

УДК 539.383

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ РАСТУЩИХ ТЕЛ

Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В.

Исследуются контактные задачи механики наращиваемых тел. Дается общая постановка смешанной задачи для вязкоупругого стареющего тела в процессе его кусочно-непрерывного наращивания. Приводятся полные системы уравнений смешанной задачи на промежутках времени от начала загрузки до начала наращивания, от начала наращивания до остановки и после остановки.

Характерной особенностью основных соотношений при непрерывном наращивании тела является использование не обычных уравнений совместности деформаций и соотношений Коши, а их аналогов в скоростях соответствующих величин [1—3]. Кроме того, задаваемые предистории тензора деформации наращиваемых элементов образуют в момент присоединения на растущей поверхности специфическое начальное-краевое условие [2]. В частности, на поверхности роста определен полный тензор напряжений, согласованный с внешними нагрузками и характеризующий натяг наращиваемых элементов [2, 3]. Важной характеристикой процесса наращивания является момент присоединения новых элементов к основному телу. Множество моментов присоединения полностью определяет конфигурацию растущего тела в любой момент времени. Используются уравнения состояния теории ползучести неоднородно стареющих тел [4, 5]. Они отражают основные особенности процесса наращивания, где существенны моменты изготовления и начала загрузки элементов.

Предлагается метод решения получаемых смешанных краевых и начально-краевых задач. Рассматриваются контактные задачи для клина при различных способах наращивания. Выводятся интегральные уравнения и строятся их решения. Приводятся числовые расчеты контактных задач для растущего клина, когда за счет притока вещества извне увеличивается его угол раствора, и для наращиваемой четвертьплоскости. Обсуждаются качественные и количественные эффекты, в частности влияние способа и скорости наращивания на контактные характеристики.

1. О постановке и решении смешанной задачи для наращиваемого стареющего вязкоупругого тела. Пусть вязкоупругое однородное стареющее тело, изготовленное в момент времени $t = 0$, занимает область Ω_0 с поверхностью S_0 и до момента загрузки τ_0 свободно от напряжений. От момента загрузки на поверхности тела задаются в общем случае четыре типа граничных условий: на $S_1(t)$ — поверхностные силы, причем существует стационарный участок поверхности $S^* \subset S_1(t)$, где поверхностные силы равны нулю; на $S_2(t)$ — перемещения; на $S_3(t)$ — нормальные перемещения и касательные усилия; на $S_4(t)$ — нормальные усилия и касательные перемещения. Участки поверхности, на которых задаются разные граничные условия, не пересекаются и в целом занимают всю поверхность тела. Зависимость S_i от времени t учитывает возможность движения линий смены граничных условий по поверхности S_0 (движение нагрузок, штампов и т. п.). Если поверхность тела не замкнута, то на бесконечности задается поведение напряжений или перемещений.

В момент $\tau_1 \geq \tau_0$ начинается непрерывное наращивание тела элементами, изготовленными одновременно с ним. В процессе роста оно занимает область $\Omega(t)$ с поверхностью $S(t)$. Поверхность роста $S^*(t)$ ($S^*(\tau_1) = S^*$) движется в пространстве, при этом участки задания граничных условий $S_i(t)$ ($i = 1, \dots, 4$) могут изменяться за счет загрузки непод-

вижной поверхности вновь образуемой части тела [2]. Будем считать, что задаваемый на поверхности роста полный тензор напряжений согласован с нулевыми поверхностными силами на $S^*(t)$, а момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам совпадает с моментом их присоединения к основному телу.

В момент времени $\tau_2 > \tau_1$ наращивание тела прекращается и с этого момента на поверхности $S_1 = S(\tau_2)$ тела, занимающего область $\Omega_1 = \Omega(\tau_2)$, задаются четыре типа граничных условий на участках $S_i(t)$, причем участка с заданными нулевыми поверхностными силами может и не существовать, а поверхность $S_1^* = S^*(\tau_2)$ может загружаться.

Рассмотрим далее медленные процессы, такие, что в уравнениях равновесия можно пренебречь инерционными членами. Массовые силы полагаем равными нулю.

Исследуем напряженно-деформированное состояние вязкоупругого однородного стареющего тела на интервале времени $t \in [\tau_0, \tau_1]$. Имеем следующую краевую задачу:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{x} \in S_1(t): \quad \mathbf{n} \cdot \sigma = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{x} \in S^* \subset S_1(t): \quad \mathbf{n} \cdot \sigma = 0$$

$$\mathbf{x} \in S_2(t): \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{x} \in S_3(t): \quad \mathbf{nn} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma - \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{nn} = \mathbf{p}_1$$

$$\mathbf{x} \in S_4(t): \quad \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{nn} = \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{u} - \mathbf{nn} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_2$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 1/2 [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

$$\sigma = E(1 + \nu)^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0, t)) [\boldsymbol{\varepsilon} + \nu(1 - 2\nu)^{-1} I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{E}]$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)) = (\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0, t))^{-1}$$

$$\mathbf{L}(\tau_0, t) f(t) = \int_{\tau_0}^t f(\tau) K(t, \tau) d\tau$$

$$K(t, \tau) = E(\tau) (\partial/\partial\tau) [E^{-1}(\tau) + C(t, \tau)]$$

Здесь σ , $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{u} , \mathbf{p}_i и \mathbf{u}_i — тензор напряжений, деформации, вектор перемещений, задаваемые векторы поверхностных сил и перемещений (аргументы \mathbf{x} (радиус-вектор точки тела) и t (время) опущены); \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности тела; $E = E(t)$ — модуль упругомгновенной деформации при растяжении; $I_1(\boldsymbol{\varepsilon})$ — первый инвариант тензора деформации; \mathbf{E} — единичный тензор; $C(t, \tau)$ — мера ползучести при растяжении; \mathbf{I} — тождественный оператор; ∇ — набла-оператор; коэффициенты Пуассона упругомгновенной деформации и деформации ползучести совпадают и равны ν .

Поскольку набла-оператор и оператор $(\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t))$ коммутативны, полагая $\sigma^\circ = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)) \sigma E^{-1}$, преобразуем краевую задачу (1.1) к удобному для исследования и построения решения виду

$$\nabla \cdot \sigma^\circ = 0 \quad (1.2)$$

$$\mathbf{x} \in S_1(t): \quad \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)) \mathbf{p}_0 E^{-1} = \mathbf{p}^\circ$$

$$\mathbf{x} \in S^* \subset S_1(t): \quad \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ = 0; \quad \mathbf{x} \in S_2(t): \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{x} \in S_3(t): \quad \mathbf{nn} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ - \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ \cdot \mathbf{nn} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)) \cdot \mathbf{p}_1 E^{-1} = \mathbf{p}_1^\circ$$

$$\mathbf{x} \in S_4(t): \quad \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{nn} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)) \mathbf{p}_2 E^{-1} = \mathbf{p}_2^\circ, \quad \mathbf{u} - \mathbf{nn} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_2$$

$$\varepsilon = 1/2 [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

$$\sigma^\circ = (1 + \nu)^{-1} [\varepsilon + \nu (1 - 2\nu)^{-1} I_1 (\varepsilon) \mathbf{E}]$$

Решив (1.2), восстановим истинные напряжения по формуле ($R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$)

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = E(t) [\sigma^\circ(\mathbf{x}, t) + \int_{\tau_0}^t \sigma^\circ(\mathbf{x}, \tau) R(t, \tau) d\tau] \quad (1.3)$$

Рассмотрим теперь непосредственно процесс наращивания основного тела ($\tau_1 \leq t \leq \tau_2$). Смешанная начально-краевая задача для растущего тела имеет вид

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (1.4)$$

$$\mathbf{x} \in S_1(t): \mathbf{n} \cdot \sigma = \mathbf{p}_0; \quad \mathbf{x} \in S_2(t): \mathbf{u} = \mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{x} \in S_3(t): \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma - \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} = \mathbf{p}_1$$

$$\mathbf{x} \in S_4(t): \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} = \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{u} - \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{x} \in S^*(t): \sigma = \sigma^*, \quad t = \tau^*(\mathbf{x})$$

$$\varepsilon^* = 1/2 [\nabla \mathbf{u}^* + (\nabla \mathbf{u}^*)^T]$$

$$\sigma = E(1 + \nu)^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(\mathbf{x}), t)) [\varepsilon + \nu (1 - 2\nu)^{-1} I_1(\varepsilon) \mathbf{E}]$$

$$\tau_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \tau_0, & \mathbf{x} \in \Omega_0 \\ \tau^*(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega(t) \setminus \Omega_0 \end{cases}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по t , $\tau^*(\mathbf{x})$ — момент присоединения к телу элемента, характеризуемого радиусом-вектором \mathbf{x} , оператор $(\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0(\mathbf{x}), t))$ и обратный к нему $(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(\mathbf{x}), t))$ определяются из (1.1) заменой τ_0 на $\tau_0(\mathbf{x})$, $\sigma^* = \sigma^*(\mathbf{x})$ — задаваемый на $S^*(t)$ полный тензор напряжений, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{x} \in S^*(t): \mathbf{n} \cdot \sigma^* = 0 \quad (\tau_1 \leq t \leq \tau_2) \quad (1.5)$$

Как показывают соотношения (1.4), исследуемый процесс наращивания основного тела новыми элементами в общем случае приводит к определяющим соотношениям, содержащим разрывы на поверхности раздела исходного тела и наращиваемой его части. Непосредственное преобразование начально-краевой задачи к краевой задаче в скоростях соответствующих величин, изложенное в [2, 3], в этом случае порождает серьезные математические трудности.

Рассмотрим иной подход. Представим уравнение поверхности роста $S^*(t)$ при $t = \tau_1$ ($S^*(\tau_1) = S^*$) в виде $P = P(\mathbf{x}) = 0$ ($\mathbf{x} \in S^*$), где $P < 0$ при $\mathbf{x} \in \Omega_0$ и $P \geq 0$ при $\mathbf{x} \in \Omega(t) \setminus \Omega_0$. Будем считать, что P — достаточно гладкая функция, такая, что $\nabla P \neq 0$ при $P = 0$ (т. е. на поверхности S^* нет особых точек). Введем характеристическую функцию $\theta(P)$, равную единице при $P \geq 0$ и нулю при $P < 0$ [6]. Теперь оператор $\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0(\mathbf{x}), t))$ можно записать в виде

$$\mathbf{T}f(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau^\circ(\mathbf{x}), t)) f(t) - [1 - \theta(P)] L^t(\tau_0, \tau_1) f(t)$$

$$L^t(\tau_0, \tau_1) f(t) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau) K(t, \tau) d\tau$$

$$\tau^\circ(\mathbf{x}) = \tau_1 + \theta(P) [\tau^*(\mathbf{x}) - \tau_1], \quad \mathbf{x} \in S^*: \quad \tau^*(\mathbf{x}) = \tau_1$$

Можно показать, что $\mathbf{T} \nabla \cdot \sigma E^{-1} = \nabla \cdot \mathbf{T} \sigma E^{-1}$, если справедливо условие (1.5) и

$$\mathbf{x} \in S^*: \quad \mathbf{n} \cdot \sigma = 0 \quad (\tau_0 \leq t \leq \tau_1) \quad (1.6)$$

Обозначим $\sigma^\circ = \mathbf{T}\sigma E^{-1}$, тогда $(\delta(P) — обобщенная функция на гладкой поверхности — аналог дельта-функции Дирака [6, 7], $\nabla\tau^\circ(\mathbf{x}) = \theta(P)\nabla\tau^*(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma^\circ &= \mathbf{T}\nabla \cdot \sigma E^{-1} + \theta(P)\nabla\tau^*(\mathbf{x}) \cdot \sigma^*(\mathbf{x})E^{-1}(\tau^*(\mathbf{x}))K(t, \tau^*(\mathbf{x})) + \\ &+ \delta(P)\nabla P \cdot \mathbf{L}^t(\tau_0, \tau_1)\sigma E^{-1} \end{aligned}$$

Второе слагаемое этого выражения равно нулю: при $\mathbf{x} \in \Omega_0$ в силу определения $\theta(P)$, а при $\mathbf{x} \in \Omega(t) \setminus \Omega_0$ в силу (1.5) (напомним, что $\nabla\tau^*(\mathbf{x})$ совпадает по направлению с нормалью к поверхности роста $S^*(t)$ [2, 3]). Третье слагаемое равно нулю вследствие (1.6), так как ∇P при $\mathbf{x} \in S^*$ совпадает по направлению с нормалью к S^* . Условия (1.5), (1.6) являются достаточными условиями коммутативности операторов \mathbf{T} и дивергенции на множестве тензорзначных функций, определенных в области $\Omega(t)$, и имеют следующий механический смысл: поверхность исходного тела, к которой будет происходить приток вещества, до момента начала наращивания не загружается, как не загружается и сама поверхность роста в процессе наращивания.

Подействуем оператором \mathbf{T} на выражения из (1.4), содержащие σ , предварительно разделив их на E , тогда

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma^\circ &= 0 & (1.7) \\ \mathbf{x} \in S_1(t): \quad \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ &= \mathbf{T}p_0 = p^\circ; \quad \mathbf{x} \in S_2(t): \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{x} \in S_3(t): \quad \mathbf{nn} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ - \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ \cdot \mathbf{nn} = \mathbf{T}p_1 = p_1^\circ \\ \mathbf{x} \in S_4(t): \quad \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{T}p_2 = p_2^\circ, \quad \mathbf{u} - \mathbf{nn} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{x} \in S^*(t): \quad \sigma^\circ &= \sigma^{\circ*} = \sigma^*E^{-1}, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma^* = 0, \quad t = \tau^*(\mathbf{x}) \\ \varepsilon^\circ &= 1/2 [\nabla\mathbf{u}^\circ + (\nabla\mathbf{u}^\circ)^T] \\ \sigma^\circ &= (1 + \nu)^{-1} [\varepsilon^\circ + \nu(1 - 2\nu)^{-1} I_1(\varepsilon^\circ) \mathbf{E}] \end{aligned}$$

Соотношения (1.7) представляют собой начально-краевую задачу с операторными напряжениями σ° , определяющие соотношения которой не имеют разрывов.

Преобразуем начально-краевую задачу (1.7) к краевой задаче относительно скоростей σ° , ε и \mathbf{u} . Для этого продифференцируем по t уравнения равновесия, граничные условия на $S_i(t)$ ($i = 1, \dots, 4$) и уравнения состояния. Для вывода граничного условия на $S^*(t)$ подействуем оператором дивергенции на начально-краевое условие $\sigma^\circ(\mathbf{x}, \tau^*(\mathbf{x})) = \sigma^{\circ*}(\mathbf{x})$ (см. также [2]), тогда $\mathbf{n} \cdot \sigma^\circ = \nabla \cdot \sigma^{\circ*} |\nabla\tau^*(\mathbf{x})|^{-1}$ ($\mathbf{x} \in S^*(t)$). Заметим, что

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma^{\circ*} &= \nabla \cdot (\sigma^*(\mathbf{x}) E^{-1}(\tau^*(\mathbf{x}))) = \nabla \cdot \sigma^*(\mathbf{x}) E^{-1}(\tau^*(\mathbf{x})) - \\ &- \nabla\tau^*(\mathbf{x}) \cdot \sigma^*(\mathbf{x}) E^{-2}(\tau^*(\mathbf{x})) E'(\tau^*(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

где второе слагаемое равно нулю в силу условия (1.5). Окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma^\circ &= 0 & (1.8) \\ \mathbf{x} \in S_1(t): \quad \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ &= p^\circ = \mathbf{G}p_0, \quad \mathbf{x} \in S_2(t): \quad \mathbf{u}^\circ = \mathbf{u}_0^\circ \\ \mathbf{x} \in S_3(t): \quad \mathbf{nn} \cdot \mathbf{u}^\circ &= \mathbf{u}_1^\circ, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ - \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ \cdot \mathbf{nn} = p_1^\circ = \mathbf{G}p_1 \\ \mathbf{x} \in S_4(t): \quad \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ \cdot \mathbf{nn} &= p_2^\circ = \mathbf{G}p_2, \quad \mathbf{u}^\circ - \mathbf{nn} \cdot \mathbf{u}^\circ = \mathbf{u}_2^\circ \\ \mathbf{x} \in S^*(t): \quad \mathbf{n} \cdot \sigma^\circ &= \nabla \cdot \sigma^*E^{-1} |\nabla\tau^*|^{-1}, \quad t = \tau^*(\mathbf{x}) \\ \varepsilon^\circ &= 1/2 [\nabla\mathbf{u}^\circ + (\nabla\mathbf{u}^\circ)^T] \\ \sigma^\circ &= (1 + \nu)^{-1} [\varepsilon^\circ + \nu(1 - 2\nu)^{-1} I_1(\varepsilon^\circ) \mathbf{E}] \\ \mathbf{G}f(t) &= \frac{f(t)}{E(t)} + \int_{\tau_0(\mathbf{x})}^t \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} d\tau + f(\tau_0(\mathbf{x})) \frac{\partial C(t, \tau_0(\mathbf{x}))}{\partial t} \end{aligned}$$

Таким образом, начально-краевая задача наращивания вязкоупругого стареющего тела (1.4) приведена к краевой задаче (1.8) для скоростей перемещений \mathbf{u}° , деформаций ε° и операторных напряжений σ° , где время t играет роль параметра. Заметим, что краевые задачи (1.2) и (1.8) матема-

тически эквивалентны, поскольку граничные условия на $S_1(t)$ и $S^*(t)$ в задаче (1.8) идентичны, т. е. на поверхности задается, как и в задаче с фиксированной границей, всего четыре типа граничных условий.

После решения (1.8) напряжения и перемещения в растущем теле при $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ можно найти по формулам

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} \in \Omega_0: \quad \sigma(\mathbf{x}, t) = E(t) \left\{ \left[\frac{\sigma(\mathbf{x}, \tau_1)}{E(\tau_1)} - \right. \right. & \quad (1.9) \\
 - \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\sigma(\mathbf{x}, \tau)}{E(\tau)} K(\tau_1, \tau) d\tau \left. \right] \left[1 + \int_{\tau_1}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \\
 + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\sigma(\mathbf{x}, \tau)}{E(\tau)} K(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t \sigma^\circ(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \\
 + \int_{\tau_1}^t \left[\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\sigma(\mathbf{x}, z)}{E(z)} K(\tau, z) dz + \int_{\tau_1}^{\tau} \sigma^\circ(\mathbf{x}, z) dz \right] R(t, \tau) d\tau \left. \right\} \\
 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \mathbf{u}'(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\
 \mathbf{x} \in \Omega(t) \setminus \Omega_0: \quad \sigma(\mathbf{x}, t) = E(t) \left\{ \frac{\sigma^*(\mathbf{x})}{E(\tau^*(\mathbf{x}))} \left[1 + \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right. \\
 + \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \left[\sigma^\circ(\mathbf{x}, \tau) + \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^{\tau} \sigma^\circ(\mathbf{x}, z) dz R(t, \tau) \right] d\tau \left. \right\} \\
 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \mathbf{u}'(\mathbf{x}, \tau) d\tau
 \end{aligned}$$

При выводе (1.9) использовались соотношения вида

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \omega(\mathbf{x}, \tau^\circ(\mathbf{x})) + \int_{\tau^\circ(\mathbf{x})}^t \omega'(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

обращения операторов Вольтерры и известная информация о напряжениях и перемещениях при $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$, полученная на предыдущем шаге. Начальные значения перемещений в наращиваемой части тела $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau^*(\mathbf{x}))$ полагались равными нулю [2, 3].

Соотношения (1.8), (1.9) показывают, что на напряженно-деформированное состояние растущего вязкоупругого тела влияет вся история его загрузки и наращивания. Кроме того, на основе этих соотношений можно найти такие режимы загрузки, при которых влияние наращивания на состояние исходного тела будет весьма мало, а сама растущая часть тела будет практически не деформирована. Действительно, если предположить, что загружается поверхность только исходного тела, воздействия стационарны, наращивание происходит без натяга и момент начала наращивания гораздо больше момента загрузки, то, пользуясь свойством ограниченной ползучести вязкоупругого материала $\lim_{t \rightarrow \infty} \partial C(t, \tau) / \partial t = 0$, на основании (1.8), (1.9) придем к сформулированным выше выводам. К тем же выводам приводит анализ режима загрузки, при котором воздействия длительное время до начала наращивания остаются постоянными, независимо от их изменений в предыдущие моменты (предполагается, что, выйдя на стационарные значения, воздействия больше не изменяются).

Рассмотренные эффекты имеют ясный механический смысл. Вязкоупругое тело в условиях ограниченной ползучести при стационарных воздействиях с течением времени практически перестает деформироваться. Его последующее наращивание ненапряженными элементами приводит к ситуации, когда взаимное влияние исходного тела и выросшей его части несущественно.

Пусть теперь в момент времени τ_2 наращивание тела прекращается. В этот момент оно занимает область Ω_1 с поверхностью S_1 , на которой задаются четыре типа граничных условий, причем $S^*(\tau_2) = S_1^* \subset S_i(t)$ ($i = 1, \dots, 4$). В этом случае краевая задача имеет вид (1.4), где отсутствует начально-краевое условие на $S^*(t)$ и $\tau^*(x) = \tau_2$ при $x \in S_1^*(t \geq \tau_2)$. После преобразований, аналогичных проделанным выше для начально-краевой задачи наращивания, краевая задача для определения напряженно-деформированного состояния после остановки принимает вид (1.8), где опускаем условие на растущей поверхности. Напряжения и перемещения в этом случае отыскиваются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) = E(t) \left\{ \left[\frac{\sigma(x, \tau_2)}{E(\tau_2)} - \int_{\tau_0(x)}^{\tau_2} \frac{\sigma(x, \tau)}{E(\tau)} K(\tau_2, \tau) d\tau \right] \times \right. & (1.10) \\ \times \left[1 + \int_{\tau_2}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \int_{\tau_0(x)}^{\tau_2} \frac{\sigma(x, \tau)}{E(\tau)} K(t, \tau) d\tau + \\ + \int_{\tau_2}^t \sigma^\circ(x, \tau) d\tau + \int_{\tau_2}^t \left[\int_{\tau_0(x)}^{\tau_2} \frac{\sigma(x, z)}{E(z)} K(\tau, z) dz + \right. \\ \left. + \int_{\tau_2}^{\tau} \sigma^\circ(x, z) dz \right] R(t, \tau) d\tau \left. \right\} \\ u(x, t) = u(x, \tau_2) + \int_{\tau_2}^t u'(x, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Замечание 1. На основании предложенного метода можно рассмотреть кусочно-непрерывный процесс наращивания вязкоупругого стареющего тела с любым конечным числом моментов начала роста и остановок. При этом участки поверхности тела, к которым будет происходить приток вещества, не должны загружаться. Свободной от нагрузок должна быть и поверхность роста в процессе наращивания. Если на некотором участке этой поверхности предполагается после остановки через определенное время продолжить наращивание, то этот участок также не должен загружаться. Задачу с n моментами начала роста (и, естественно, с n остановками) можно привести к исследованию $2n + 1$ однотипных задач, где время является параметром, а напряженно-деформированное состояние вязкоупругого тела восстанавливается по известным формулам типа (1.9) и (1.10).

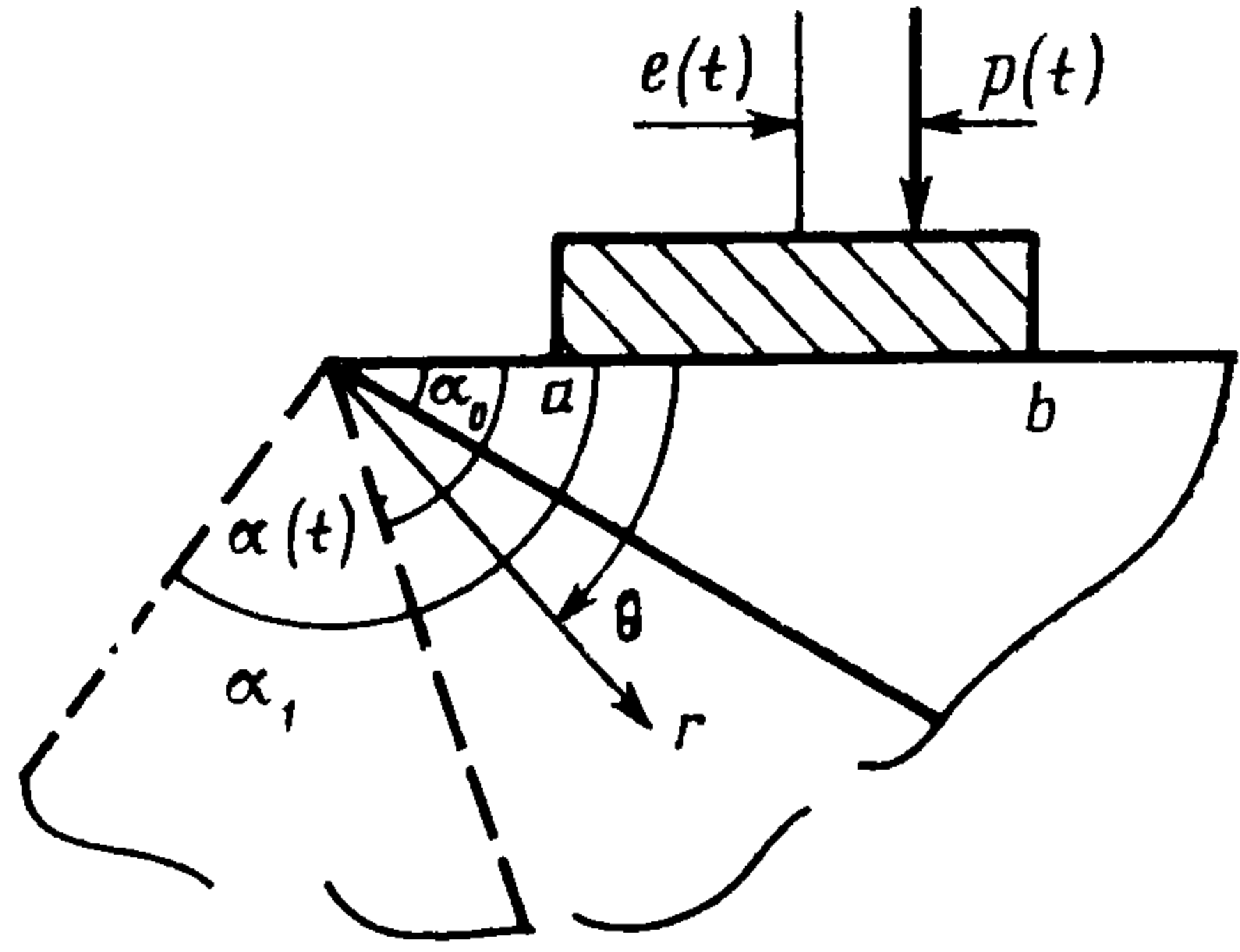
2. О взаимодействии вязкоупругого стареющего клина с гладким жестким штампом при угловом наращивании. Рассмотрим однородный стареющий клин с углом раствора α_0 , изготовленный в нулевой момент времени (фиг. 1). В момент времени τ_0 в одну из граней клина на участке $a \leq r \leq b$ начинает вдавливаться гладкий жесткий штамп с формой основания $g(r)$. На штамп действует сила $P(t)$ и момент $M(t)$, эксцентриситет приложения силы равен $e(t)$. Другая грань клина свободна от напряжений.

В момент времени τ_1 незагруженная грань начинает наращиваться ненапряженными элементами так, что с течением времени изменяется угол раствора клина $\alpha(t)$. Наращивание по такому закону назовем угловым,

В момент времени τ_2 рост клина прекращается, угол его раствора к этому моменту равен $\alpha_1 < 2\pi$, а грань, к которой происходил приток вещества, свободна от напряжений и при $t \geq \tau_2$.

Будем считать, что приращиваемые элементы изготовлены одновременно с исходным телом, а перемещения точек клина при $r \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Кли́н находится в условиях плоской деформации.

Заменим штамп некоторой нормальной распределенной нагрузкой $-q(r, t)$, действующей на том же участке. На основании разд. 1 придем к решению трех краевых задач: относительно σ° и u на интервале от момента загрузки до начала наращивания, σ° и u° — от начала наращивания до остановки и от остановки до сколь угодно большого значения времени. Применяя технику интегрального преобразования Меллина [8] и контурного интегрирования [9], после ряда выкладок найдем связь перемещения $u_\theta(r, \theta, t) \times (\tau_0 \leq t \leq \tau_1)$ с операторным значением нагрузки $q^\circ(r, t)$ и скорости перемещения $u_\theta^\circ(r, \theta, t)$ ($\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ и $t \geq \tau_2$) со скоростью операторной нагрузки $q^{\circ\circ}(r, t)$. Приравнявая $u_\theta(r, \theta, t)$ и $u_\theta^\circ(r, \theta, t)$ при $\theta = 0$ и $a \leq r \leq b$ перемещению и скорости перемещения штампа как жесткого целого, получим интегральные уравнения задачи в виде



Фиг. 1

$$\int_a^b k(\rho, r, \alpha_0) q^\circ(\rho, t) d\rho = \mu [\omega(t)r - g(r)] \quad (\tau_0 \leq t \leq \tau_1) \quad (2.1)$$

$$\int_a^b k(\rho, r, \alpha(t)) q^\circ(\rho, t) d\rho = \mu \dot{\omega}(t)r \quad (\tau_1 \leq t \leq \tau_2) \quad (2.2)$$

$$\int_a^b k(\rho, r, \alpha_1) q^\circ(\rho, t) d\rho = \mu \dot{\omega}(t)r \quad (t \geq \tau_2) \quad (2.3)$$

$$k(\rho, r, \lambda) = \int_0^\infty \frac{p \sin 2\lambda + \text{sh } 2\lambda p}{2p (\text{sh}^2 \lambda p - p^2 \sin^2 \lambda)} \cos p\eta dp + \frac{1}{2} \eta \zeta(\lambda)$$

$$\zeta(\lambda) = \frac{1}{2}\pi (2\lambda + \sin 2\lambda) / (\lambda^2 - \sin^2 \lambda)$$

$$\eta = \ln(\rho/r), \quad \mu^{-1} = 2(1 - \nu^2)/\pi$$

где $\omega(t)$ — угол поворота штампа.

Заметим, что интеграл в выражении для $k(\rho, r, \lambda)$ существует только в смысле обобщенных функций и его регуляризация определена с точностью до произвольного функционала, сосредоточенного в нуле [6]. Как следствие, рассматриваемые перемещение и скорость перемещения точек клина определены с точностью до произвольной аддитивной функции времени, поэтому в правой части (2.1)—(2.3) опущены члены, характеризующие осадку и скорость осадки штампа.

К уравнениям (2.1)—(2.3) следует добавить условия равновесия штампа, справедливые для любого момента времени

$$P(t) = \int_a^b q(r, t) dr, \quad M(t) = \int_a^b \left(r - \frac{a+b}{2}\right) q(r, t) dr \quad (2.4)$$

В исследуемой контактной задаче возможны две ситуации: 1) когда известны сила и угол поворота, а отыскиваются контактные давления и эксцентриситет приложения силы (момент); 2) когда известны сила и эксцентриситет (момент), а определяются контактные напряжения и угол поворота штампа.

Первое условие (2.4) в обоих случаях удобно преобразовать к виду ($G^\circ = G$ при $x \in \Omega_0$ (см. (1.8)))

$$\int_a^b q^\circ(\rho, t) d\rho = (I - L(\tau_0, t)) P(t) E^{-1} = P^\circ(t) \quad (\tau_0 \leq t \leq \tau_1) \quad (2.5)$$

$$\int_a^b q^{\circ\circ}(\rho, t) d\rho = G^\circ P(t) \quad (t \geq \tau_1)$$

Второе условие (2.4) в случае 1) имеет вид

$$\int_a^b \rho q(\rho, t) d\rho = M(t) + \frac{a+b}{2} P(t) \quad (t \geq \tau_0) \quad (2.6)$$

$$e(t) = M(t) P^{-1}(t)$$

а в случае 2) берется в форме

$$\int_a^b \rho q^\circ(\rho, t) d\rho = (I - L(\tau_0, t)) \left(M(t) + \frac{a+b}{2} P(t) \right) E^{-1} \quad (\tau_0 \leq t \leq \tau_1) \quad (2.7)$$

$$\int_a^b \rho q^{\circ\circ}(\rho, t) d\rho = G^\circ \left(M(t) + \frac{a+b}{2} P(t) \right) \quad (t \geq \tau_1)$$

Исследуем уравнение, включающее (2.1)–(2.3) как частные случаи, с дополнительным условием типа (2.5). Запишем их в виде

$$\frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \int_a^b k(\rho, r, \lambda) \varphi(\rho, t) d\rho = \psi(t)r - h(r) \quad (2.8)$$

$$\int_a^b \varphi(\rho, t) d\rho = \kappa(t)$$

Аппроксимируем множитель подынтегральной функции ядра $k(\rho, r, \lambda)$, представленный дробью (см. (2.3) и далее), функцией $\text{cth}[\pi \zeta^{-1}(\lambda)p] p^{-1}$. Погрешность такой аппроксимации при всех $p \in [0, \infty]$ и $0 < \lambda \leq 2\pi$ не превосходит 15%, а для $\pi/2 \leq \lambda \leq 2\pi$ не превосходит 5% [10, 11]. Тогда, используя регуляризацию интеграла [12]

$$\int_0^\infty \frac{\text{cth} \pi \zeta^{-1}(\lambda) p}{p} \cos p\eta dp = -\ln \left[2 \text{sh} \frac{\zeta(\lambda)\eta}{2} \right]$$

определим выражение для ядра уравнения (2.8)

$$k(\rho, r, \lambda) = -\ln [(\rho^{\zeta(\lambda)} - r^{\zeta(\lambda)})/\rho^{\zeta(\lambda)}] \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.8) и дифференцируя по r (эту операцию обозначим штрихом) полученное уравнение, будем иметь (см. также [10])

$$\frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \int_a^b \frac{\zeta(\lambda) r^{\zeta(\lambda)-1}}{\rho^{\zeta(\lambda)} - r^{\zeta(\lambda)}} \varphi(\rho, t) d\rho = \psi(t) - h'(r) \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) заменами переменных приводится к хорошо изученному сингулярному интегральному уравнению (например, [13]).

Решение уравнения (2.10) с учетом дополнительного условия (2.8) получим в виде

$$\varphi(r, t) = \frac{\xi(\lambda) r^{\xi(\lambda)-1}}{\pi [(r^{\xi(\lambda)} - a^{\xi(\lambda)})(b^{\xi(\lambda)} - r^{\xi(\lambda)})]^{1/2}} \left\{ \kappa(t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2(1-\nu^2)} \int_a^b [(\rho^{\xi(\lambda)} - a^{\xi(\lambda)})(b^{\xi(\lambda)} - \rho^{\xi(\lambda)})]^{1/2} \frac{\psi(t) - h'(\rho)}{\rho^{\xi(\lambda)} - r^{\xi(\lambda)}} d\rho \right\} \quad (2.11)$$

Для получения решения уравнения (2.1) с учетом дополнительного условия (2.5) ($\tau_0 \leq t \leq \tau_1$) в соотношении (2.11) следует положить $\varphi(r, t) = q^\circ(r, t)$, $\lambda = \alpha_0$, $\kappa(t) = P^\circ(t)$, $\psi(t) = \omega(t)$, $h'(\rho) = g'(\rho)$. Если угол поворота штампа задан, то операторные напряжения $q^\circ(r, t)$ определены, остается только восстановить контактные напряжения по формуле (1.3) и найти эксцентриситет приложения силы, пользуясь соотношениями (2.6). Если известен момент, то выражение для $q^\circ(r, t)$, полученное из (2.11), и первое условие (2.7) образуют систему уравнений для отыскания $q^\circ(r, t)$ и $\omega(t)$, после решения которой при помощи (1.3) определяются напряжения $q(r, t)$.

Решение уравнения (2.2) при условии (2.5) ($\tau_1 \leq t \leq \tau_2$) получим, положив в (2.11) $\varphi(r, t) = q^\circ(r, t)$, $\lambda = \alpha(t)$, $\kappa(t) = G^\circ P(t)$, $\psi(t) = \omega(t)$, $h'(\rho) = 0$. В случае 1) для отыскания $q(r, t)$ и $e(t)$ воспользуемся формулами (1.9) и (2.6), а в случае 2) найдем $q(r, t)$ и $\omega(t)$ при помощи второго условия (2.7) и (1.9).

Решение (2.3) и (2.5) ($t \geq \tau_2$) найдем, полагая в отличие от рассмотренного выше $\lambda = \alpha_1$. Аналогично определим $q(r, t)$ и $e(t)$ или $q(r, t)$ и $\omega(t)$, воспользовавшись формулами (1.10) вместо (1.9).

Замечание 2. При конкретных расчетах необходимо вычислять интегралы вида

$$I = \int_a^b \frac{\xi^\nu}{[(\xi - a)(b - \xi)]^{1/2}} d\xi$$

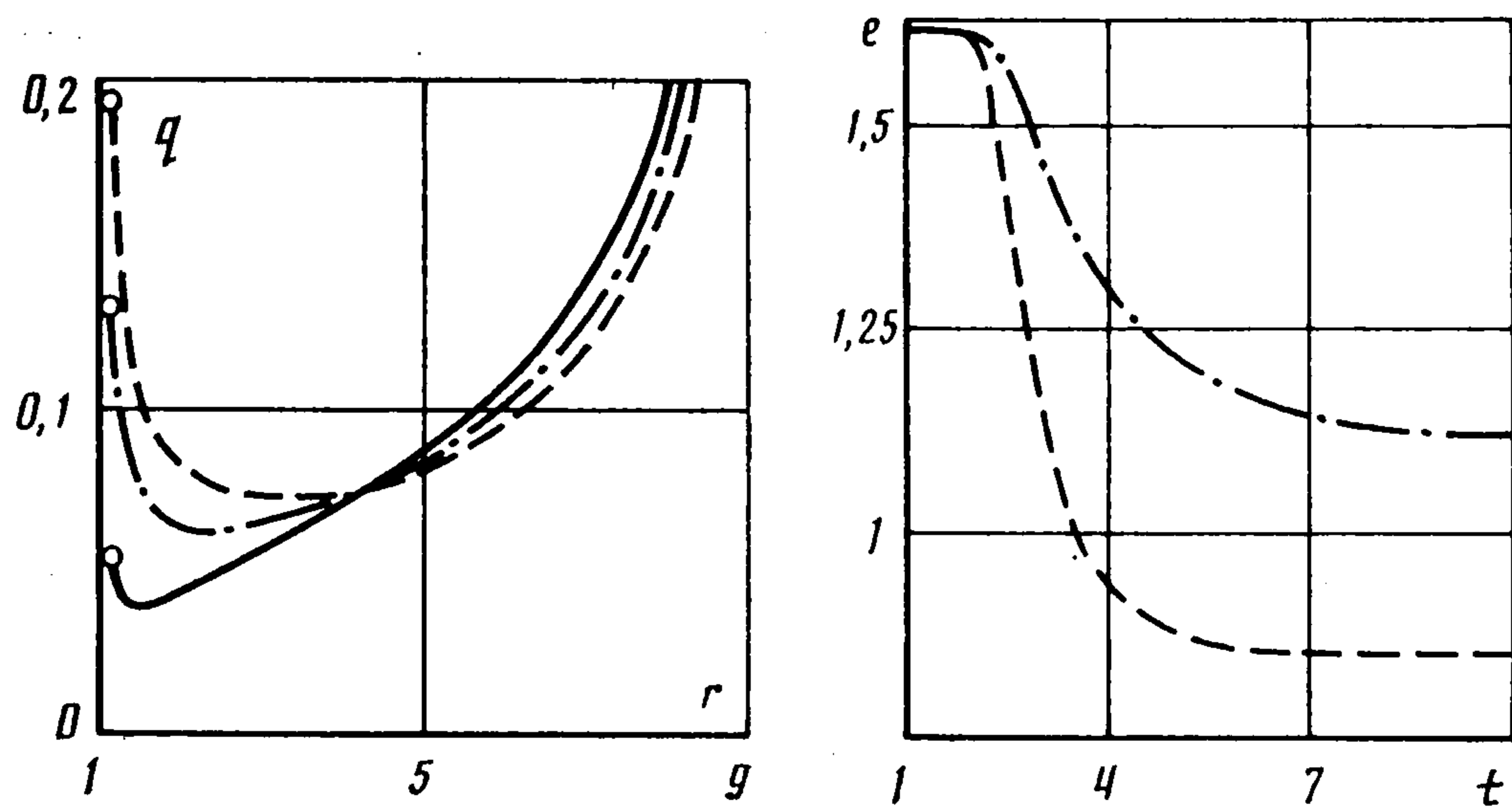
Их удастся свести к определенным интегралам без особенностей, при этом справедлива формула

$$I = \frac{a^\nu + b^\nu}{2} \pi + \int_0^1 \left\{ \left[\frac{a + b + (b - a)z}{2} \right]^\nu + \left[\frac{a + b - (b - a)z}{2} \right]^\nu - \right. \\ \left. - b^\nu - a^\nu \right\} (1 - z^2)^{-1/2} dz$$

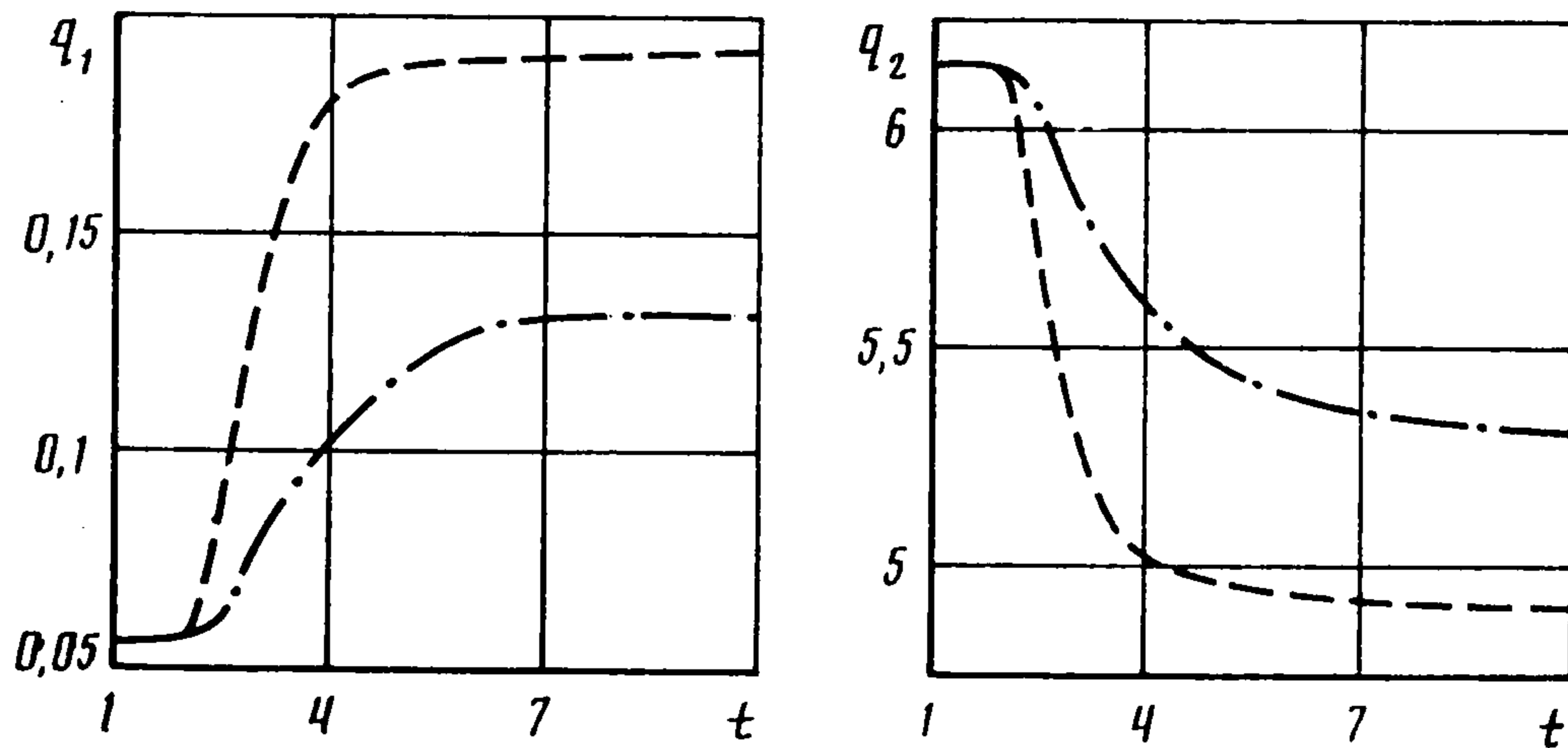
Пример 1. Рассмотрим контактную задачу для клина при угловом наращивании ненапряженными элементами. Начальный угол раствора $\alpha_0 = \pi/2$, угол раствора в момент остановки $\alpha_1 = \pi$. Основание штампа считается плоским, причем задается постоянная сила и нулевой угол поворота, а отыскиваются контактные напряжения и эксцентриситет приложения силы, обеспечивающий отсутствие перекоса штампа. Скорость наращивания полагаем постоянной, тогда момент начала наращивания τ_1 и момент остановки τ_2 полностью определяют функцию $\alpha(t)$ и, таким образом, конфигурацию тела в любой момент времени. Материалом клина выберем бетон. Перейдем к безразмерным величинам по формулам

$$\begin{aligned} r^* &= ra^{-1}, \quad \rho^* = \rho a^{-1}, \quad e^*(t^*) = e(t)a^{-1}, \quad t^* = t\tau_0^{-1} \\ \tau^* &= \tau\tau_0^{-1}, \quad \tau_1^* = \tau_1\tau_0^{-1}, \quad \tau_2^* = \tau_2\tau_0^{-1}, \quad c = ba^{-1} \\ \alpha^*(t^*) &= \alpha(t), \quad q^*(r^*, t^*) = q(r, t)E^{-1}(t), \quad P^*(t^*) = P(t)E^{-1}(t)a^{-1} \\ K^*(t^*, \tau^*) &= K(t, \tau)\tau_0, \quad g^*(r^*) = g(r)a^{-1}, \quad \omega^*(t^*) = \omega(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

(звездочки далее опустим). Считая упругие характеристики постоянными, зададимся следующими значениями функций и параметров [5, 14, 15] (заметим, что в рассматри-



Фиг. 2



Фиг. 3

ваемом примере решение не зависит от коэффициента Пуассона):

$$C(t, \tau) = (C_0 + A_0 e^{-\beta\tau})(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}), \quad \alpha(t) = \frac{1}{2}\pi(t + \tau_2 - 2\tau_1)/(\tau_2 - \tau_1), \quad P(t) = 1, \\ C_0 = 0,5522, \quad A_0 = 4, \quad \beta = 0,31, \quad \gamma = 0,6, \quad c = 9, \\ \omega(t) = 0, \quad g(r) = 0, \quad \tau_0 = 1$$

Исследуем случаи медленного ($\tau_1 = 2, \tau_2 = 10, \alpha(t) = \pi/16$) и быстрого ($\tau_1 = 2, \tau_2 = 4, \alpha(t) = \pi/4$) углового наращивания клина. Всюду далее на графиках штрихпунктирными кривыми будем обозначать величины основных характеристик при медленном наращивании, штриховыми — при быстром (его скорость вчетверо больше, чем при медленном), а сплошными — от момента начала загрузки до момента начала наращивания.

На фиг. 2 представлены предельные распределения контактных давлений под штампом q при $t \rightarrow \infty$ и разных скоростях наращивания (штриховая и штрихпунктирная линии), а также распределение от момента τ_0 до момента τ_1 , которое с течением времени на этом интервале не меняется (сплошная линия). На краях штампа функции распределений имеют особенности, но для удобства графического исполнения область $r < 0,1$ исключена, а значения напряжений при $r = 0,1$ обозначены точками. На той же фигуре даны зависимости эксцентриситета приложения силы e от времени t .

На фиг. 3 показаны изменения по времени контактных напряжений q_1 у левого края штампа ($r = 0,1$) и q_2 у правого края ($r = 8,9$) для двух заданных процессов.

Видно, что процессы, характеризуемые скоростью наращивания, имеют существенные качественные и количественные различия. При быстром наращивании наиболее интенсивное изменение напряжений и эксцентриситета идет на интервале $t \in [\tau_1, \tau_2]$ и продолжается после остановки роста. Напряжения при этом, например у левого края, возрастают в 3,5 раза, а эксцентриситет уменьшается почти вдвое.

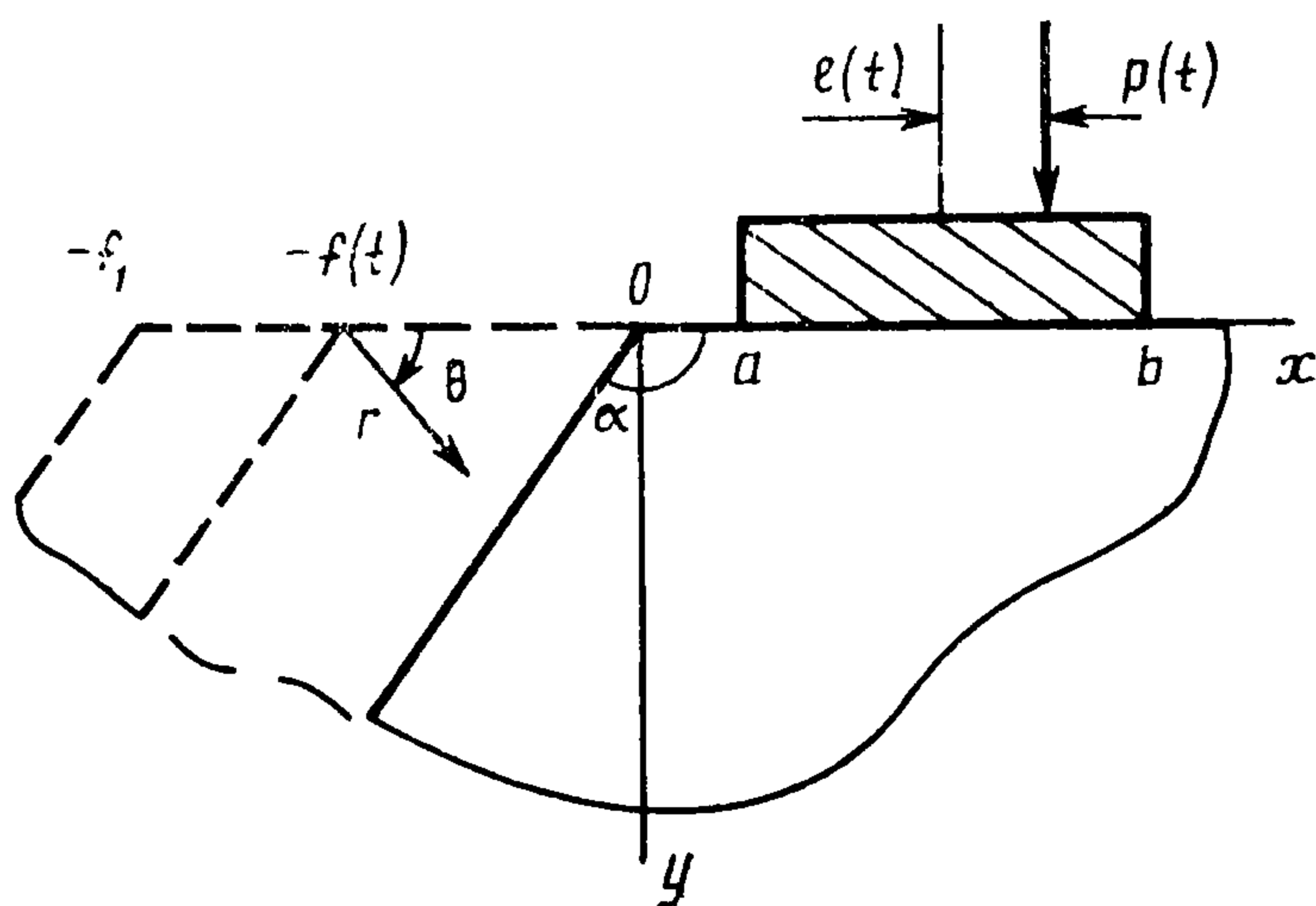
При медленном наращивании изменения характеристик более плавные, причем с некоторого момента времени $t^0 \approx 8$ напряженно-деформированное состояние тела становится практически безразличным к процессу наращивания, т. е. в условиях ограниченной ползучести действующая на штамп постоянная сила исчерпывает свой ресурс и дальнейшее наращивание или остановка не изменяют уже установившихся значений напряжений и эксцентриситета. Отметим для сравнения, что при медленном наращивании напряжения у левого края возрастают в 2,4 раза, а эксцентриситет

уменьшается в 1,5 раза. Исследование процесса медленного наращивания расширяет и понимание закономерностей формирования полей перемещений и напряжений в растущем вязкоупругом теле при стационарных воздействиях, обсуждавшихся в разд. 1.

Несмотря на то что в момент остановки тело имеет форму полуплоскости, распределение контактных напряжений под штампом ни при каком $t \geq \tau_2$ не является симметричным, а эксцентриситет приложения силы весьма далек от нуля, т. е. представление о теле, выросшем до полуплоскости, как о полуплоскости может привести просто к несоизмеримым величинам основных характеристик.

Замечание 3. Вообще говоря, в бесконечном многообразии параметров процесса наращивания можно выбрать случай, когда задаваемые предыстории тензора деформации приращиваемых элементов обеспечивают совместность деформаций во всем теле. Контактные характеристики в задаче для тела, выросшего до полуплоскости при условии совместности деформаций, совпадут с характеристиками контактной задачи для полуплоскости. Однако реализация такого процесса на практике сомнительна, к тому же в теории наращивания этот случай вырожденный, так как приводит к обычным в механике деформируемого твердого тела уравнениям и граничным условиям в области, изменяющейся со временем.

3. Контактная задача для трансляционно наращиваемого клина. Рассмотрим теперь вязкоупругий стареющий клин с углом раствора $0 < \alpha < \pi$, изготовленный в нулевой момент времени (плоская деформация). В момент времени τ_0 на участке $a \leq x \leq b$ в него начинает вдавливаться силой $P(t)$ с эксцентриситетом приложения $e(t)$ гладкий жесткий штамп. Форма основания штампа описывается функцией $g(x)$, а поверхность клина, исключая участок $a \leq x \leq b$, свободна от воздействий. В момент τ_1 начинается наращивание клина ненапряженными элементами, изготовленными одновременно с ним. При этом свободная грань движется, оставаясь параллельной первоначальному положению, а общая конфигурация тела как клина с фиксированным углом раствора сохраняется. Такое наращивание назовем трансляционным. Остановка происходит в момент τ_2 . Исследуемый процесс роста задается функцией $f(t)$, характеризующей расстояние вдоль оси x от вершины исходного клина до вершины наращиваемого. Очевидно, что $f(t) = 0$ при $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$, кроме того, положим $f(\tau_2) = f_1$ (фиг. 4).



Фиг. 4

Заменим, как и прежде, штамп нормальной распределенной нагрузкой $-q(x, t)$ и перейдем к подвижной системе координат (r, θ) [16]. Действуя аналогично указанному в разд. 2, установим связь перемещений и скоростей перемещений с операторными нагрузками и их скоростями. Возвращаясь к исходной фиксированной системе координат (x, y) , получим интегральные уравнения задачи в форме (далее $q(x, t)$ — контактные давления, $\omega(t)$ — угол поворота штампа)

$$\int_a^b k^\circ(\xi, x) q^\circ(\xi, t) d\xi = \mu [\omega(t)x - g(x)] \quad (\tau_0 \leq t \leq \tau_1) \quad (3.1)$$

$$\int_a^b k^\circ(\xi + f(t), x + f(t)) q^\circ(\xi, t) d\xi = \mu \omega'(t)x \quad (\tau_1 \leq t \leq \tau_2) \quad (3.2)$$

$$\int_a^b k^\circ(\xi + f_1, x + f_1) q^\circ(\xi, t) d\xi = \mu \omega^\circ(t) x \quad (t \geq \tau_2) \quad (3.3)$$

с дополнительными условиями типа (2.4), где вместо r следует подставить x . Кроме того, $k^\circ(\xi, x) = k(\xi, x, \alpha)$ (см. (2.3) и далее).

В контактной задаче о трансляционном наращивании клина также возможны две ситуации, когда наряду с усилием задается угол поворота или эксцентриситет. Дополнительные условия при этом преобразовываются в соответствии с (2.5)–(2.7), где ρ заменяется на ξ (при ссылках в разд. 3 на соотношения (2.5)–(2.7) будем считать, что такая замена произведена). Дальнейшее исследование осуществляется с помощью замен переменных, аппроксимации типа (2.9) и решения известного сингулярного интегрального уравнения, которое вследствие дополнительного условия на усилия имеет вид (2.11).

Решение уравнения (3.1) при условии (2.5) ($\tau_0 \leq t \leq \tau_1$) получим, полагая в (2.11) $\varphi(r, t) = q^\circ(x, t)$, $\kappa(t) = P^\circ(t)$, $\psi(t) = \omega(t)$, $\lambda = \alpha$, $h'(\rho) = g'(\xi)$ (штрихом обозначено дифференцирование по ξ), $r = x$, $\rho = \xi$. При заданном угле поворота (случай 1) соотношение (2.11) дает, таким образом, выражение для $q^\circ(x, t)$. После этого по формуле (1.3) найдем функцию распределения контактных давлений $q(x, t)$ и, подставляя ее в (2.6), эксцентриситет приложения силы. При заданном эксцентриситете (случай 2) следует воспользоваться выражением для $q^\circ(x, t)$, первым условием (2.7) и формулой (1.3), при этом определятся $q(x, t)$ и угол поворота $\omega(t)$.

Решение уравнения (3.2) при дополнительном условии (2.5) ($\tau_1 \leq t \leq \tau_2$), найдем, положив в (2.11) $\varphi(r, t) = q^\circ(x, t)$, $\kappa(t) = G^\circ P(t)$, $\psi(t) = \omega^\circ(t)$, $\lambda = \alpha$, $h'(\rho) = 0$, $r = x + f(t)$, $\rho = \xi + f(t)$. В случае 1 определим $q(x, t)$ и $e(t)$ при помощи (1.9) и (2.6), а в случае 2 отыщем $q(x, t)$ и $\omega(t)$, используя (2.7) ($t \geq \tau_1$) и (1.9).

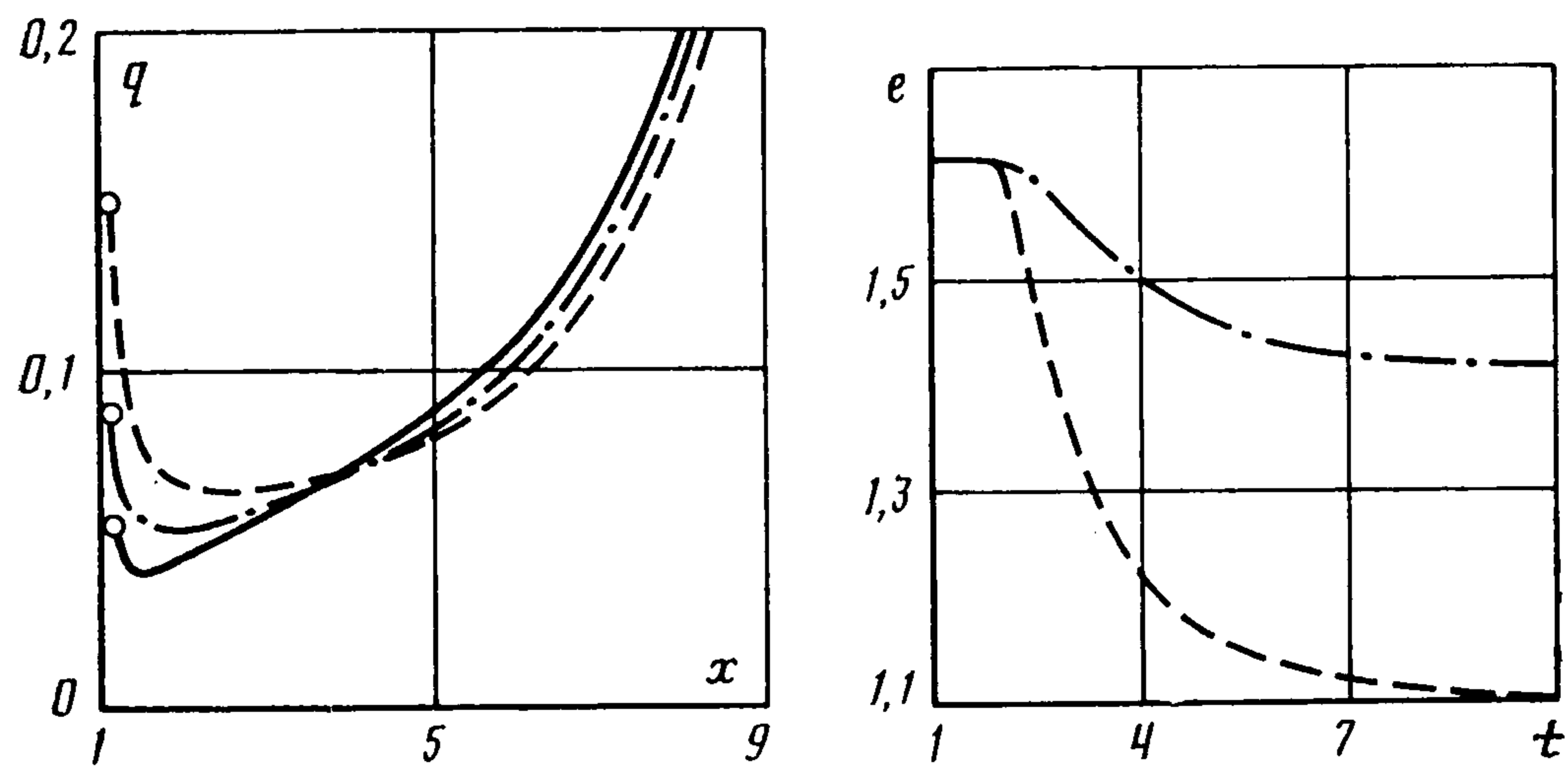
Решение (3.3) и (2.5) ($t \geq \tau_2$) получим, полагая в (2.11) $r = x + f_1$, $\rho = \xi + f_1$ (остальные функции имеют тот же вид, что и для уравнения (3.2)). Контактные напряжения, эксцентриситет или угол поворота найдем, действуя аналогично предыдущему, но пользуясь вместо (1.9) формулами (1.10).

Замечание 4. На основании разд. 2 и 3 не представляет принципиальных трудностей рассмотреть контактную задачу для клина при сложном наращивании напряженными элементами. Отметим только, что любое наращивание, в процессе которого тело сохраняет форму клина, можно описать комбинацией углового и трансляционного способов.

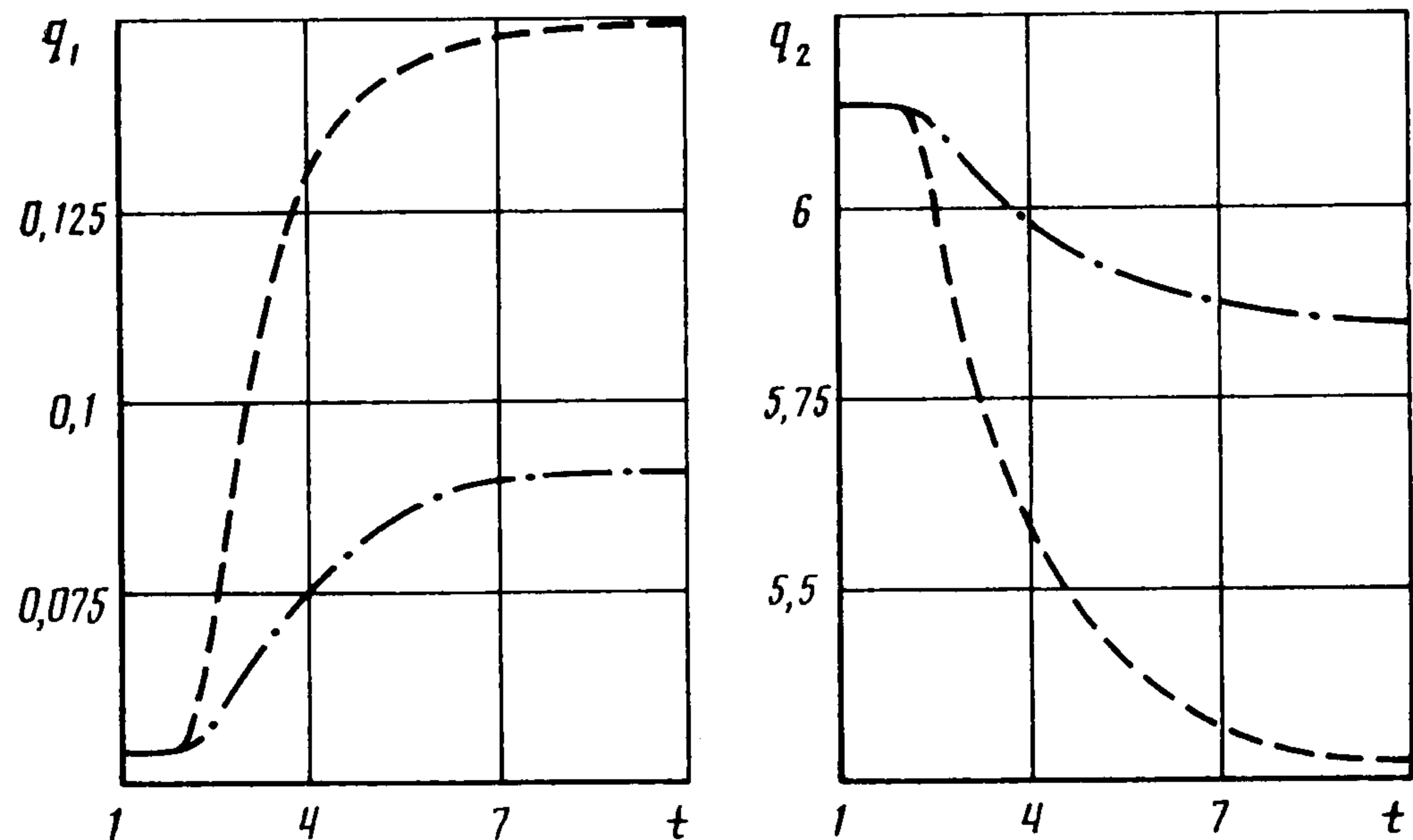
Замечание 5. При численной реализации иногда вместо формул (1.9) и (1.10) удобнее пользоваться эквивалентными им

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) = E(t) \left\{ \frac{\sigma(x, \tau_0(x))}{E(\tau_0(x))} \left[1 + \int_{\tau_0(x)}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \int_{\tau_0(x)}^t \sigma^\circ(x, \tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{\tau_0(x)}^t \int_{\tau_0(x)}^{\tau} \sigma^\circ(x, z) dz R(t, \tau) d\tau \right\} \\ u(x, t) = u(x, \tau_0(x)) + \int_{\tau_0(x)}^t u^\circ(x, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.4)$$

Следует помнить, что соотношения (3.4) необходимо преобразовать в соответствии с рассматриваемым случаем (непосредственного наращивания или после остановки),



Фиг. 5



Фиг. 6

так как выражения для скоростей операторных напряжений и перемещений на различных этапах процесса получаются из решения различных задач.

Пример 2. Контактная задача для наращиваемой четвертьплоскости. Рассмотрим задачу о трансляционном наращивании четвертьплоскости ненапряженными элементами с постоянной скоростью (см. также [16]). Пусть заданы постоянная сила и нулевой угол поворота, основание штампа предполагается плоским. Конфигурация тела в любой момент времени задается координатой вершины четвертьплоскости $x = -f(t)$ ($f(t) = 0$ при $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$). Будем считать, что остановки процесса наращивания не происходит ($\tau_2 = \infty$), т. е. в пределе тело вырастает до полуплоскости. Перейдем к безразмерным величинам по формулам (2.12), где r, ρ заменим на x, ξ и, кроме того, положим $f^*(t^*) = f(t)a^{-1}$ (звездочки опустим). Упругие и реологические характеристики материала возьмем из первого примера. Также будем считать, что режимы загрузки четвертьплоскости штампом до момента начала наращивания в первом и втором примерах полностью совпадают.

Найдем распределения контактных давлений и эксцентриситеты приложения силы, обеспечивающие отсутствие перекоса штампа, при разных скоростях трансляционного наращивания. Положим $P(t) = 1$, $\alpha = \pi/2$, $c = 9$, $\omega(t) = 0$, $g(x) = 0$, $\tau_1 = 2$, $\tau_0 = 1$; 1*) медленное трансляционное наращивание: $f(t) = t - 2$, $f'(t) = 1$ ($t \geq \tau_1$); 2*) быстрое трансляционное наращивание: $f(t) = 6(t - 2)$, $f'(t) = 6$ ($t \geq \tau_1$) (скорость наращивания $f'(t)$ в 6 раз больше, чем в случае 1*).

Поскольку в обоих примерах нагруженная штампом четвертьплоскость вырастает до полуплоскости (во втором примере в пределе при $t \rightarrow \infty$), сравним также угловой и трансляционный способы наращивания по их влиянию на распределения контактных напряжений и эксцентриситеты. На графиках, приводимых ниже, сохраним обозначения из примера 1, помня о различии способов наращивания и о том, что остановки роста не происходит. В остальном проводится полная аналогия.

На фиг. 5 показаны предельные распределения контактных напряжений при различных скоростях $f'(t)$, распределение от момента $\tau_0 = 1$ до момента $\tau_1 = 2$ и зависимости эксцентриситета от времени.

На фиг. 6 даны изменения по времени контактных напряжений q_1 у левого края штампа ($x = 0, 1$) и q_2 у правого края ($x = 8, 9$) при медленном и быстром наращивании.

Отметим, что в случае 1*) напряжения, например у левого края, увеличиваются в 1,4 раза, эксцентриситет уменьшается в 1,2 раза. В случае 2*) эти отношения равны 2,7 и 1,5 соответственно. При $t = t^0 \approx 8$ и любой скорости наращивания процесс устанавливается и дальнейший рост тела практически не изменяет контактных напряжений и эксцентриситета. Здесь также справедливы рассуждения, предшествующие замечанию 3.

Сравнение примеров 1 и 2 показывает, что способ трансляционного наращивания в отличие от углового приводит к более плавным изменениям характеристик, его влияние на состояние под штампом слабее. При постоянных воздействиях независимо от скорости и способа наращивания существует характерный момент времени t^0 , начиная с которого влиянием процесса наращивания на контактные характеристики можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 783—789.
2. Арутюнян Н. Х., Метлов В. В. Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 142—152.
3. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.
4. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 153—164.
5. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
8. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Наука, 1967. 402 с.
9. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978. 416 с.
10. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина // Инж. ж. МТТ. 1967. № 2. С. 120—131.
11. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
13. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
14. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
15. Манжиров А. В. Контактные задачи о взаимодействии вязкоупругих оснований, подверженных старению, с системами одновременно прикладываемых штампов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 670—685.
16. Арутюнян Н. Х. Фундаментальные решения задач для растущего тела в форме четвертьплоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 85—90.