Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 539.383

О ДОЗВУКОВОМ СТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ШТАМПОВ И ГИБКИХ НАКЛАДОК ПО ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.

Рассматривается смешанная динамическая задача для упругой полуплоскости, на разных участках границы которой одновременно заданы касательные и нормальные напряжения и перемещения в четырех основных комбинациях. Предполагается, что все участки движутся по границе полуплоскости с одинаковой постоянной дозвуковой скоростью, их число и взаимное расположение произвольны. Аналогичная задача о взаимодействии двух полуплоскостей из разных материалов (составная плоскость) рассматривается при постановке одновременно шести типов условий контакта в двух вариантах. Решения строятся в квадратурах на базе новых представлений комплексных потенциалов Галина [1]. Первая задача сводится к скалярной комбинированной краевой задаче Гильберта — Римана [2] для плоскости со щелями, вторая — к несвязанным задачам Гильберта — Римана и Гильберта для той же области. Обе задачи теории аналитических функций решаются новым способом, отличным от [2]. В качестве примеров рассматриваются задача расклинивания составной плоскости конечным штампом, движущимся с дорелеевской скоростью, [3] и задача о движении штампа и гибкой накладки по границе полуплоскости с дозвуковой скоростью.

Впервые точные решения стационарных контактных задач для полуплоскости с двумя типами граничных условий получены Галиным [1]. Была поставлена задача для составной плоскости с тремя типами граничных условий, решение которой получено в квадратурах в случае одного участка скольжения [4]. Однако при большем числе таких участков, как показывают работы [3, 5], метод [4] к точному решению не приводит.

1. Задача Гильберта — Римана для плоскости со щелями. Рассмотрим комбинированную краевую задачу Гильберта — Римана для кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$ в комплексной плоскости $z = x + iy$ с граничной линией LUM [2

$$\operatorname{Im}[p^\pm(x)\Phi^\pm(x)] = f^\pm(x), \quad p^\pm(x) \neq 0, \quad x \in L = L^1 \cup L^2 \tag{1.1}$$

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g(x), \quad x \in M = M^1 \cup M^2, \tag{1.2}$$

$$L \cap M = 0, \quad L \cup M = (-\infty, \infty)$$

в важном для приложений частном случае, когда $G(x) = G = \text{const}$, $x \in M^1$, $G(x) = 1$, $x \in M^2$; функция $p^\pm(x) = p(x)$ на L^1 принимает действительные значения, на L^2 — чисто мнимые. Пусть L состоит из α' полуоткрытых, α'' открытых и $R - \alpha' - \alpha''$ замкнутых промежутков $\langle a_k, b_k\rangle$, $k = 1, 2, \ldots, R$, M^1 — из отрезков $[s_k, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, Q$, действительной оси, $a_1 < b_1 < \ldots < b_R$, $s_1 < t_1 < \ldots < t_Q$. Очевидно, не теряя общности, можно считать, что $p(x) \equiv 1$ на L^1, $p(x) \equiv i$ на L^2. Будем полагать, что всякая граничная точка контура L не принадлежит L только в том случае, когда она является граничной точкой M^1. Пусть промежутки $\langle a_k, b_k\rangle$ содержат N_k внутренних узлов $x = d_{kl}$, граничных одновременно для L^1 и L^2, в которых функция $p(x)$ терпит разрыв, $d_{kl} < d_{k,l+1}$, общее число внутренних узлов на L равно N; функции $f^\pm(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условию Гельдера.

Решение задачи (1.1), (1.2) будем искать в самом широком классе h_0 [6] кусочно-аналитических функций, стремящихся к нулю на бесконечности, при помощи канонического решения $X(z)$ соответствующей однородной задачи, полагая [2]

(1.3)
$$X(z)=Z(z)\,e^{i\psi(z)}\prod_{j=1}^{R}(z-b_j)^{-\alpha_j}\prod_{j=1}^{R-1}(z-c_j)^{-\beta_j}$$

$$Z(z)=\prod_{k=1}^{Q}(z-s_k)^{-1/2+i\gamma}(z-t_k)^{-1/2-i\gamma}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left\{\frac{Y(z)\,[h^+(t)+h^-(t)]}{Y^+(t)}+h^+(t)-h^-(t)\right\}\frac{dt}{t-z}$$

$$\gamma=\frac{\ln(-G)}{2\pi}$$

$$Y(z)=\prod_{k=1}^{R}(z-a_k)^{1/2}(z-b_k)^{1/2},\quad Y(z)=z^R+O(z^{R-1}),\quad z\to\infty$$

$$h^{\pm}(t)=\pi n_k^{\pm}-\arg Z^{\pm}(t)+\sum_{j=1}^{R-1}\beta_j\arg(t-c_j)^{\pm}+$$
$$+\sum_{j=1}^{R}\alpha_j\arg(t-b_j)^{\pm}+\pi m^{\pm}(t)+{}^1/_2(1-s)\pi,$$
$$t\in\langle a_k,b_k\rangle\cap L^s,\quad k=1,\ldots,R;\quad s=1,2$$

Здесь $n_k^{\pm}$, α_k, $\beta_k\neq 0$ — целые, c_k — комплексные числа, $m^{\pm}(t)$ — подлежащие определению целочисленные функции, которые могут иметь скачки на берегах щелей при $x=d_{kl}\pm i0$, $m^{\pm}(a_k)=0$; $Z(z)$ — каноническое решение однородной задачи Римана (1.2) в h_0; $\psi(z)$ — решение задачи Дирихле $\operatorname{Re}\psi^{\pm}(x)=h^{\pm}(x)$, $x\in L$, ограниченное во всех узлах, а также на бесконечности за счет дополнительных условий, налагаемых на функции $h^{\pm}(t)$

(1.4)
$$\int_L\frac{h^+(t)+h^-(t)}{Y^+(t)}\,t^{j-1}\,dt=0,\quad j=1,\ldots,R-1$$

В отличие от задачи Римана [6], в задаче Гильберта — Римана каноническое решение в общем случае нельзя построить в том же классе h_m, что и общее решение.

Асимптотику функции $X(z)$ в узлах линии L можно записать в виде $X(z)=O[(z-d)^{\zeta}]$, $z\to d$, где $\zeta=\lambda_k$ при $d=a_k$, $\zeta=\nu_k$ при $d=b_k$, $\zeta=\gamma_{kl}^{\pm}$ при $d=d_{kl}\pm i0$ и имеют место равенства

(1.5)
$$\lambda_k=\delta_k+\omega_k-{}^1/_2w_k^-,\quad \nu_k=\Delta_k+\varepsilon_k-\omega_k+{}^1/_2w_k^--\alpha_k,$$
$$w_k^-=n_k^+-n_k^-$$
$$\Delta_k={}^1/_2[m^+(b_k)-m^-(b_k)],\quad \gamma_{kl}^{\pm}=\pm[\theta(d_{kl})-m^{\pm}(d_{kl}+0)+$$
$$+m^{\pm}(d_{kl}-0)]$$
$$\omega_k=\theta_k-\frac{1}{2\pi}\arg\frac{Z^+(x)}{Z^-(x)},\quad x\in\langle a_k,b_k\rangle,\quad \theta_k=\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j\,(k>1),$$
$$\theta_1=0$$
$$\theta(t)=\pi^{-1}\arg\{p(t+0)\,[p(t-0)]^{-1}\}$$

Здесь $\delta_k=-{}^1/_2$ ($\delta_k=0$), если $a_k\in M^1$ ($a_k\,\overline{\in}\,M^1$) и $\varepsilon_k=-{}^1/_2$ ($\varepsilon_k=0$), если $b_k\in M^1$ ($b_k\,\overline{\in}\,M^1$). Так как α_k — целые числа, то θ_k и ω_k — тоже целые, величины $\theta(t)$, λ_k, ν_k, $\gamma_{kl}^{\pm}$ кратны ${}^1/_2$.

Полагая $\gamma_{kl}^{\pm} \equiv -1/2$ и учитывая, что $m^{\pm}(a_k) = 0$, $m^{\pm}(d_{kl} + 0) = m^{\pm}(d_{k,l+1} - 0)$, для последовательного по l вычисления функций $m^{\pm}(t)$ получим при любом k рекуррентную формулу $m^{\pm}(d_{kl} + 0) = m^{\pm}(d_{kl} - 0) + E\{\theta(d_{kl})\} + 1/2 \pm 1/2$, где $E\{t\}$ — целая часть t. Отсюда и из (1.5) следует

$$\Delta_k = 1/2 N_k, \quad \alpha_k = \varepsilon_k + \delta_k - \lambda_k - \nu_k + 1/2 N_k \tag{1.6}$$

Пусть r_1 — показатель степени роста функции

$$\prod_{k=1}^{R} (z - b_k)^{\alpha_k}$$

при $z \to \infty$, r_2 — количество узлов, в которых функция $X(z)$ не имеет особенностей; введем новое обозначение промежутков $\langle a_k, b_k \rangle$. Пусть L_{ns}^t — полуоткрытый ($t = 1$), открытый ($t = 2$) или замкнутый ($t = 3$) промежуток $\langle a_n, b_n \rangle$ с нечетным ($s = 1$) или четным ($s = 2$) числом внутренних узлов, равным N_{ns}^t, n изменяется от 1 до α_s^t, L^* — объединение всех промежутков L_{n1}^1, L_{n2}^2, L_{n2}^3. Тогда каждому k можно поставить в соответствие единственную тройку n, s, t и соответствующее число α_k обозначить α_{ns}^t. Положим $\lambda_k = \nu_k = -1/2$ при $\langle a_k, b_k \rangle \in L^*$, $\lambda_k = -1/2$, $\nu_k = 0$ при $\langle a_k, b_k \rangle \in L \setminus L^*$. Используя (1.6) и равенства

$$\sum_{s=1}^{2} \sum_{t=1}^{3} \alpha_s^t = R, \quad \sum_{s=1}^{2} \sum_{t=1}^{3} \sum_{n=1}^{\alpha_s^t} N_{ns}^t = N, \ \alpha_1^1 + \alpha_2^1 = \alpha', \ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha''$$

получим все числа α_k и r_q в виде

$$\begin{aligned} &\alpha_{n1}^1 = 1/2(N_{n1}^1 + 1), \quad \alpha_{n1}^2 = 1/2(N_{n1}^2 - 1), \quad \alpha_{n1}^3 = 1/2(N_{n1}^3 + 1) \\ &\alpha_{n2}^1 = 1/2 N_{n2}^1, \quad \alpha_{n2}^2 = 1/2 N_{n2}^2, \quad \alpha_{n3}^2 = 1/2 N_{n2}^3 + 1, \\ &r_2 = \alpha_1^2 + \alpha_1^3 + \alpha_2^1 \\ &r_1 = \sum_{k=1}^{R} \alpha_k = \sum_{s=1}^{2} \sum_{t=1}^{3} \sum_{n=1}^{\alpha_s^t} \alpha_{ns}^t = 1/2 N + R - \alpha'' - \alpha_2^1 - \\ &-1/2(\alpha_1^1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^3) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Дальнейшие действия в точности повторяют ход решения задачи Дирихле — Римана [7]. По формулам (1.5) последовательно вычисляются величины θ_k, ω_k, $w_k^- = 2(\delta_k + \omega_k - \lambda_k)$. Из системы трансцендентных уравнений (1.4) находятся целые числа $w_k^+ = n_k^+ + n_k^-$ заданной и совпадающей с w_k^- четности и комплексные числа c_k — аффиксы точек, расположенных на кривых S_k, концами которых служат точки a_k, b_k, $k = 1, \ldots, R - 1$; $w_R^+ = w_R^-$. Зная $w_k^{\pm}$, можно найти целые числа $n_k^{\pm}$, но по отдельности в решение (1.3) они не входят. Рациональные способы выбора β_k и S_k рассмотрены в [7].

Пусть для определенности $\beta_k \equiv 1$, функция $X(z)$ имеет в точках $z = c_k$ только простые полюсы, S_k — полуокружности, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда по построению (1.3) асимптотика $X(z)$ на бесконечности имеет вид

$$X(z) = O(z^{-r}), \quad r = Q + R + r_1 - 1 \tag{1.8}$$

Общее решение задачи (1.1), (1.2) в классе h_0 выражается формулами [7]

$$\Phi(z) = X(z)[\Phi_1(z) + \Phi_2(z)] \tag{1.9}$$

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_M \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}, \quad \Phi_2(z)=\frac{Y_0(z)}{2\pi}\int_L \frac{f_2^+(t)+f_2^-(t)}{Y_0^+(t)(t-z)}\,dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{f_2^+(t)-f_2^-(t)}{t-z}\,dt+P_{r-1}(z)+iQ_s(z)\,Y_0(z),$$
$$s=r+r_2-R-1$$
$$f_2^\pm(x)=f^\pm(x)\,[X^\pm(x)]^{-1}-\operatorname{Im}\Phi_1(x), \quad x\in L;$$
$$Y_0(z)=Y(z)\prod_{n=1}^{r_2}(z-b_n^*)^{-1}$$

Здесь $P_r(z)$ и $Q_s(z)$ — полиномы степени r и s с действительными коэффициентами, b_n^*, $n=1,\ldots,r_2$ — правые концы тех промежутков $\langle a_n, b_n\rangle$, в которых функция $X(z)$ ограничена. В силу (1.9), (1.8), (1.7) суммарное число коэффициентов в обоих полиномах равно $r+s+1$ или $2Q+3R+N-\alpha'-2\alpha''-2$. На ликвидацию полюсов функции $\Phi(z)$ в точках $z=c_k$ при решении системы уравнений $\Phi_1(c_k)+\Phi_2(c_k)=0$, $k=1,\ldots,R-1$, уходит $2R-2$ коэффициента. Таким образом, число произвольных действительных постоянных в полученном решении равно $2Q+R+N-\alpha'-2\alpha''$ и всегда положительно, так как $2Q\geqslant\alpha'+2\alpha''$, $r\geqslant 1$, $s\geqslant 0$. Аналогичный подсчет с привлечением условий ортогональности свободных членов можно сделать для решений в любом классе h_m [6].

2. Задача Гильберта для плоскости со щелями. Если в задаче (1.1), (1.2) второе условие отсутствует, то ее решение (1.3)—(1.9) упрощается: $Z(z)\equiv 1$, $Q=0$, $\alpha'=\alpha''=0$, число произвольных постоянных становится равным $N+R$, точки c_k, определяемые системой трансцендентных уравнений (1.4), совпадают с узлами a_k. Построим еще более простое решение, в котором условия (1.4) не возникают.

Пусть в задаче Гильберта (1.1), записанной в виде

(2.1) $$\operatorname{Im}[p_s\Phi^\pm(x)]=f_s^\pm(x), \quad s=1,2;\quad p_1=1,\quad p_2=i,\quad x\in L^s$$

линии L^1 и L^2 соответственно состоят из l^1 и l^2 отрезков $[a_k^1, b_k^1]$ и $[a_k^2, b_k^2]$ и, как в п. 1, имеют N общих узлов; очевидно, $l^1+l^2=N+R$. В качестве канонического решения $X(z)$ однородной задачи (2.1) при $f_s^\pm(x)\equiv 0$ можно взять решение задачи Дирихле для плоскости со щелями $\operatorname{Im}X_1^\pm(x)=0$, $x\in L^1$, имеющее вид

(2.2) $$X_s(z)=i\left[\prod_{k=1}^{l^s}(z-a_k^s)(z-b_k^s)\right]^{-1/2}, \quad X_s(z)\sim z^{-l_s}, \quad z\to\infty$$

при $s=1$. Действительно, функция $X(z)=X_1(z)$ на оси Ox вне L^1 чисто мнимая, поэтому на L^2, как того требует условие (2.1), $\operatorname{Re}X(x)=0$. Теперь функция $F(z)=\Phi(z)\,[X_1(z)]^{-1}$ в силу (2.1) может быть найдена путем решения задачи Дирихле для плоскости со щелями

(2.3) $$\operatorname{Im}F^\pm(x)=f_s^\pm(x)\,[p_sX_1^\pm(x)]^{-1}, \quad x\in L^s, \quad s=1,2$$

В заданном классе h_0 функция $\Phi(z)$ должна иметь степенные особенности с показателем $-{}^1/_2$ во всех узлах a_k^s, b_k^s и убывать на бесконечности, как z^{-1}. Отсюда и из (2.2) следует, что решение задачи (2.3) нужно искать в классе функций, растущих при $z\to\infty$ как z^η, $\eta=l^1-1$, ограниченных на концах a_1^*, a_2^*, $\ldots$, a_ξ R щелей $[a_k, b_k]$, в которых ξ_1 каких-либо точек a_k и b_k совпадают соответственно с a_n^1 и b_n^1, и имеющих интегрируемую бесконечность на остальных $2R - \xi$ концах a_k и b_k. Выпишем это решение, используя функции (2.2) при $s = 1, 2$ и исключив таким способом все величины $z - a_k$*

$$F(z) = \sum_{s=1}^{2} \frac{1}{2\pi p_s} \int_{L^s} \left\{ \frac{X_2(z)\, X_1^+(t)}{X_1(z)\, X_2^+(t)} \left[\frac{f_s^+(t)}{X_1^+(t)} + \frac{f_s^-(t)}{X_1^-(t)} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{f_s^+(t)}{X_1^+(t)} - \frac{f_s^-(t)}{X_1^-(t)} \right\} \frac{dt}{t-z} + P_\eta(z) + iQ_\theta(z)\, X_2(z)\, [X_1(z)]^{-1}$$
$$\theta = R + \eta - \xi$$

Учитывая равенства

$$\Phi(z) = X_1(z) F(z), \quad X_s^-(t) = (-1)^{s+q+1} X_s^+(t), \quad t \in L^q, \quad R = l^1 + l^2 - N, \quad \xi = 2l^1 - N$$

отсюда получим общее решение задачи (2.1)

$$\Phi(z) = \sum_{s=1}^{2} \frac{1}{2\pi p_s} \sum_{q=1}^{2} \int_{L^q} \frac{X_q(z)}{X_q^+(t)} [f_s^+(t) + (-1)^{s+q} f_s^-(t)] \frac{dt}{t-z} + \tag{2.4}$$
$$+ P_\eta(z)\, X_1(z) + iQ_\theta(z)\, X_2(z), \quad \eta = l^1 - 1, \quad \theta = l^2 - 1$$

Заметим, что количество произвольных постоянных $l^1 + l^2$, или $N + R$, и форма этого решения при фиксированных l^1 и l^2 не зависит от числа общих узлов N линий L^1 и L^2; например, слияние каких-либо щелей из L^1 и L^2 не отразится на (2.4).

Если $f_s^+(x) = f_s^-(x)$, $s = 1, 2$, то решение (2.4) задачи Гильберта (2.1) распадается на сумму решений двух отдельных задач Дирихле (2.1) при $s = 1$ и $s = 2$:

$$\Phi(z) = X_1(z) \left[\frac{1}{\pi} \int_{L^1} \frac{f_1^+(t)\, dt}{X_1^+(t)\,(t-z)} + P_\eta(z) \right] + \tag{2.5}$$
$$+ iX_2(z) \left[\frac{1}{\pi} \int_{L^2} \frac{f_2^+(t)\, dt}{X_2^+(t)\,(t-z)} + Q_\theta(z) \right]$$

3. Контактная задача для упругой полуплоскости. Пусть $L_{km} = \langle a_{km}, b_{km} \rangle$, $k = 1, \ldots, k_m$, $m = 1, 2$ — любые открытые, полуоткрытые или замкнутые промежутки, $L_{k3} = [a_{k3}, b_{k3}]$, $k = 1, 2, \ldots, k_3$ — отрезки оси Ox декартовой системы координат xOy, движущейся относительно упругой полуплоскости $-\infty < x < \infty$, $y < 0$ с постоянной дозвуковой скоростью c в направлении оси Ox; $a_{km} < b_{km} < a_{k+1,m}$ для всех k и m.

Выпишем граничные условия

$$u' = u_0(x), \quad x \in L_2 \cup L_3; \quad v' = v_0(x), \quad x \in L_1 \cup L_3; \tag{3.1}$$
$$L_m = \bigcup_{k=1}^{k_m} L_{km}$$
$$\tau_{xy} = \tau(x), \quad x \in L_1 \cup L_4; \quad \sigma_y = \sigma(x), \quad x \in L_2 \cup L_4; \quad L_k \cap L_l = 0, \quad k \neq l$$

соответствующие на L_1 скользящему контакту штампа, на L_2 — сцеплению гибкой нерастяжимой накладки, на L_3 — полному сцеплению штампа и полуплоскости, на L_4 — дополнении $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ до оси Ox — заданию напряжений. Будем считать, что заданные функции удовлетворяют условию Гельдера, любая граничная точка L_m, $m = 1, 2$, не принадлежит L_m только в случае ее принадлежности L_3. На бесконечности вращение и сжатие положим равными нулю, на открытых промежутках (a_{km}, b_{km}) зададим скачки χ_{km}, $m = 1, 2$, на всех отрезках $[a_{k1}, b_{k1}]$ и $[a_{k2}, b_{k2}]$ — соответственно величины Y_{k1} и X_{k2}, на $[a_{k3}, b_{k3}]$ для тех k, при которых a_{k3} не является граничной точкой какого-либо интервала $(a_{n,m}, b_{nm})$, $m = 1, 2$ — величины X_{k3}, Y_{k3}, где X_{km}, Y_{km} — главные векторы касательных и нормальных напряжений на L_{km}, $\chi_{k1} = u(b_{k1}) - u(a_{k1})$, $\chi_{k2} = v(b_{k2}) - v(a_{k2})$. Общее число этих произвольных силовых и кинематических параметров задачи, очевидно, равно $k_1 + k_2 + 2k_3 - \alpha' - 2\alpha''$, где α' — число полуоткрытых, α'' — число открытых промежутков в $L_1 \bigcup L_2$.

Решение задачи (3.1) будем искать в форме Галина [1, 8]

$$\mu u' = -\mathrm{Re}\,[\varphi_1(z_1) + q_2\varphi_2(z_2)], \quad \mu v' = \mathrm{Im}\,[q_1\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)]$$
$$\sigma_y = 2\mathrm{Re}\,[q\varphi_1(z_1) + q_2\varphi_2(z_2)], \quad \tau_{xy} = 2\mathrm{Im}\,[q_1\varphi_1(z_1) + q\varphi_2(z_2)], \quad z_s = x + iq_s y \tag{3.2}$$
$$q_s = \sqrt{1 - c^2 c_{s*}^{-2}}, \quad 2q = 1 + q_2^2, \quad c_{1*}^2 = 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1} c_{2*}^2, \quad c_{2*}^2 = \mu\rho^{-1}$$

где μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала, c_{1*} и c_{2*} — скорости распространения продольных и поперечных волн, $\varphi_s(z)$, $s = 1, 2$ — функции, аналитические в полуплоскости $\mathrm{Im}\, z < 0$, $z = x + iy$, и стремящиеся в ней к нулю при $z \to \infty$, $' = \partial/\partial x$.

Введем представление этих функций через одну функцию $\Phi(z)$, кусочно-аналитическую в плоскости z с граничной линией $y = 0$. Требуя, как в [7], чтобы функция $\Phi(z)$ удовлетворяла на $L_1 \bigcup L_2$ условию Гильберта и на $L_3 \bigcup L_4$ условию Римана, получим

$$\varphi_s(z) = q_s^{-1/2}[(-1)^{s+1}R^+\Phi(z) + R^-\overline{\Phi}(z)], \quad R^\pm = \sqrt{q_1q_2} \pm q, \quad s = 1, 2 \tag{3.3}$$

Подставив (3.2), (3.3) в (3.1), приходим к комбинированной задаче Гильберта — Римана (1.1), (1.2), в которой

$$L^s = L_s, \quad s = 1, 2$$
$$M^1 = L_3, \quad M^2 = L_4, \quad G = -G^+/G^-, \quad G^\pm = R^\pm (Q^\pm)^{-1},$$
$$Q^\pm = 1 \pm \sqrt{q_1q_2}$$
$$f^\pm(x) = W_2^{-1}[\mp{}^1/_2 (G^\mp)^{-1}\tau(x) - \mu v_0(x)], \quad x \in L^1, \quad W_s = 2q_s^{1/2}(1 - q)$$
$$f^\pm(x) = W_1^{-1}[\pm{}^1/_2 (G^\mp)^{-1}\sigma(x) - \mu u_0(x)], \quad x \in L^2$$
$$g(x) = -\mu (R^-Q^+)^{-1}[q_1^{1/2}u_0(x) + iq_2^{1/2}v_0(x)], \quad x \in M^1$$
$$g(x) = {}^1/_2 R_*^{-1}[q_1^{1/2}\sigma(x) - iq_2^{1/2}\tau(x)], \quad x \in M^2$$
$$R_* = R^+R^- = q_1q_2 - q^2$$
$$Q_* = Q^+Q^- = 1 - q_1q_2,$$

R_* и Q_* — функции Релея для свободной и защемленной полуплоскости, число произвольных постоянных равно числу параметров контактной задачи, так как $k_1 + k_2 = N + R$, $k_3 = Q$.

Решение в форме (3.3) удобно использовать в случае, когда участок границы L_4 содержит один или два полубесконечных интервала. Если же в бесконечность простирается участок L_3, то целесообразно задачу (3.1) свести при помощи представления

$$\varphi_s(z) = q_s^{-1/2}[(-1)^s Q^+\Phi(z) + Q^-\overline{\Phi}(z)], \quad s = 1, 2 \tag{3.4}$$

к краевой задаче (1.1), (1.2), заменив L_3 на L_4, L_4 на L_3, функции $f^{\pm}(x)$, $G(x)$, $g(x)$ на $\pm G^{\mp}f^{\pm}(x)$, $G^{-1}G(x)$, $G^{-}g(x)$.

Для решения статической задачи можно перейти в (3.2), (3.3) к пределу при $c \to 0$. Однако проще в этом случае, следуя [7], построить решение на базе потенциалов Н. И. Мусхелишвили.

4. Движение гибкой накладки и штампа по полуплоскости. Пусть по границе $y = 0$ упругой полуплоскости $y < 0$ движутся вместе с системой координат xOy с постоянной дозвуковой скоростью c жесткий штамп $x \in L_1 = [a_1, b_1]$ и гибкая нерастяжимая накладка $x \in L_2 = [a_2, b_2]$, $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$. К штампу приложена нормальная прижимающая сила P, контактное трение отсутствует; к накладке, сцепленной с полуплоскостью (гусеничный ход), приложена распределенная нормальная нагрузка $\sigma_y = \sigma(x)$ и продольная сила T.

Граничные условия этой задачи

$$v' = \tau_{xy} = 0, \quad x \in L_1; \quad u' = 0, \quad \sigma_y = \sigma(x), \quad x \in L_2; \quad \tau_{xy} = \sigma_y = 0, \quad x \in L_4 \tag{4.1}$$

совпадают с условиями (3.1), где участок L_3 отсутствует. Задачу Гильберта для плоскости со щелями L_1 и L_2, следуя (3.2)—(3.5), можно записать так:

$$\operatorname{Im} \Phi^{\pm}(x) = 0; \quad x \in L_1; \quad \operatorname{Re} \Phi^{\pm}(x) = \pm [G^{\pm} W_2]^{-1} \sigma(x), \quad x \in L_2 \tag{4.2}$$

Ее решение, согласно (2.2), (2.4), имеет вид

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + iC_1 Y_1^{-1}(z) + C_2 Y_2^{-1}(z) \tag{4.3}$$

$$Y_s(z) = \sqrt{(z - a_s)(z - b_s)}, \quad s = 1, 2$$

$$2\pi R \Phi_0(z) = \frac{\sqrt{q_1}}{Y_1(z)} \int\limits_{L_2} \frac{Y_1(t)\,\sigma(t)\,dt}{t - z} - \frac{q_1 q_2 - q}{W_2} \int\limits_{L_2} \frac{Y_2^{+}(t)\,\sigma(t)\,dt}{t - z} \tag{4.4}$$

Определяя произвольные постоянные через заданные силы P и T, получим

$$C_1 = \frac{(Y - P)\sqrt{q_2}}{4\pi R}, \quad C_2 = \frac{T\sqrt{q_1}}{4\pi R}, \quad Y = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_2} \sigma_y\,dx$$

Если $\sigma(t) = \sigma_0 = \mathrm{const}$, решение выражается в элементарных функциях. Вычисляя табличные интегралы, из (4.4) получим

$$\frac{2\pi R}{\sigma_0} \Phi_0(z) = \frac{\sqrt{q_1}}{Y_1(z)} \Big[Y_1(b_2) - Y_1(a_2) + (2z - a_1 - b_1) \times$$
$$\times \ln \frac{\sqrt{b_2 - a_1} + \sqrt{b_2 - b_1}}{\sqrt{a_2 - a_1} + \sqrt{a_2 - b_1}} \Big] + 2\sqrt{q_1} \ln \times$$
$$\times \left[\frac{\sqrt{(a_2 - b_1)(z - a_1)} + \sqrt{(a_2 - a_1)(z - b_1)}}{\sqrt{(b_2 - b_1)(z - a_1)} + \sqrt{(b_2 - a_1)(z - b_1)}} \sqrt{\frac{z - b_2}{z - a_2}} \right] -$$
$$- \frac{\pi(q_1 q_2 - q)}{W_2} \left[1 - \frac{2z - a_2 - b_2}{2Y_2(z)} \right]$$

Если $\sigma_0 = 0$, то $\Phi_0(z) \equiv 0$, $Y = 0$, и в силу (2.5) решение распадается на сумму решений двух задач Дирихле. Это согласуется с тем, что в решениях задач Фламана и Черрути для сил, приложенных в точке $z = 0$ (и в статике, и в стационарной динамике) соответственно $u(x, 0) = H(0)$, $v(x, 0) = H(0)$, где $H(x)$ — функция Хевисайда. Контактные напряжения под штампом и накладкой в этом случае, естественно, тоже не испытывают взаимного влияния:

$$\sigma_y = -\pi^{-1} P (x - a_1)^{-1/2} (b_1 - x)^{-1/2}, \quad x \in L_1$$
$$\tau_{xy} = \pi^{-1} T (x - a_2)^{-1/2} (b_2 - x)^{-1/2}, \quad x \in L_2$$

5. Движение щелей в составной упругой плоскости. Пусть $L_{km} = \langle a_{km}, b_{km} \rangle$, $k = 1, 2, \ldots, k_m$, $m = 1, \ldots, 5$ — промежутки оси Ox декартовой системы xOy, движущейся относительно составной упругой плоскости с дорелеевской постоянной скоростью c, $L_m = U_{k=1}^{k_m} L_{km}$, L_6 — дополнение $L_1 \cup, \ldots, \cup L_5$ до оси Ox. Линия раздела упругих материалов плоскости совмещена с осью Ox, величины относящиеся к полуплоскостям

$y > 0$ и $y < 0$ обозначены индексами $j = 1$ и $j = 2$. Пусть на замкнутых промежутках $L_1 = [a_{k1}, b_{k1}]$ полуплоскости полностью сцеплены; на других участках между ними имеются щели, причем на L_2 щели раскрыты и в них вложены расклинивающие штампы, трение отсутствует; на L_3 берега щелей сцеплены с гибкими нерастяжимыми накладками; на L_4 поставлены условия скользящего, на L_5 — «антискользящего» контакта берегов; на L_6 к берегам щелей приложены напряжения. Будем считать, что граничная точка любого промежутка L_{km}, $m = 2, \ldots, 5$, не принадлежат L_{km} только в случае ее принадлежности L_1. Общее число полуоткрытых промежутков, входящих в $L_2, \ldots, L_5$, обозначим α', открытых — α''. Выпишем граничные условия задачи

$$
\begin{aligned}
(5.1)\qquad & [\sigma_y(x)] = \sigma^\circ(x), \quad [\tau_{xy}(x)] = \tau^\circ(x), \quad [u'(x)] = u^\circ(x), \\
& [v'(x)] = v^\circ(x), \quad x \in L_1 \\
& \tau_{xyj} = \tau_j^\circ(x), \quad v_j'(x) = v_j^\circ(x), \quad x \in L_2 \\
& \sigma_{yj}(x) = \sigma_j^\circ(x), \quad u_j'(x) = u_j^\circ(x), \quad x \in L_3 \\
& \tau_{xyj} = \tau_j^\circ(x), \quad [v'(x)] = v^\circ(x), \quad [\sigma_y(x)] = \sigma^\circ(x), \quad x \in L_4 \\
& \sigma_{yj}(x) = \sigma_j^\circ(x), \quad [u'(x)] = u^\circ(x), \quad [\tau_{xy}(x)] = \tau^\circ(x), \quad x \in \\
& \in L_5 \\
& \sigma_{yj}(x) = \sigma_j^\circ(x), \quad \tau_{xyj}(x) = \tau_j^\circ(x), \quad x \in L_6; \quad [f(x)] = \\
& = f_1(x) - f_2(x)
\end{aligned}
$$

Учитывая кинематические условия контакта, дополнительно зададим главный вектор X^∞, Y^∞ поля напряжений на бесконечности при $y > 0$; в точках a_{k1}, не являющихся граничными ни для каких интервалов (a_{lm}, b_{lm}), $m = 2, \ldots, 5$, зададим скачки перемещений $[u(a_{k1})] = u_{k1}^\circ$ и $[v(a_{k1})] = v_{k1}^\circ$; на каждом отрезке $[a_{k2}, b_{k2}]$ зададим нормальную силу Y_k, приложенную к штампу, и скачок $[v(a_{k2})] = v_{k2}^\circ$; на $[a_{k3}, b_{k3}]$ — две продольные силы X_{kj}, приложенные к накладкам; на $[a_{k4}, b_{k4}]$ — скачок $[v(a_{k4})] = v_{k4}^\circ$; на $[a_{k5}, b_{k5}]$ — скачок $[u(a_{k5})] = u_{k5}^\circ$. Общее число этих дополнительных величин равно $2(k_1 + k_2 + k_3) + k_4 + k_5 - \alpha' - 2\alpha''$.

Решение будем искать в каждой полуплоскости в форме (3.2)

$$
\begin{aligned}
(5.2)\qquad & \mu_j u_j' = -\mathrm{Re}\,[\varphi_{j1}(z_{j1}) + q_{j2}\varphi_{j2}(z_{j2})], \quad \mu_j v_j' = \\
& = \mathrm{Im}\,[q_{j1}\varphi_{j1}(z_{j1}) + \varphi_{j2}(z_{j2})] \\
& \sigma_{yj} = 2\mathrm{Re}\,[q_j\varphi_{j1}(z_{j1}) + q_{j2}\varphi_{j2}(z_{j2})], \quad \tau_{xyj} = 2\mathrm{Im}\,[q_{j1}\varphi_{j1}(z_{j1}) + \\
& + q_j\varphi_{j2}(z_{j2})] \\
& q_{jk} = \sqrt{1 - c^2 c_{jk}^{-2}}, \quad 2q_j = 1 + q_{j2}^2, \quad z_{jk} = x + iq_{jk}y, \quad k, j = 1, 2
\end{aligned}
$$

где c_{j1} и c_{j2} — скорости распространения продольных и поперечных волн в j-й упругой среде.

Функции $\varphi_{jk}(z)$ выберем, снова ориентируясь на условия Гильберта и Римана (μ_j — модули сдвига)

$$
\begin{aligned}
(5.3)\qquad & \varphi_{jk}(z) = \sum_{s=1}^{2} (-1)^{s(1+j)} [q_{jk}^{s-} F_s(z) - (-1)^k q_{jk}^{s+} \overline{F}_s(z)] \\
& q_{j1}^{s\pm} = \frac{q_{j2}}{p_{j2}^s} \pm \frac{q_j}{p_{j1}^s}, \quad q_{j2}^{s\pm} = \frac{q_{j1}}{p_{j1}^s} \pm \frac{q_j}{p_{j2}^s}, \quad p_{jk}^1 = \sqrt{p_k}, \\
& R_j = q_{j1}q_{j2} - q_j^2 \\
& p_{jk}^2 \equiv p_{jk} = \varkappa^{j-1} q_{jk}(1 - q_j) R_j^{-1}, \quad \varkappa = \mu_1\mu_2^{-1}, \quad p_k = p_{1k} + p_{2k}
\end{aligned}
$$

Подставив (5.2) в (5.1), получим две несвязанные комбинированные краевые задачи для кусочно-аналитических функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$.

Для первой функции — это задача Гильберта — Римана (1.1), (1.2) при

$$\Phi(z) = F_1(z),\ L^1 = L_2 \cup L_4,\ L^2 = L_3 \cup L_5,\ M^1 = L_1,\ M^2 = L_6$$

$$f^{\pm}(x) = {}^1/_2\mu_1 p_1^{-1/2} v^0(x) - p_1^{-1/2}[h_1\tau_1{}^0(x) - h_2\tau_2{}^0(x)] \pm$$
$$\pm p_2^{-1/2}[p_{12}\tau_1{}^0(x) + p_{22}\tau_2{}^0(x)],\quad x \in L^1$$

$$f^{\pm}(x) = -{}^1/_2\mu_1 p_2^{-1/2} u^0(x) - p_2^{-1/2}[h_1\sigma_1{}^0(x) - h_2\sigma_2{}^0(x)] \pm$$
$$\pm p_1^{-1/2}[p_{11}\sigma_1{}^0(x) + p_{21}\sigma_2{}^0(x)],\quad x \in L^2$$

$$G = G^-(G^+)^{-1},\quad G^{\pm} = h_1 - h_2 \pm \sqrt{p_1p_2},$$

$$h_j = \varkappa^{j-} R_j^{-1}(q_{j1}q_{j2} - q_j),\quad j = 1, 2$$

$$g(x) = -(G^+)^{-1}\{p_1^{1/2}[\mu_1 u^0(x) + 2(h_1p_{21} + h_2p_{11})\sigma^0(x) -$$
$$- ip_2^{1/2}[\mu_1 v^0(x) + 2(h_1p_{22} + h_2p_{12})\tau^0(x)\},\quad x \in M^1$$

$$g(x) = 2p_1^{-1/2}[p_{11}\sigma_1{}^0(x) + p_{21}\sigma_2{}^0(x)] + 2ip_2^{-1/2}[p_{12}\tau_1{}^0(x) + p_{22}\tau_2{}^0(x)],$$
$$x \in M^2$$

Ее решение (1.9), (1.3), (1.4) имеет $2k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 - \alpha' - 2\alpha''$ произвольных постоянных.

Краевая задача для функции $F_2(x)$ имеет вид

(5.4) $$\operatorname{Im}[p_0(x)F_2{}^{\pm}(x)] = f_0{}^{\pm}(x),\quad x \in L_2 \cup L_3,\quad p_0(x) = -i^n,$$
$$x \in L_n$$

$$F_2{}^+(x) - F_2{}^-(x) = g_2(x),\quad x \in M_0 = L_1 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6$$

$$f_0{}^{\pm}(x) = {}^1/_2\mu_1 p_1^{-1}[p_{21}v_1{}^0(x) + p_{11}v_2{}^0(x)] - p_1^{-1}[h_1p_{21}\tau_1{}^0(x) +$$
$$+ h_2p_{11}\tau_2{}^0(x)] \pm p_{12}p_{22}p_2^{-1}\tau^0(x),\quad x \in L_2;$$

$$f_0{}^{\pm}(x) = -\mu_1 p_2^{-1}[p_{22}u_1{}^0(x) + p_{12}u_2{}^0(x)] -$$
$$- p_2^{-1}[h_1p_{22}\sigma_1{}^0(x) + h_2p_{12}\sigma_2{}^0(x)] \pm p_1^{-1}p_{11}p_{21}\sigma^0(x),\quad x \in L_3$$

$$g_2(x) = 2p_1{}^{-1}p_{11}p_{21}\sigma^0(x) + 2ip_2{}^{-1}p_{12}p_{22}\tau^0(x)$$

$$\sigma^0(x) = \sigma_1{}^0(x) - \sigma_2{}^0(x),\quad \tau^0(x) = \tau_1{}^0(x) - \tau_2{}^0(x)$$

Положим $F_2(z) = \Phi_2(z) + \Phi_*(z)$, где $\Phi_*(z)$ — решение задачи о скачке $\Phi_*{}^+(x) - \Phi_*{}^-(x) = g_2(x)$, $x \in M_0$, имеющее вид

$$\Phi_*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M_0} \frac{g_2(t)\,dt}{t - z}$$

Тогда для функции $\Phi(z) = \Phi_2(z)$ получим задачу Гильберта (2.1), в которой $L^1 = L_2$, $L^2 = L_3$, $f_s{}^{\pm}(x) = f_0{}^{\pm}(x) - \operatorname{Im}[p_0(x)\Phi_*(x)]$, $x \in L^s$, $s = 1, 2$. Ее решение (2.4) содержит $k_2 + k_3$ произвольных постоянных. Таким образом, общее число произвольных постоянных $2(k_1 + k_2 + k_3) + k_4 + k_5 - \alpha' - 2\alpha''$ равно числу дополнительных параметров задачи.

Полученное решение можно использовать при рассмотрении другой задачи. Введем параметры $\mu_j{}^* = {}^1/_4\mu_j{}^{-1}$, $q_j{}^* = q_j{}^{-1}$, $q_{jk}{}^* = q_{jk}q_j{}^{-1}$. Тогда правые части равенств (5.2) сохраняют свою форму, слева произойдет замена функций u_j' на $-\sigma_{yj}$, v_j' на τ_{xyj} и наоборот

(5.5) $$-\mu_j{}^*\sigma_{yj} = -\operatorname{Re}[\varphi_{j1}(z_{j1}) + q_{j2}{}^*\varphi_{j2}(z_{j2})],$$
$$\mu_j{}^*\tau_{xyj} = \operatorname{Im}[q_{j1}{}^*\varphi_{j1}(z_{j1}) + \varphi_{j2}(z_{j2})]$$
$$-u_j' = 2\operatorname{Re}[q_j{}^*\varphi_{j1}(z_{j1}) + q_{j2}{}^*\varphi_{j2}(z_{j2})],$$
$$v_j' = 2\operatorname{Im}[q_{j1}{}^*\varphi_{j1}(z_{j1}) + q_j{}^*\varphi_{j2}(z_{j2})]$$

Отсюда следует, что при соответствующей замене всех шести граничных условий

(5.6) $$[-u'(x)] = u^\circ(x),\quad [v'(x)] = v^\circ(x),\quad [-\sigma_y(x)] = \sigma^\circ(x),$$
$$[\tau_{xy}(x)] = \tau^\circ(x),\quad x \in L_1$$
$$v_j^\circ(x) = v_j^\circ(x),\quad \tau_{xyj}(x) = \tau_j^\circ(x),\quad x \in L_2;$$
$$-u_j'(x) = u_j^\circ(x),\quad -\sigma_{yj}(x) = \sigma_j^\circ(x),\quad x \in L_3$$

и т. д. и при замене в формулах (5.3), (5.4) величин μ_j, q_j, q_{jk}, u_j°, v_j°, σ_j°, τ_j°, на μ_j^*, q_j^*, q_{jk}^*, σ_j°, τ_j°, u_j°, v_j° эти формулы и представления (5.5) определяют решение задачи (5.6) для составной плоскости с новыми типами граничных условий.

Если плоскость однородна, то вместе с (5.1) можно поставить условие полного сцепления берегов щелей со штампами на произвольных участках L_7. Решением этой задачи будет сумма решений двух задач (3.1), получающихся после разбиения условий $u_j'(x) = u_j^\circ(x)$, $v_j'(x) = v_j^\circ(x)$, $x \in L_7$ и (5.1) на симметричные и кососимметричные.

6. Расклинивание составной плоскости. Решение задачи Гильберта — Римана (и соответствующих задач теории упругости) для случая областей L и M^1, содержащих полубесконечные промежутки, мало отличается от решения (1.9), (1.3). В последнем нужно лишь опустить те из величин $(z - a_1)$, $(z - b_R)$, $(z - s_1)$, $(z - t_Q)$, в которых $a_1 = -\infty$, $b_R = \infty$ или $s_1 = -\infty$, или $a_1 = -\infty$, $t_Q = \infty$ и пользоваться методикой п. 1, классифицируя бесконечно удаленную точку как общую точку двух полубесконечных промежутков. Не изучая отдельно эти варианты, ограничимся рассмотрением задачи, приближенному решению которой посвящена статья [3].

Пусть составная плоскость ослаблена полубесконечным разрезом $-\infty < x < l$, $y = 0$, $l > 0$, который распространяется под действием вложенных в него и движущихся с дорелеевской скоростью c конечного штампа $-b \leqslant x \leqslant -a < 0$ постоянной толщины $2H_1$ и полубесконечного штампа $-\infty < x < -d$ толщины $2H_2$; контактное трение отсутствует, к первому штампу приложена поперечная сила Y. Так как материалы полуплоскостей различны, берега трещины на некотором участке $[0, l)$ смыкаются. Требуется найти решение, в котором смыкание в точках $x = 0$ и $x = -d$ плавное, т. е. напряжения в этих точках ограничены.

Граничные условия задачи имеют вид (5.1), где $\sigma^\circ(x) = \tau^\circ(x) = u^\circ(x) = v^\circ(x) \equiv 0$, $x \in L_1 = [l, \infty)$, $\tau_j^\circ(x) = v_j^\circ(x) \equiv 0$, $x \in L_2 = (-\infty, -d] \cup [-b, -a]$, $\tau_j^\circ(x) = v^\circ(x) = \sigma^\circ(x) \equiv 0$, $x \in L_4 = [0, l)$, $\sigma_j^\circ(x) = \tau_j^\circ(x) \equiv 0$, $x \in L_6 = (-a, 0) \cup (-d, -b)$, участки L_3 и L_5 отсутствуют.

Взяв решение в форме (5.2), (5.3), получим однородную комбинированную задачу $F_1^+(x) = G(x) F_1^-(x)$, $x \in M^1 = L_1$, $\operatorname{Im} F_1^+(x) = 0$, $x \in L^1 = L_2 \cup L_4$ и задачу Дирихле $\operatorname{Im} F_2^\pm(x) = 0$, $x \in [-b, -a]$.

Выпишем каноническое решение первой задачи

6.1) $$X(z) = Z(z)\, e^{i\psi(z)} (z + d)^{-\alpha_1} (z + a)^{-\alpha_2} (z - l)^{-\alpha_3} (z - c_1)^{-1} (z - c_2)^{-1}$$
$$Z(z) = (z - l)^{-1/2 + i\gamma},\quad -\pi \leqslant \arg(z + d) \leqslant \pi,\quad 0 \leqslant \arg(z - t) \leqslant 2\pi,$$
$$t = -a, -b, l, c_1, c_2$$

Преобразуя выражение (1.3) аналогично [9], представим функцию $\psi(z)$ в виде

(6.2) $$\psi(z) = \pi(1/2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \varphi_0(z) + \varphi(z)$$

(6.3) $$\varphi_0(z) = \frac{Y(z)}{\pi i} \sum_{k=1}^{3} \int_{L_k^1} \frac{1/2\pi w_k^+ + \arg(t - c_2) + \arg(t - c_2)}{Y^+(t)(t - z)}\, dt$$

$$\varphi(z) = -\gamma Y(z) \int_l^\infty \frac{dt}{Y(t)(t - z)},\quad Y(z) = \sqrt{(z + d)(z + b)(z + a) z (z - l)}$$
$$L_1^1 = (-\infty, -d],\quad L_2^1 = [-b, -a],\quad L_3^1 = [0, l]$$

Рассмотрим поведение функции $X(z)$ в узлах. По общему правилу $\varepsilon_1 = 0$, $\delta_1 = -1/2$, $\varepsilon_2 = \delta_2 = 0$, $\varepsilon_3 = -1/2$, $\delta_3 = 0$. Так как $L^* = [-b, -a]$, то

(6.4) $$\nu_1 = \nu_3 = 0,\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \nu_2 = -1/2!$$

Функция $X(z)$ имеет корневые особенности при $z=-d, -b, -a, 0$ и ограничена при $z=l$. В связи с отсутствием точек разрыва d_{kl} получим $m^{\pm}(x)\equiv 0$, $N_k=\Delta_k=0$ и, значит, в силу (1.6), (6.4) $\alpha_1=\alpha_3=0$, $\alpha_2=1$.

Так как $\arg Z^+(x)=\arg Z^-(x)=-{}^1/{}_2\pi+\gamma\ln(l-x)$ при $x<l$, то, согласно (1.5), $\omega_k=\theta_k$ или $\omega_1=\omega_2=0$, $\omega_3=1$. Теперь по формуле $w_k^-=2(\delta_k+\omega_k-\lambda_k)$ можно найти числа $w_1^-=-1$, $w_2^-=1$, $w_3^-=1$. Искомое каноническое решение задачи имеет вид

$$X(z)=-\frac{i\exp[i\varphi(z)+i\varphi_0(z)]}{(z-c_1)(z-c_2)\sqrt{z(z+a)(z+b)(z+d)}} \tag{6.5}$$

где функции $\varphi(z)$, $\varphi_0(z)$, $Y(z)$ выражаются формулами (6.3).

Целые числа w_k^+ и комплексные числа c_1, c_2, согласно (1.4), (6.3) определяются системой уравнений ($n=0, 1$)

$$\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{L_k^1}\frac{[{}^1/{}_2\pi w_k^+ + \arg(t-c_1)+\arg(t-c_2)]\,t^n\,dt}{i\pi Y^+(t)}+\gamma\int\limits_{l}^{\infty}\frac{t^n\,dt}{Y(t)}=0$$

Общее решение комбинированной краевой задачи Дирихле — Римана имеет вид (1.9), (6.5), где $\Phi(z)=F_1(z)$, $g(t)=f_2^{\pm}(t)\equiv 0$, $\Phi_1(z)\equiv 0$, $r=4$, $s=2$, $Y_0(z)=(z-l)^{-1/2}[z(z+a)(z+b)(z+d)]^{1/2}$, $Q_s(z)=C_1z+C_0$. Сразу удовлетворяя условию ограниченности функции $F_1(z)=X(z)\,\Phi_2(z)$ при $z=-d, 0$ и полагая поэтому $P_{r-1}(z)=z(z+d)(D_1z+D_0)$, запишем решение в виде

$$F_1(z)=(z-c_1)^{-1}(z-c_2)^{-1}\Psi(z)\exp[i\varphi(z)+i\varphi_0(z)]$$

$$\Psi(z)=\frac{C_1z+C_0}{\sqrt{z-l}}+i(D_1z+D_0)\sqrt{\frac{z(z+d)}{(z+a)(z+b)}}$$

где C_0, C_1, D_0, D_1 — действительные постоянные.

Для устранения полюсов функции $F_1(z)$ в точках $z=c_k$ имеем два комплексных уравнения $\Psi(c_k)=0$, $k=1, 2$. Наконец, решая однородную задачу Дирихле для функции $F_2(z)$, получим [6]

$$F_2(z)=iC(z+a)^{-1/2}(z+b)^{-1/2} \tag{6.6}$$

Координаты граничных точек участков контакта определяются из соотношений

$$\int\limits_{-d}^{-b}[v'(x,0)]\,dx=H_1-H_2,\qquad \int\limits_{-a}^{0}[v'(x,0)]\,dx=-H_1$$

где, согласно (5.2), (5.3) и (6.6), имеем

$$\mu_1\sqrt{p_2}\,[v'(x)]=G^+\operatorname{Im}F_1^+(x)-G^-\operatorname{Im}F_1^-(x)$$

Действительная постоянная C в (6.6) находится по заданному значению силы Y. Интегрируя скачок нормальных напряжений на $[-b, -a]$, получим $C=p_{11}p_{21}(2\pi p_1)^{-1}Y$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
2. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* О некоторых краевых задачах и их приложениях в теории упругости // Изв. ВНИИ гидротехн. 1984. Т. 172. С. 7—13.
3. *Симонов И. В.* О хрупком расклинивании кусочно-однородной упругой среды // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 275—283.
4. *Симонов И. В.* Динамика трещины отрыва-сдвига на границе раздела двух упругих материалов // Докл АН СССР. 1983. Т. 271. № 1. С. 65—68.
5. *Симонов И. В.* Об интегрируемом случае краевой задачи Римана — Гильберта для двух функций и решении некоторых смешанных задач для составной упругой плоскости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 951—960.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
7. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Давление системы штампов на упругую полуплоскость при общих условиях контактного сцепления и скольжения // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 284—293.
8. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
9. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом // ПММ. 1986. Т. 40. Вып. 4. С. 663—673.

Ленинград

Поступила в редакцию 4.I.1988