \qquad (2.1)$$

Тогда любое равновесие неустойчиво.

Доказательство. Пусть $x_i^1, \ldots, x_i^n$ — декартовы координаты точки с массой m_i. Тогда $T = \Sigma m_i (v_i^k)^2/2$. Соответствующий дифференциальный оператор Λ имеет вид

$$\sum \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial^2}{\partial (x_i^1)^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial (x_i^n)^2}\right)$$

Пусть $x_j^1, \ldots, x_j^n$ — координаты еще одной точки m_j и $r_{ij} = \left[\sum (x_i^k - x_j^k)^2\right]^{1/2}$ — расстояние между ними. Ясно, что величина

$$\sum_k \frac{\partial^2 U_{ij}(r_{ij})}{\partial (x_i^k)^2}$$

равна левой части неравенства (2.1). Полная силовая функция системы взаимодействующих частиц равна $U = \sum\limits_{i<j} U_{ij}$. С учетом неравенств (2.1) получим, что U — субгармоническая функция. Неустойчивость равновесия вытекает теперь из теоремы 1.

В качестве примера рассмотрим степенной закон взаимодействия $U_{ij}(r) = a_{ij} r^{\alpha}$, причем в случае притяжения $a_{ij} < 0$, а в случае отталкивания $a_{ij} > 0$. Из неравенства (2.1) получим

$$a_{ij}\,\alpha\,(n + \alpha - 2) \geqslant 0 \qquad (2.2)$$

Если точки притягиваются (отталкиваются), то при $\alpha(n + \alpha - 2) \leqslant 0$ $(\alpha(n + \alpha - 2) \geqslant 0)$ равновесие неустойчиво. Когда $\alpha = 2 - n$, силовая функция гармоническая и снова получаем теорему Ирншоу. В случае линейных сил $\alpha = 2$, и поэтому равновесие упругоотталкивающихся частиц всегда неустойчиво (ср. с [1]).

В частном случае, когда $2n$ неподвижных точек расположены на n координатных прямых на равных расстояниях от точки $x = 0$ и коэффициенты a_{ij} равны между собой, критерием неустойчивости равновесия частицы, расположенной в точке $x = 0$, является неравенство (2.2).

Особенно просто выглядит условие (2.1) при $n = 1$: если силовая функция парного взаимодействия частиц на прямой выпукла вверх, то любое равновесие неустойчиво. В частности, неустойчива любая равновесная конфигурация гравитирующих точек на прямой. Наоборот, в случае отталкивания возможны устойчивые равновесные конфигурации. Простейшим примером является равновесие заряда, находящегося между неподвижными зарядами одноименного знака.

3. Рассмотрим теперь более сложный случай, когда в положении равновесия часть частиц расположена на замкнутой гладкой регулярной гиперповерхности Σ. При анализе устойчивости будем считать, что эти частицы при движении не покидают Σ (т. е. связи неосвобождающиеся). Динамика такой системы частиц снова описывается уравнениями Лагранжа (1.1), однако метрика T уже не будет плоской. Пусть U_{ij} снова обозначают силовые функции парного взаимодействия, зависящие лишь от взаимных расстояний взаимодействующих частиц.

Если в положении равновесия не все частицы лежат на поверхности Σ, то можно рассмотреть новую механическую систему с меньшим числом степеней свободы, зафиксировав положения частиц, расположенных на Σ. Пусть U' — силовая функция новой системы. Ясно, что конфигурация частиц в исходной системе является равновесием частично «замороженной» системы.

Теорема 3. Предположим, что в положении равновесия не все частицы расположены на Σ, выполнены неравенства (2.1) и $U' = U_2' + U_3' + \ldots$, $U_2' \not\equiv 0$, Тогда равновесие неустойчиво.

Доказательство. Положим $U = U_2 + U_3 + \ldots$. Ясно, что форма U_2' является ограничением формы U_2 на конфигурационное пространство замороженной системы. Так как $U_2' \not\equiv 0$, то согласно п. 2 форма U_2' не имеет максимума в положении равновесия. Следовательно, тем же свойством обладает и квадратичная форма U_2. Неустойчивость равновесия вытекает теперь из теоремы Ляпунова [5] (п. 25).

Если в положении равновесия не все частицы лежат на Σ и выполнены неравенства (2.1), то силовая функция U не имеет локального максимума. Однако вопрос о неустойчивости в этом случае упирается в нерешенную задачу об обращении теоремы Лагранжа — Дирихле.

Следствие 2 (теорема Кельвина [1]). Предположим, что система упругоотталкивающихся частиц, заключенных в ограниченном объеме V, находится в равновесии и не все частицы лежат на границе $\partial V = \Sigma$. Тогда равновесие неустойчиво.

Действительно, в этом случае $U' \equiv U_2'$, и согласно п. 2, в случае упругого отталкивания форма U_2' — субгармоническая функция.

Если все взаимодействующие частицы лежат на поверхности Σ, то для выяснения условий устойчивости следует воспользоваться теоремой 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука. 1983. 463 с.
2. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир. 1980. 304 с.
3. *Козлов В. В.* Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа — Дирихле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 928—937.
4. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука. 1966. 624 с.
5. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.I.1988

УДК 531.36

О СОХРАНЕНИИ СВОЙСТВА РАВНОМЕРНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Игнатьев А. О.

Рассматриваются две системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (т. е. допускающие нулевое решение), причем их правые части различаются на некоторые «возмущающие» слагаемые. Одна из систем предполагается равномерно асимптотически устойчивой относительно части переменных. Указаны ограничения на возмущающие слагаемые, при выполнении которых нулевое решение второй системы сохраняет свойство равномерной асимптотической устойчивости относительно части переменных.

1. Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$x^{\cdot} = X(t, x, y), \quad y^{\cdot} = Y(t, x, y) \tag{1.1}$$

где x, X — n-мерные, а y, Y — m-мерные векторы соответственно с компонентами x_i, X_i, y_j, Y_j. Наряду с уравнениями (1.1) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= X(t, x, y) + Q^{(1)}(t, x, y) + R^{(1)}(t, x, y) \\ y^{\cdot} &= Y(t, x, y) + Q^{(2)}(t, x, y) + R^{(2)}(t, x, y) \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $Q^{(1)}$, $R^{(1)}$ — n-мерные, а $Q^{(2)}$, $R^{(2)}$ — m-мерные вектор-функции соответственно с компонентами $Q_i^{(1)}$, $R_i^{(1)}$, $Q_j^{(2)}$, $R_j^{(2)}$. В дальнейшем будем предполагать, что правые части систем (1.1), (1.2) удовлетворяют условиям существования единственных решений с заданными начальными условиями, непрерывно зависящих от начальных данных в области

$$\Gamma_H = I \times B_H \times R^m, \quad I = [0, \infty[, \quad B_H = \{x \in R^n : \|x\| < H\} \tag{1.3}$$

Решения систем (1.1), (1.2) считаем y-продолжимыми. Это означает [1], что любое решение $x(t)$, $y(t)$ определено при всех $t \geqslant 0$, для которых $\|x(t)\| \leqslant H$. Здесь