

УДК 539.375

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА [ВЫБОРА К ПРОБЛЕМЕ НАЧАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ ИЗ УГЛОВОЙ ТОЧКИ

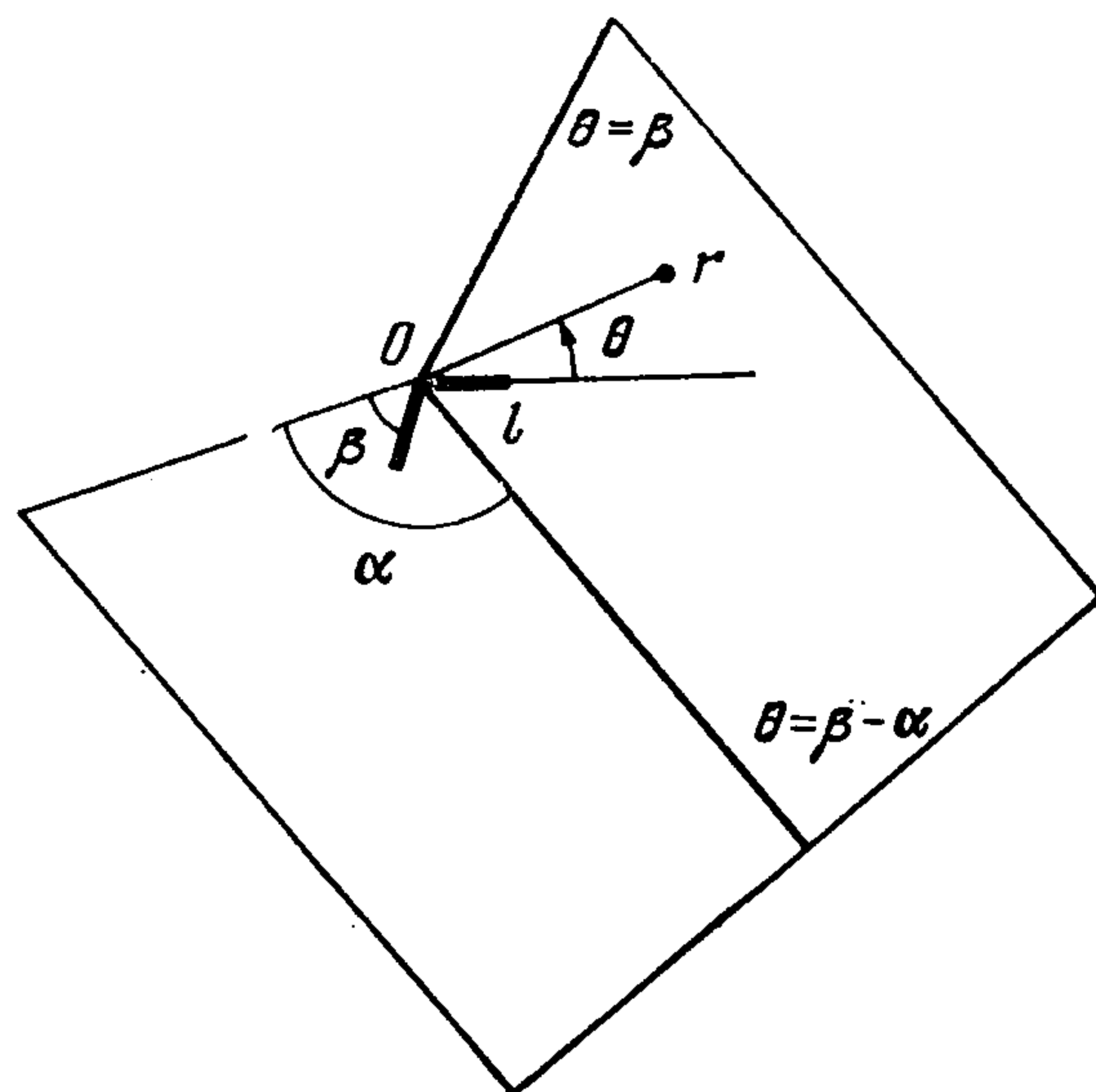
Кипнис Л. А., Черепанов Г. П.

В условиях плоской деформации рассматриваются симметричные задачи о начальном развитии вблизи угловой точки границы тела пластической зоны, моделируемой двумя прямыми линиями скольжения, исходящими из вершины. Приводятся функциональные уравнения Винера — Хопфа задач и их точные аналитические решения. Определяется длина линий скольжения и угол их наклона к границе. Для установления последнего применяется принцип выбора, согласно которому среди всех возможных направлений развития линии скольжения реализуется то, что соответствует наибольшему значению скорости диссипации энергии тела.

За последние годы в литературе по механике разрушения опубликован ряд работ, посвященных задачам о начальном развитии вблизи концентраторов в телах пластических зон, моделируемых прямыми линиями скольжения, исходящими из вершины под некоторым углом к границе [1—6]. Каждая из этих задач сводится к функциональному уравнению Винера — Хопфа, на основе решения которого устанавливается зависимость длины линии скольжения от угла ее наклона к границе, являющегося свободным параметром. За искомое принимается значение упомянутого угла, при котором длина линии скольжения максимальна. Оно определяет направление развития линии скольжения.

В данной работе предлагается новый, более строгий подход к решению вопроса о направлении развития линий скольжения, исходящих из угловых точек, основанный на принципе выбора [7]. Согласно этому принципу среди всех возможных направлений реализуется то, что соответствует наибольшему значению скорости диссипации энергии тела.

1. В условиях плоской деформации рассмотрим задачу о начальном развитии пластических деформаций вблизи угловой точки  $O$  границы однородного изотропного идеально упругопластического тела (фиг. 1). Задача считается симметричной относительно биссектрисы угла. Исследуются случаи, когда на его гранях заданы краевые условия следующих типов: а) грани жестко защемлены; б) грани свободны от напряжений; в) касательное напряжение и нормальное смещение на гранях равны нулю. Предполагается, что пластические деформации концентрируются вдоль двух исходящих из угловой точки симметричных относительно биссектрисы прямых линий скольжения, длина которых мала по сравнению с размерами тела.



Фиг. 1

Используя «принцип микроскопа» [8] и учитывая симметрию рассматриваемой задачи, в каждом из случаев а), б), в) приходим к соответствующей краевой задаче класса  $N$  [8] о равновесии бесконечного упругого клина  $\beta - \alpha < \theta < \beta$ ,  $0 < r < \infty$ ,  $\pi/2 < \alpha < \pi$ , содержащего линию скольжения в вершине. На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение канонической сингулярной задачи теории

упругости для клина [8, 9], определяемое с точностью до одной произвольной действительной постоянной  $C$ , которая характеризует интенсивность внешнего поля и считается заданной.

Требуется найти длину  $l$  линии скольжения и угол  $\beta$  ее наклона к грани.

Ниже приводятся решения указанных задач класса  $N$  и определяется функция  $l(\beta)$ . Согласно принципу выбора в качестве угла наклона линии скольжения к грани следует взять то значение  $\beta \in ]0; \alpha[$ , которое доставляет наибольшее значение функции

$$W(\beta) = \left| \tau_s \int_0^l \langle u_r \rangle |_{\theta=0} dr \right|$$

Здесь  $\tau_s$  — предел текучести на сдвиг,  $\langle a \rangle$  — скачок величины  $a$ ,  $u_r$ ,  $u_\theta$  — смещения, точка означает дифференцирование по  $C$ .

В дальнейшем предполагается, что заданный параметр нагружения  $C$  возрастает или убывает со временем (простое нагружение).

2. Пусть реализуется случай а). Граничные условия имеют вид

$$(2.1) \quad \theta = \beta, \quad u_\theta = u_r = 0; \quad \theta = \beta - \alpha, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0 \quad (\beta \in ]0; \beta_0[ \cup ]\beta_0; \alpha[)$$

$$\theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0$$

$$(2.2) \quad \theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = \tau_1; \quad \theta = 0, \quad r > l, \quad \langle u_r \rangle = 0$$

$$(2.3) \quad \theta = 0, \quad r \rightarrow l - 0, \quad \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim - \frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(l-r)}}$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow l + 0, \quad \tau_{r\theta} \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}$$

$$(2.4) \quad \theta = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_{r\theta} = Cgr^\lambda + o(1/r)$$

$$g = \frac{(2\pi)^\lambda}{2\kappa} \left[ \frac{(\lambda + 1 + \kappa) \sin \lambda \alpha}{\sin(\lambda + 2)\alpha} \sin(\lambda + 2)(\alpha - \beta) - \lambda \sin \lambda(\alpha - \beta) \right]$$

$$(\kappa = 3 - 4\nu; \quad g < 0 \text{ при } \beta \in ]0; \beta_0[; \quad g > 0 \text{ при } \beta \in ]\beta_0; \alpha[; \quad g(\beta_0) = 0)$$

Здесь  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\sigma_r$  — напряжения,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $k_{II}$  — подлежащий определению коэффициент интенсивности напряжений в голове линии скольжения,  $\lambda \in ]-1/2; 0[$  — единственный корень характеристического уравнения

$$\kappa \sin 2(\lambda + 1)\alpha - (\lambda + 1) \sin 2\alpha = 0$$

соответствующей канонической сингулярной задачи на интервале] — 1; 0[;  $C$  — упомянутая в п. 1 постоянная, имеющая размерность силы, деленной на длину в степени  $\lambda + 2$ ;  $\tau_1 = \tau_s$ , если  $Cg > 0$ ;  $\tau_1 = -\tau_s$ , если  $Cg < 0$ .

Решение сформулированной задачи представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая (задача А) отличается от исходной задачи тем, что вместо первого условия (2.2) имеем

$$(2.5) \quad \theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = \tau_1 - Cgr^\lambda$$

а на бесконечности напряжения затухают как  $o(1/r)$  (в выражении для  $\tau_{r\theta}$  в (2.4) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача — соответствующая каноническая сингулярная задача для клина. Поскольку решение второй задачи известно, остается построить решение задачи А.

Применяя интегральное преобразование Меллина с комплексным параметром  $p$  [10] к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, к условиям (2.1) и учитывая второе условие (2.2) и условие (2.5), приходим к функциональному уравнению Винера — Хопфа задачи А

$$(2.6) \quad \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda+1} + \Phi^+(p) = K(p)G(p)\Phi^-(p) \quad (-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2),$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=0}^{r=\rho l} \rho^p d\rho$$

$$\tau_2 = -Cgl^\lambda, \quad K(p) = \operatorname{ctg} p\pi$$

$$G(p) = \frac{\{\delta [\kappa_1 - 2(\kappa \sin^2 p\beta + p^2 \sin^2 \beta)] - \Delta (\kappa \sin 2p\beta - p \sin 2\beta)\} \sin p\pi}{(\kappa \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) \cos p\pi}$$

$$\Delta = \sin 2p(\alpha - \beta) + p \sin 2(\alpha - \beta), \quad \delta = \cos 2p(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta)$$

$$\kappa_1 = (\kappa + 1)^2/2$$

( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — достаточно малые положительные числа).

Решение уравнения (2.6) строится так же, как решения уравнений Винера — Хопфа задач, рассмотренных в [11]. Имеем ( $\Gamma(z)$  — гамма-функция)

$$(2.7) \quad \Phi^+(p) = -K^+(p)G^+(p) \left\{ \frac{\tau_1}{p+1} \left[ \frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} \right] + \frac{\tau_2}{p+\lambda+1} \left[ \frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)} \right] \right\}$$

( $\operatorname{Re} p < 0$ )

$$\Phi^-(p) = \frac{pG^-(p)}{K^-(p)} \left[ \frac{\tau_1}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)} + \frac{\tau_2}{(p+\lambda+1)K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0)$$

$$\exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases}$$

$$K^\pm(p) = \Gamma(1 \mp p)/\Gamma(1/2 \mp p)$$

Используя (2.7), асимптотики (2.3) и теорему абелева типа [12], находим

$$(2.8) \quad k_{II} = \frac{\sqrt{2} g \Gamma(\lambda + 3/2)}{\Gamma(\lambda + 2) G^+(-\lambda - 1)} Cl^{\lambda+1/2} - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} G^+(-1)} \tau_1 \sqrt{l}$$

Предположим, что концентрация напряжений в голове линии скольжения отсутствует. Из (2.8)

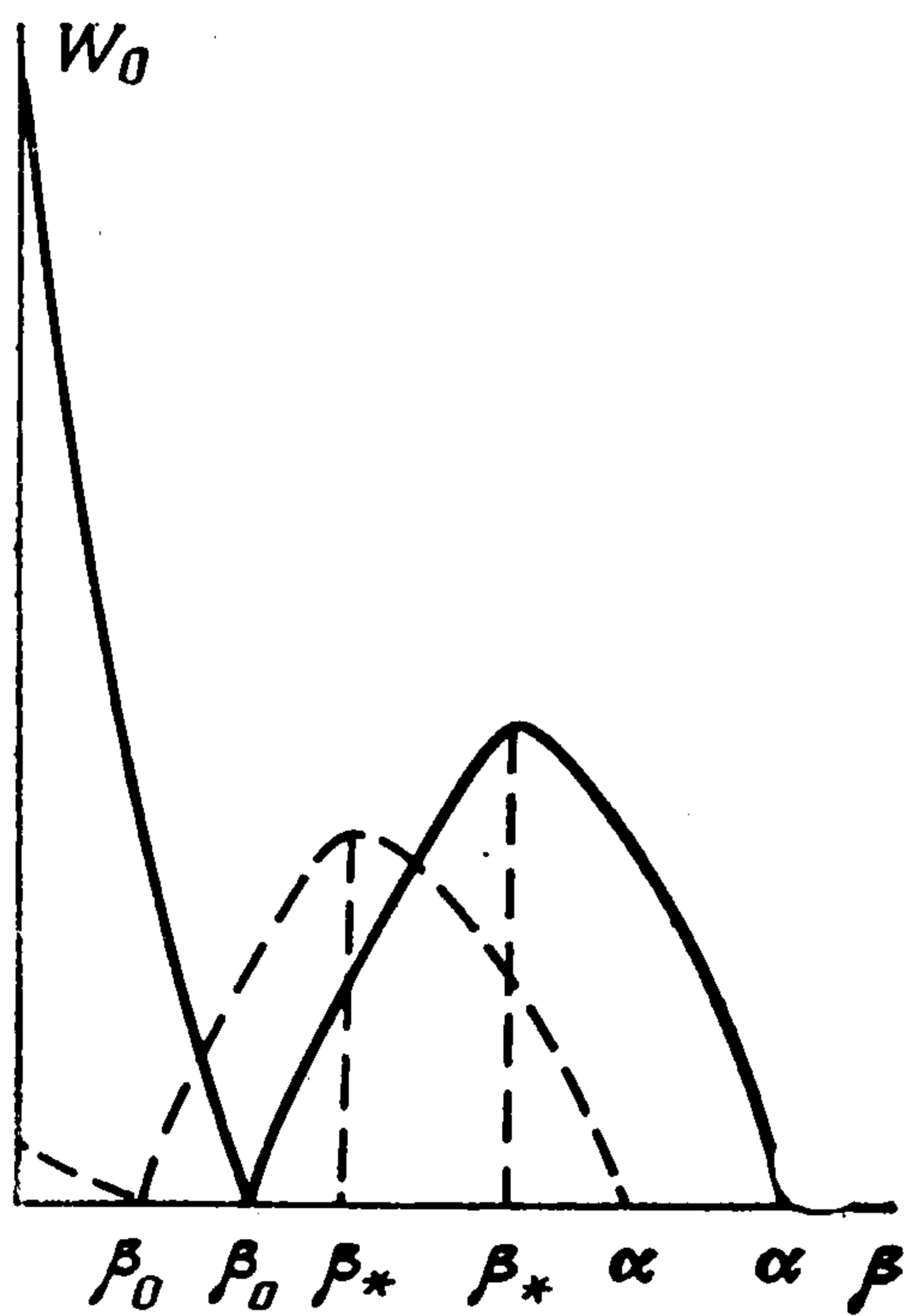
$$(2.9) \quad l = D \left( \frac{|C|}{\tau_s} \right)^{-1/\lambda}, \quad D = \left[ \frac{2|g|\Gamma(\lambda + 3/2)G^+(-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 2)G^+(-\lambda - 1)} \right]^{-1/\lambda}$$

Применим принцип выбора для определения угла наклона линии скольжения к грани. Рассмотрим функцию

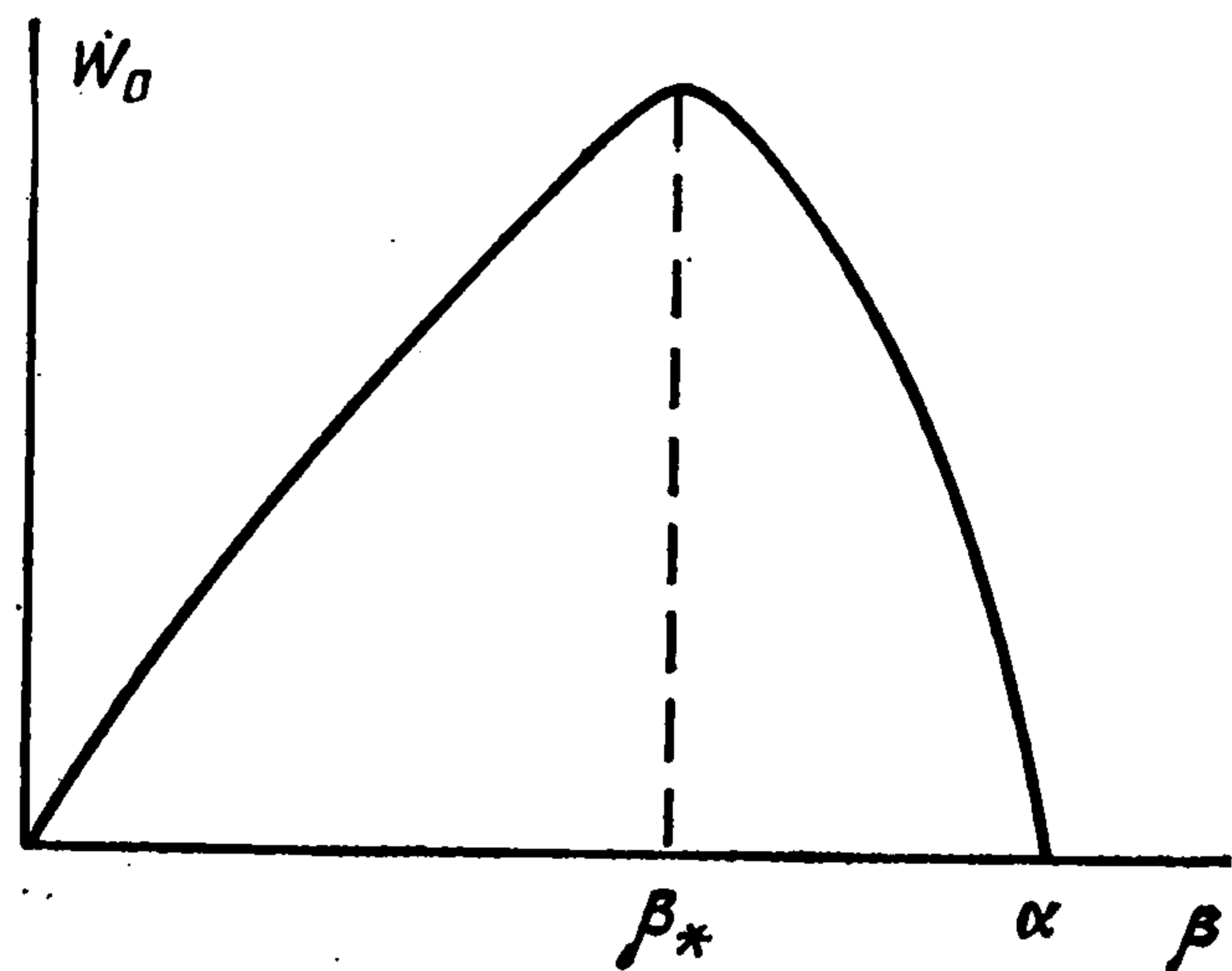
$$I(C) = \int_0^l \langle u_r \rangle |_{\theta=0} dr$$

По известной формуле дифференцирования интегралов, зависящих от параметра, с переменными пределами

$$(2.10) \quad I = \langle u_r \rangle |_{r=l, \theta=0} l + \int_0^l \langle u_r \rangle |_{\theta=0} dr$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Так как  $\langle u_r \rangle \Big|_{\substack{r=l \\ \theta=0}} = 0$ , то из (2.10) следует, что

$$(2.11) \quad I = \int_0^l \langle u_r \rangle \Big|_{\theta=0} dr$$

Используя равенство

$$I = -4(1 - \nu^2) E^{-1} \Phi^{-1}(1) l^2$$

согласно (2.7), (2.9), (2.11), получаем

$$(2.12) \quad W = Q(\alpha) W_0(\alpha, \beta) \frac{(1 - \nu^2) |C|^{-2/\lambda - 1}}{E \tau_s^{-2/\lambda - 2}}$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda + 2} \left[ \frac{2\Gamma(\lambda + 3/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + 2)} \right]^{-2/\lambda}, \quad W_0 = |g|^{-2/\lambda} \frac{[G^+(-1)]^{-2/\lambda - 2}}{[G^+(-\lambda - 1)]^{-2/\lambda}}$$

Зависимость  $W_0(\beta)$  качественно изображена на фиг. 2. Штриховая линия соответствует случаю  $\pi/2 < \alpha < \alpha_0$ , а сплошная — случаю  $\alpha_0 < \alpha < \pi$  ( $\alpha_0 \approx 11 \pi/15$  — единственный корень уравнения  $W_0[\beta_*(\alpha)] = W_0(0)$ ,  $\beta_*$  — точка максимума функции  $W_0(\beta)$ ). Оказывается, что  $W_0(\beta_*) > W_0(0)$  при  $\pi/2 < \alpha < \alpha_0$  и  $W_0(\beta_*) < W_0(0)$  при  $\alpha_0 < \alpha < \pi$ .

На основании принципа выбора для исходной симметричной задачи можно сделать следующие выводы. При  $\pi/2 < \alpha < \alpha_0$  исходящие из угловой точки  $O$  линии скольжения развиваются под углом  $\beta = \beta_*$  к граням, увеличивающимся с ростом угла раствора клина. Значения угла  $\beta_*$ , характеристического корня  $\lambda$  и коэффициента  $D$  при некоторых значениях угла  $\alpha$  приведены ниже ( $\nu = 0,25$ )

$\alpha$ , град	95	100	105	110	115	120	125	130
$\beta_*$ , град	45	50	55	59	64	68	73	77
$-\lambda \cdot 10^3$	28	54	80	106	134	162	191	221
$D \cdot 10^5$	$0,860 \cdot 10^{-3}$	$0,238 \cdot 10^{-4}$	0,0329	1,45	19,3	102	343	855

При  $\alpha_0 < \alpha < \pi$  линии скольжения развиваются вдоль граней. Соответствующие значения  $\lambda$  и  $D$  таковы:

$\alpha$ , град	135	140	145	150	155	160	165	170	175
$-\lambda \cdot 10^3$	252	284	315	346	375	403	430	455	479
$D \cdot 10^3$	28,9	55,3	86,5	119	147	170	187	196	197

Если реализуется случай  $\alpha = \alpha_0$ , то из угловой точки исходят четыре линии скольжения, две из которых расположены вдоль граней, а две — под углом к ним.

При  $\alpha = \pi$  приходим к известному результату [4, 5], где направление развития линии скольжения находится из условия максимума ее длины.

3. Пусть реализуется случай б). Граничные условия отличаются от приведенных в п. 2 тем, что вместо первого условия (2.1) имеем

$$\theta = \beta, \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (\beta \in ]0; \alpha[)$$

функция  $g > 0$  определяется формулой

$$g = \frac{(2\pi)^\lambda}{2} \left[ \lambda \sin \lambda (\alpha - \beta) - \frac{\lambda \sin \lambda \alpha}{\sin (\lambda + 2) \alpha} \sin (\lambda + 2) (\alpha - \beta) \right]$$

а  $\lambda \in ]-1/2; 0[$  представляет собой единственный корень характеристического уравнения

$$\sin 2(\lambda + 1)\alpha + (\lambda + 1) \sin 2\alpha = 0$$

соответствующей канонической сингулярной задачи на интервале  $] -1; 0[$ .

Данная задача сводится к уравнению Винера — Хопфа вида (2.6), где

$$G(p) = \frac{[2\delta (\sin^2 p\beta - p^2 \sin^2 \beta) + \Delta (\sin 2p\beta + p \sin 2\beta)] \cos p\pi}{(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \sin p\pi}$$

$$K(p) = -\operatorname{tg} p\pi$$

Используя решение этого уравнения, получим выражения для  $l$  и  $W$ , отличающиеся от (2.9), (2.12) тем, что

$$D = \left[ \frac{\sqrt{\pi} g \Gamma(\lambda + 2) G^+(-1)}{2(\lambda + 1) \Gamma(\lambda + 3/2) G^+(-\lambda - 1)} \right]^{-1/\lambda},$$

$$Q = \left[ \frac{16}{\pi(\lambda + 2)} \right] \left[ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + 2)}{2(\lambda + 1) \Gamma(\lambda + 3/2)} \right]^{-2/\lambda}$$

График функции  $W_0(\beta)$  приведен на фиг. 3. Она достигает своего наибольшего значения в точке  $\beta_*$ . Согласно принципу выбора, линии скольжения развиваются под углом  $\beta_*$  к граням. Значения этого угла, а также величин  $\lambda$  и  $D$  приведены ниже

$\alpha$ , град	95	105	115	125	135	145	155	165	175
$\beta_*$ , град	47	52	58	64	70	77	83	92	101
$-\lambda \cdot 10^3$	100	248	348	414	456	480	493	499	499
$D \cdot 10^3$	181	143	129	107	93	80	70	64	59

При  $\alpha = \pi$  формула для длины линий скольжения совпадает с известной [1, 6] (числовые множители отличаются менее чем на 0,001), а угол их наклона к продолжению трещины оказывается равным  $76^\circ$  (в [1] этот угол определяется из условия максимума длины линии скольжения и равняется  $72^\circ$ ).

4. В случае в) первое условие (2.1) заменяется следующим:

$$\theta = \beta, \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0 \quad (\beta \in ]0; \alpha[)$$

корень  $\lambda$  характеристического уравнения соответствующей канонической сингулярной задачи на интервале  $] -1; 0[$  равен  $-2 + \pi/\alpha$ , а  $g = \sin(\pi\beta/\alpha)$ .

Уравнение Винера — Хопфа рассматриваемой задачи, формулы для  $l$  и  $W$ , а также график функции  $W_0$  имеют такой же вид, как предыдущие

(см. п. 3), в которых

$$G(p) = \frac{[\delta (\sin 2p\beta + p \sin 2\beta) + \Delta (\cos 2p\beta - \cos 2\beta)] \cos p\pi}{(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) \sin p\pi}$$

Значения коэффициента  $D$  указаны ниже

$\alpha$ , град	95	105	115	125	135	145	155	165	175
$D$	1,93	2,03	2,14	2,26	2,40	2,54	2,70	2,90	3,24

Угол наклона линий скольжения к граням  $\beta_* \approx \alpha/2$  с точностью до  $0,5^\circ$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Пластические линии разрыва в конце трещины // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 720—728.
2. Черепанов Г. П. Mechanics of brittle fracture. N. Y.: McGraw-Hill, 1979. 952 p.
3. Кулиев В. Д. Пластические линии разрыва в вершине клина // Прикл. механика. 1979. Т. 15. № 3. С. 53—59.
4. Бережницкий Л. Т., Кундрат Н. М. О пластических полосах у вершины линейного жесткого включения // Проблемы прочности. 1982. № 11. С. 66—69.
5. Бережницкий Л. Т., Кундрат Н. М. О возникновении и развитии пластических деформаций в окрестности остроугольного жесткого включения // Физ.-хим. механика материалов. 1983. Т. 19. № 6. С. 60—68.
6. Кипнис Л. А., Черепанов Г. П. Линии скольжения в вершине клиновидного выреза // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 160—163.
7. Черепанов Г. П. О проблеме неединственности в теории пластичности // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 4. С. 779—782.
8. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
9. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. 1952. Vol. 19. № 4. P. 526—528.
10. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
11. Кипнис Л. А. Однородная задача для клина с симметричной трещиной в вершине // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 396—400.
12. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.

Умань, Владивосток

Поступила в редакцию  
1.X.1987