Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 531.31

О НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМАХ ЧАПЛЫГИНА

Станченко С. В.

Аппарат описания голономных систем на касательном расслоении, разработанный в [1], и некоторые понятия, введенные в [2], применяются к неголономным системам Чаплыгина. При помощи дифференциальных форм определяется понятие квазикоординаты, формулируются условия существования приводящего множителя Чаплыгина для систем с произвольным числом степеней свободы, изучавшиеся в [3]. Найдены свойства интегрального инварианта, которые характерны для систем Чаплыгина и отличаются от свойств, доказанных в [4]. Из существования инвариантной меры с дифференцируемой по скоростям плотностью в системе без потенциала следует существование меры с плотностью, зависящей только от координат. Из инвариантности некоторой меры с плотностью, зависящей от координат (но не от скоростей), в системе без потенциала следует инвариантность этой же меры после добавления потенциала. В качестве примера доказывается, что уравнения движения неголономного шара Чаплыгина [5] с произвольным потенциалом имеют инвариантную меру.

1. Постановка задачи. Квазикоординаты. Пусть TV^n — касательное расслоение конфигурационного многообразия V^n с локальными координатами $(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)$. Определим оператор d_v, действующий на функции, по формуле

$$d_v f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i^\cdot} dq_i \qquad (1.1)$$

Обобщенные силы будем представлять в виде 1-формы

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)\, dq_i$$

Если T — кинетическая энергия, $\det \| T_{q^\cdot q^\cdot} \| \neq 0$, то уравнение

$$dd_v T(\mathbf{X}, \cdot) = -dT + Q \qquad (1.2)$$

определяет векторное поле $\mathbf{X}$ соответствующей механической системы [1]. Здесь dd_vT — замкнутая, невырожденная дифференциальная 2-форма, dT, Q — дифференциальные 1-формы.

Форме dd_vT отвечает невырожденная кососимметричная матрица, поэтому компоненты поля $\mathbf{X}$ определяются как решения системы линейных уравнений, причем было показано [2], что поле $\mathbf{X}$ «специально», т. е.

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} \left[a_i \frac{\partial}{\partial q_i^\cdot} + q_i^\cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \right] \qquad (1.3)$$

Рассмотрим векторное поле X, задаваемое более общим, чем (1.2), уравнением

$$\Omega(\mathbf{X}, \cdot) = R \qquad (1.4)$$

где Ω — 2-форма, не обязательно замкнутая. Пусть $\mathbf{X}$ — специальное поле, т. е. удовлетворяет равенству (1.3).

Для функций, заданных в некоторой окрестности множества $A = \{q_i^\cdot = 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, определено понятие однородности по скоростям. Это понятие можно распространить на векторные поля и дифференциальные формы.

Определение 1. Формы $dq_i^{\cdot}$ и поля $\partial/\partial q_i^{\cdot}$ однородны по скоростям соответственно первой и минус первой степени однородности. При умножении этих объектов на однородные функции степени однородности складываются.

Пример. Дифференциальная форма

$$\Sigma a_{ij}(\mathbf{q})\, dq_i^{\cdot} \wedge dq_j + \Sigma b_{ij}^{k}(\mathbf{q})\, q_k^{\cdot} dq_i \wedge dq_j$$

и векторное поле

$$\sum c_{ij}^{k}(\mathbf{q})\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \frac{\partial}{\partial q_k^{\cdot}} + \sum q_i^{\cdot} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

однородны по скоростям первой степени однородности.

Заметим, что форма Ω в уравнении (1.4) определена с точностью до слагаемых Λ, удовлетворяющих условию

$$\Lambda(\mathbf{X}, \cdot) = 0 \tag{1.5}$$

Коэффициенты 2-формы, для которой выполнено это условие, могут быть аналитичными по скоростям, а сама форма в окрестности множества A может представляться в виде ряда, состоящего из однородных по скоростям слагаемых. Например,

$$\Lambda = q_1^{\cdot} dq_2 \wedge dq_3 + q_3^{\cdot} dq_1 \wedge dq_2 + q_2^{\cdot} dq_3 \wedge dq_1$$

Но можно построить форму Λ, удовлетворяющую условию (1.5), и по-другому.

Определение 2. Пусть $\theta = \Sigma \theta_i dq_i^{\cdot}$ — невырожденная дифференциальная 1-форма на V^n, рассматриваемая как форма на TV^n. Квазикоординатой, отвечающей форме θ, называется функция π, определенная быть может не во всем фазовом пространстве TV^n, удовлетворяющая во всей области определения уравнению

$$L_{\mathbf{X}}\pi = \theta(\mathbf{X}) \tag{1.6}$$

Замечания. 1°. Правая часть уравнения в частных производных (1.6) есть функция, линейная по скоростям: $\theta(\mathbf{X}) = \Sigma\theta_i(\mathbf{q})\, q_i^{\cdot}$.

2°. Функция π определена уравнением (1.6) неоднозначно.

3°. Если форма θ точна, т. е. $\theta = d\varphi$, то в качестве решения уравнения (1.6) можно взять функцию φ.

Для незамкнутых форм область определения квазикоординат пока не изучена. Заметим, однако, что хотя сама функция π может быть определена не во всем фазовом пространстве, ее производная вдоль $\mathbf{X}$ доопределяется до гладкой (аналитической) функции $\theta(\mathbf{X})$ на TV^n. Эту функцию принято обозначать $\pi^{\cdot}$.

Введение π в качестве новой координаты требует, вообще говоря, явного выражения π через старые координаты и наоборот.

Опишем пример ситуации, когда эта сложность не возникает. Пусть координата q_1 — циклическая, т. е. не входит явно в коэффициенты форм Ω и R в уравнении (1.4). Кроме того,

$$\theta = \Sigma\theta_i dq_i, \quad \theta_1 \neq 0, \; R(\partial/\partial q_1) = 0$$

Разложим формы Ω и R по формам $\theta, dq_2, \ldots, dq_n$ и соберем все коэффициенты в Ω при θ в форму γ, так что $\Omega = \Omega_1 + \gamma \wedge \theta$. При сделанных предположениях получаем, что $\gamma(\mathbf{X}) = 0$. Это следует из сравнения коэффициентов при θ в уравнении (1.4).

Теперь положим $\Lambda = \gamma \wedge (d\pi - \theta)$. Очевидно, что если π — квазикоордината, отвечающая θ, то $\Lambda(\mathbf{X}, \cdot) = 0$.

Обозначив $\Omega_2 = \Omega + \Lambda$, вместо уравнения (1.4) можно написать $\Omega_2(\mathbf{X}, \cdot) = (\Omega_1 + \gamma \wedge d\pi)(\mathbf{X}, \cdot) = R$, причем координата q_1 и дифференциал dq_1 не входят в формы Ω_2 и R, и можно считать π новой координатой. В п. 2 разобрана процедура введения «длины дуги» в качестве координаты, описывающей движение саней Чаплыгина.

Замечания. 1°. Если $d\Omega_1 = 0$, $d\gamma = 0$, то таким способом получаются уравнения Гамильтона: $d\Omega_2 = 0$.

2°. Так как в новых уравнениях π — циклическая координата, ее зависимость от времени не влияет на все решение. Зависимость $\pi^{\cdot}$ уже существенна.

2. Уравнения Чаплыгина. Наличие в неголономных системах циклических координат, число которых совпадает с числом связей, позволяет записывать уравнения редуцированной системы в виде, аналогичном (1.4). Пусть на консервативную механическую систему с гамильтонианом $H^* = T^* - U^*$ и фазовым пространством TM^m наложено k неинтегрируемых, линейных, однородных по скоростям связей вида

$$f_s \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i(\mathbf{q}) q_i^{\cdot} = 0, \quad s = 1, \ldots, k \tag{2.1}$$

Пусть гамильтониан H^* и функции a_i не содержат явно координат q_s. Обозначим $n = m - k$.

Теорема 1. Векторное поле редуцированной системы Чаплыгина может быть задано на некотором пространстве TV^n уравнением

$$\Omega(\mathbf{X}, \cdot) = -dH \tag{2.2}$$

причем $\mathbf{X}$ — специальное поле. Здесь H — сужение гамильтониана H^* на поверхность $\Sigma = \{\mathbf{f} = 0\}$, Ω — некоторая 2-я форма, вообще говоря, незамкнутая.

Докажем теорему для случая, когда уравнения связей могут быть записаны в виде

$$f_s \equiv q_s^{\cdot} - \sum_{i=k+1}^{m} a_{si} q_i^{\cdot} \tag{2.3}$$

Доказательство. Уравнения с множителями Лагранжа записываются в виде

$$dd_v T^*(\mathbf{X}, \cdot) = -dH^* + \sum_{s=1}^{k} \lambda_s d_v f_s \tag{2.4}$$

а λ_s находятся из условия

$$L_{\mathbf{X}} f_s = df_s(\mathbf{X}) = 0 \tag{2.5}$$

Было показано [2], что поле, определяемое уравнениями (2.4), является специальным на TM^m. Вследствие этого выполнено условие

$$d_v f_s(\mathbf{X})|_\Sigma = f_s|_\Sigma = 0 \tag{2.6}$$

Процедура исключения зависимых скоростей состоит в проектировании поля $\mathbf{X}$ на подходящее координатное подпространство размерности $2m - k$. Она заключается в выборе функции T, которая совпадает с T^* на Σ и не зависит от $q_s^{\cdot}$. Так как T^* и T на Σ равны, для некоторых функций h_s выполняется равенство

$$T^* = T + \sum_{s=1}^{k} h_s f_s$$

подставляя которое в (2.4) и используя (2.5), (2.6), получаем в точках Σ:

$$\left(dd_vT + \sum_{s=1}^{k} h_s dd_v f_s\right)(X, \cdot) = -dH + \sum_{s=1}^{k} (\lambda_s - L_X h_s)\, d_v f_s$$

Из цикличности координат q_s следует, что в этом уравнении $d_v f_s$ — единственная форма, содержащая dq_s. Поэтому $\lambda_s - L_X h_s = 0$. Если теперь в функциях h_s выразить $q_s^\cdot$ при помощи уравнений (2.3), то в получившееся уравнение не войдут переменные q_s, $q_s^\cdot$ и их дифференциалы.

Поле $\mathbf{X}$ оказывается определенным с точностью до слагаемых, пропорциональных $\partial/\partial q_s$ и $\partial/\partial q_s^\cdot$. Будем считать редуцированным полем то, у которого коэффициенты при $\partial/\partial q_s$ и $\partial/\partial q_s^\cdot$ нулевые.

В итоге получим уравнение для специального поля на $TV^n = \{(q_{k+1}, \ldots, q_m, q_{k+1}^\cdot, \ldots, q_m^\cdot)\}$

$$\Omega(\mathbf{X}, \cdot) = \left(dd_vT + \sum_{s=1}^{k} h_s dd_v f_s\right)(\mathbf{X}, \cdot) = -dH \qquad (2.7)$$

Отметим, что редуцированное уравнение есть сужение уравнения с множителями на 0-пространство форм $d_v\mathbf{f}$, $d\mathbf{f}$.

Следствие. Если система натуральна, форма Ω однородна по скоростям.

Доказательство. Из квадратичности T вытекает линейность h_s, дифференцирование d не меняет степени однородности, а d_v уменьшает ее на единицу.

Пример. Рассмотрим движение саней Чаплыгина по горизонтальной плоскости. Пусть x, y — координаты лезвия на плоскости, φ — угол поворота лезвия, a, b — координаты центра масс в системе, связанной с лезвием, k — радиус инерции. Тогда

$$2T = (x^\cdot - \varphi^\cdot (a \sin \varphi + b \cos \varphi))^2 + (y^\cdot + (a \cos \varphi - b \sin \varphi))^2 + k^2\varphi^{\cdot 2}$$

Уравнение связи имеет вид

$$f \equiv x^\cdot \sin \varphi - y^\cdot \cos \varphi = 0$$

Перейдем к квазискоростям

$$\varkappa^\cdot = x^\cdot \cos \varphi + y^\cdot \sin \varphi - b\varphi^\cdot \quad f = x^\cdot \sin \varphi - y^\cdot \cos \varphi$$

Тогда $2T = f^2 + \varkappa^{\cdot 2} - 2af\varphi^\cdot + r^2\varphi^{\cdot 2}$, $r^2 = a^2 + k^2$. Уравнение с множителями:

$$\Omega(\mathbf{X}, \cdot) = (a\varphi^\cdot - f)\, df - \varkappa^\cdot d\varkappa^\cdot + (af - r^2\varphi^\cdot)\, d\varphi^\cdot + \lambda d_v f$$

Используя равенства $dd_v f = d\varphi \wedge d_v\varkappa^\cdot$, $dd_v\gamma^\cdot = -d\varphi \wedge d_v f$, можно записать

$$\Omega = (df - \varkappa^\cdot d\varphi - ad\varphi^\cdot) \wedge d_v f + (d\varkappa^\cdot + (f - a\varphi^\cdot)\, d\varphi) \wedge d_v\varkappa^\cdot + (r^2 d\varphi^\cdot - adf) \wedge d\varphi$$

Обозначим $\gamma = d\varkappa^\cdot + (f - a\varphi^\cdot)\, d\varphi$. Сравнивая коэффициенты при $d_v\varkappa^\cdot$, получаем, что $\gamma(\mathbf{X}) = 0$.

Пусть $\varkappa$ — функция, удовлетворяющая в своей области определения уравнению $L_{\mathbf{X}}\varkappa = \varkappa^\cdot$. Тогда $\Lambda(\mathbf{X}, \cdot) = 0$, если $\Lambda = \gamma \wedge (d\varkappa - d_v\varkappa^\cdot)$.

Рассмотрим уравнение

$$(\Omega + \Lambda)(\mathbf{X}, \cdot) = -dT + \lambda d_v f$$

и получим из него редуцированное уравнение при помощи равенства $f = 0$ и сужения всех форм на 0-пространства df и $d_v f$ ($\mathbf{X}$ — специальное поле)

$$\Omega(\mathbf{X}, \cdot) = -dT$$

$$\Omega = d\varkappa^\cdot \wedge d\varkappa + r^2 d\varphi^\cdot \wedge d\varphi + a\varphi^\cdot d\varkappa \wedge d\varphi$$

$$2T = \varkappa^{\cdot 2} + r^2\varphi^{\cdot 2}, \qquad \mathbf{X} = a_1 \frac{\partial}{\partial \varkappa^\cdot} + a_2 \frac{\partial}{\partial \varphi^\cdot} + \varkappa^\cdot \frac{\partial}{\partial \varkappa} + \varphi^\cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Переход к квазикоординатам и сопряженным с ними квазискоростям не индуцируется никаким диффеоморфизмом конфигурационного пространства V^n. Следовательно, если в результате такого перехода фазовое пространство имеет структуру касательного расслоения, эта структура отличается от прежней. Происходит перемешивание старых координат и скоростей.

Ниже рассматриваются уравнения вида (2.2) с однородной первой степени формой Ω, удовлетворяющей условию невырожденности

$$\Omega^n = g\omega, \quad g \neq 0 \ (\omega = dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_n \wedge dq_1^{\cdot} \wedge \ldots \wedge dq_n^{\cdot})$$

где ω — форма объема.

Можно показать, что Ω может быть представлена в виде

$$\Omega = d\alpha + \sigma, \quad \sigma = \Sigma \sigma_{ij}{}^k (\mathbf{q})\, q_k^{\cdot} dq_i \wedge dq_j \tag{2.8}$$

α — некоторая 1-форма.

3. Приводящий множитель Чаплыгина. Замена времени соответствует перепараметризации интегральной кривой, или, что то же самое, умножению вектора скорости на некоторую функцию. Интегральные кривые при этом сохраняются.

Определение 3. Векторное поле $\mathbf{X}$, заданное равенством (2.2), имеет приводящий множитель Чаплыгина, если существует такая функция $N > 0$, что поле $\mathbf{X}/N$ гамильтоново с той же функцией Гамильтона, т. е. для некоторой замкнутой дифференциальной 2-формы Ω_1

$$\Omega_1 (\mathbf{X}/N, \cdot) = -dH, \quad d\Omega_1 = 0 \tag{3.1}$$

Условия существования приводящего множителя были подробно изучены в [3]. В качестве основных можно привести следующие.

Утверждение 1. Приводящий множитель для поля X, определенного (2.2), существует, если и только если существуют такие функция $N > 0$ и 2-форма Λ, что

$$d\Omega_1 = 0, \quad \Omega_1 = N\Omega + \Lambda, \quad \Lambda (\mathbf{X}, \cdot) = 0$$

Это утверждение есть простая переформулировка определения. Следующее условие менее общо, но более конструктивно.

Утверждение 2. Если на TV^n существует такая функция P, что

$$dP \wedge \alpha = \sigma \tag{3.2}$$

то поле $\mathbf{X}$, определенное равенствами (2.2) и (2.8), имеет приводящий множитель $N = \exp P$.

Доказательство. Положим $N = \exp P$, тогда из (3.2) получим $dN \wedge \alpha = N\sigma$. Отсюда

$$d (N\Omega) = d (Nd\alpha + N\sigma) = d (Nd\alpha + dN \wedge \alpha) = 0$$

и для выполнения (3.1) осталось обозначить $\Omega_1 = N\Omega$.

Следствие. Если функция P дважды дифференцируема в окрестности A, то существует приводящий множитель $N_0 = N_0 (\mathbf{q})$.

Доказательство. По лемме Адамара

$$P = P|_{\mathbf{q}^{\cdot}=0} + \sum_{i=1}^{n} q_i^{\cdot} P_i (\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = P_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i^{\cdot} P_i$$

где P — дифференцируемые по скоростям функции. Уравнение (3.2) запишем в виде

$$(dP_0 \wedge \alpha - \sigma) + d (\Sigma q_i^{\cdot} P_i) \wedge \alpha = 0 \tag{3.3}$$

Из однородности первой степени форм α и σ следует, что (3.3) представляет собой набор уравнений вида

$$\Sigma q_i^{\cdot} a_i (\mathbf{q}) + \Sigma q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} b_{ij} (\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = 0 \tag{3.4}$$

где a_i и b_{ij} — некоторые функции, и первое слагаемое (3.4) отвечает первому слагаемому (3.3).

Дифференцируя (3.4) по $\mathbf{q}^{\cdot}$ и полагая $\mathbf{q}^{\cdot} = 0$, находим, что $a_i = 0$. Следовательно, и первое слагаемое (3.3) обращается в нуль, т. е.

$$dP_0 \wedge \alpha = \sigma, \quad N_0 = \exp P_0$$

Отметим еще следующий факт.

Теорема 2. Если для поля $\mathbf{X}$, определенного уравнением (2.2), существует приводящий множитель, и форма $N\Omega$ замкнута, то существует интегральный инвариант с плотностью $\mu = gN^{n-1}$, где g определяется равенством $\Omega^n = g\omega$, ω — форма объема.

Доказательство. По условию $N\Omega(\mathbf{X}/N, \cdot) = -dH$ и $d(N\Omega) = 0$. Пусть $\mathbf{X}/N = \mathbf{Y}$, тогда $L_{\mathbf{Y}}(N\Omega) = -ddH = 0$

$$0 = n(L_{\mathbf{Y}}N\Omega) \wedge (N\Omega)^{n-1} = L_{\mathbf{Y}}(N\Omega)^n = L_{\mathbf{X}}N^{n-1}\Omega^n = L_{\mathbf{X}}(\mu\omega)$$

Предположение об однородности $d\alpha$ и σ позволяет сделать ряд полезных утверждений.

4. Инвариантная мера. Уравнение, определяющее плотность интегрального инварианта $\mu\omega$, можно записать в различной форме, например

$$L_{\mathbf{X}}(\mu\omega) = 0 \tag{4.1}$$

Удобно еще определить функцию $W = \ln(\mu/g)$. Тогда

$$L_{\mathbf{X}}W = \varphi \tag{4.2}$$

где φ — некоторая функция.

Лемма 1. Пусть $H = T - U$; $d\alpha$ и σ однородны первой степени, поле $\mathbf{X}$ определено равенством (2.2). Тогда функция φ линейна по скоростям и не зависит от потенциала и потенциальных сил.

Доказательство. Учитывая равенство $g\omega = \Omega^n$ и проводя небольшие преобразования, получим уравнение

$$\omega L_{\mathbf{X}}W = -d\sigma(\mathbf{X}, \cdot) \wedge \Omega^{n-1}\, n/g \tag{4.3}$$

Справа и слева от знака равенства стоят $2n$-формы, т. е. произведения формы объема на некоторый коэффициент. В правой части этим коэффициентом является φ.

Форма ω содержит в качестве произведения n дифференциалов $dq_i^{\cdot}$. Сомножитель Ω может дать в это произведение не более одного. Форма $d\sigma(\mathbf{X}, \cdot)$ содержит в каждом слагаемом также не более одного дифференциала скорости. Если

$$\sigma = \Sigma\sigma_{ij}{}^k q_k^{\cdot} dq_i \wedge dq_j$$

то такими слагаемыми являются

$$\sum_{i<j} \sigma_{ij}{}^k dq_k^{\cdot} \wedge (q_i^{\cdot} dq_j - q_j^{\cdot} dq_i)$$

т. е. коэффициенты формы $d\sigma(\mathbf{X}, \cdot)$ в этих слагаемых линейны по скоростям.

Форма Ω однородна первой степени, поэтому коэффициенты при $dq_i^{\cdot}$ в ней скоростей не содержат. Для завершения доказательства заметим, что в правой части равенства (4.3) участвуют только коэффициенты форм $d\alpha$ и σ и не участвуют компоненты поля $\mathbf{X}$, зависящие от потенциала.

Теорема 3. Если специальное поле X на TV^n, определенное равенствами (2.2) и (2.8), имеет интегральный инвариант с плотностью $\mu = \mu(\mathbf{q})$ при $H = T$, т. е. при $U = 0$, то эта же функция $\mu(\mathbf{q})$ есть плотность интегрального инварианта после добавления в правую часть равенства (2.2) dU для любого $U = U(\mathbf{q})$.

Доказательство. По лемме в правой части уравнения (4.2) ничего не изменится после добавления dU. Но и левая часть не изменится, так как если $W = W(\mathbf{q})$, то

$$L_X W = \Sigma q_i^{\cdot} \partial W / \partial q_i$$

т. е. компоненты поля, зависящие от потенциала, не действуют на функции от $\mathbf{q}$.

Итак, уравнение для определения плотности останется прежним.

Однородность позволяет сделать вывод о локальном устройстве инвариантной меры в системах без потенциала.

Теорема 4. Если специальное поле $\mathbf{X}$ на TV^n, определенное равенствами (2.2) и (2.8), имеет при $U = 0$ интегральный инвариант с плотностью $\mu = \mu(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$, дважды дифференцируемой по скоростям в окрестности множества A, и кинетическая энергия T квадратична по скоростям, то

$$\mu(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = \mu_0(\mathbf{q}) F(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$$

где μ_0 — плотность интегрального инварианта, F — первый интеграл.

Доказательство. Из квадратичности T и однородности Ω следует однородность первой степени самого поля $\mathbf{X}$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству следствия утверждения 2 и основано на разложении

$$W = \ln \mu = W|_{\mathbf{q}^{\cdot}=0} + \Sigma q_i^{\cdot} W_i = W_0 + \Sigma q_i^{\cdot} W_i = \ln \mu_0 + \ln F$$

Пример. Рассмотрим движение неголономного шара Чаплыгина по горизонтальной плоскости. В $R^6 = R_\omega^3 \times R_\gamma^3$ это движение описывается уравнением

$$\begin{aligned} &\mathbf{k}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0 \\ &k = I\omega + ma^2\gamma \times (\omega \times \gamma), \quad I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3) \\ &\omega = \operatorname{col}(p, q, r), \quad \gamma = \operatorname{col}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Эти уравнения имеют интеграл $\langle \gamma, \gamma \rangle = \rho^2$ ($\langle , \rangle$ — свертка). Введем на поверхности $\rho = 1$ сферические координаты

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = \rho s_2 s_3, \quad \gamma_2 = \rho s_2 c_3, \quad \gamma_3 = \rho c_2; \quad J = -\rho^2 s_2, \\ &J_\rho = \det \| \partial(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)/\partial(\rho, \theta, \varphi) \| \\ &s_2 = \sin\theta, \quad c_2 = \cos\theta, \quad s = \sin\varphi, \quad c_3 = \cos\varphi \end{aligned} \tag{4.5}$$

Вложим эту поверхность в пространство с координатами $(\psi, \theta, \varphi, p, q, r)$ (добавили ψ) и обозначим $\mathbf{X}_s$ поле, соответствующее уравнениям (4.4):

$$\mathbf{X}_s = a_1 \frac{\partial}{\partial p} + a_2 \frac{\partial}{\partial q} + a_3 \frac{\partial}{\partial r} + (pc_3 - qs_3)\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(r - p\frac{c_2 s_3}{s_2} - q\frac{c_2 c_3}{s_2}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{4.6}$$

где a_1, a_2, a_3 — функции от $\gamma(\theta, \varphi)$.

По теореме 1 уравнения движения шара можно получить и в виде (2.2), с $TV = \{(\psi^{\cdot}, \theta^{\cdot}, \varphi^{\cdot}, \psi, \theta, \varphi)\}$. Перейдем к угловым скоростям

$$p = \psi^{\cdot} s_2 s_3 + \theta^{\cdot} c_3, \quad q = \psi^{\cdot} s_2 c_3 - \theta^{\cdot} s_3, \quad r = \psi^{\cdot} c_2 + \varphi^{\cdot} \tag{4.7}$$

и обозначим $\mathbf{X}_c$ соответствующее специальное поле.

Утверждение 3. Справедливо равенство $\mathbf{X}_c = \mathbf{X}_s + \mathbf{X}_\psi$, где $\mathbf{X}_\psi = \psi^{\cdot}\partial/\partial\psi$.

Доказательство. Определим столбцы

$$d_v\boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} d_v p \\ d_v q \\ d_v r \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} d\psi s_2 s_3 + d\theta c_3 \\ d\psi s_2 c_3 - d\theta s_3 \\ d\psi c_2 + d\varphi \end{Vmatrix}, \quad dd_v\boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} d_v r \wedge d_v q \\ d_v p \wedge d_v r \\ d_v q \wedge d_v p \end{Vmatrix}$$

и матрицу

$$B = \begin{Vmatrix} \gamma_2^2 + \gamma_3^2 & -\gamma_1\gamma_2 & -\gamma_1\gamma_3 \\ -\gamma_1\gamma_2 & \gamma_1^2 + \gamma_3^2 & -\gamma_2\gamma_3 \\ -\gamma_1\gamma_3 & -\gamma_2\gamma_3 & \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \end{Vmatrix}$$

Выпишем форму Ω явно:

$$\begin{aligned} &\Omega = d\alpha + \sigma, \quad \sigma = -\langle ma^2 B\boldsymbol{\omega}, dd_v\boldsymbol{\omega} \rangle \\ &d\alpha = d\langle (I + ma^2B)\,\boldsymbol{\omega}, d_v\boldsymbol{\omega} \rangle = \langle (I + ma^2B)\, d\boldsymbol{\omega}, d_v\boldsymbol{\omega} \rangle + \langle I\boldsymbol{\omega}, dd_v\boldsymbol{\omega} \rangle \\ &g = -3!\cdot s_2 \det \| I + ma^2 B \| \end{aligned}$$

Умножение, где это необходимо, понимается как внешнее умножение форм; γ_1, γ_2, γ_3 — функции углов Эйлера θ, φ, определенные равенством (4.5).

Непосредственная проверка показывает, что

$$\mathbf{X}_c = a_1 \frac{\partial}{\partial p} + a_2 \frac{\partial}{\partial q} + a_3 \frac{\partial}{\partial r} + \psi^{\cdot} \frac{\partial}{\partial \psi} + \theta^{\cdot} \frac{\partial}{\partial \theta} + \varphi^{\cdot} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \mathbf{X}_s + \mathbf{X}_\psi$$

где a_1, a_2, a_3 — те же, что и в равенстве (4.6).

Обозначим $J = J_\rho |_{\rho=1} = -s_2$.

Лемма 2. Векторное поле $\mathbf{X}_c$ имеет инвариантную меру $\mu J \omega_1$ где

$$\omega_1 = d\psi \wedge d\theta \wedge d\varphi \wedge dp \wedge dq \wedge dr$$
$$\mu = [(ma^2)^{-1} - \langle \gamma, (I + ma^2E)^{-1} \gamma \rangle]^{-1/2}$$

Доказательство. Для $\mathbf{X}_s$ это доказано в [5], а равенство $\mathbf{L}_{\mathbf{X}_\psi}(\mu J \omega_1) = 0$ выполнено, так как ψ не входит ни в одну функцию.

Теперь заметим, что хотя из-за особенностей системы координат (углов Эйлера) функции $\mu_1 = \mu J$ и g могут обращаться в нуль, отношение μ_1/g всегда положительно, и применение теоремы 3 дает простое утверждение.

Утверждение 4. Для любой функции $U = U(\gamma)$ дифференциальные уравнения

$$\mathbf{k}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \gamma \times U_\gamma', \quad \gamma^{\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times \gamma = 0 \tag{4.8}$$

в $R^6 = R_\omega^3 \times R_\gamma^3$ имеют инвариантную меру $\mu\omega_2$ (ω_2 — форма объема, $\omega_2 = d\gamma_1 \wedge d\gamma_2 \wedge d\gamma_3 \wedge dp \wedge dq \wedge dr$).

Можно проверить, что (4.8) — уравнения для шара Чаплыгина с произвольным потенциалом.

Автор благодарит В. М. Закалюкина и Н. К. Мощука за внимание к работе и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188 с.
2. *Вершик А. М.*, *Фаддеев Л. Д.* Дифференциальная геометрия и лангранжева механика со связями // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. Вып. 3. С. 555—557.
3. *Илиев Ил.* Об условиях существования приводящего множителя Чаплыгина // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 384—391.
4. *Козлов В. В.* О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 538—545.
5. *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 112 с.

Москва

Поступила в редакцию 15.IV.1988