Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМУЛЕ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИИ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Бородачев Н. М.

Получена вариационная формула для пространственной контактной задачи (КЗ) теории упругости. Эта формула определяет вариацию нормального напряжения на площадке контакта, вызванную вариацией контура площадки контакта. Показана эффективность вариационной формулы при построении асимптотического разложения для пространственной КЗ со сложной линией раздела краевых условий. Подробно рассмотрено решение КЗ для упругого полупространства, когда площадка контакта мало отличается от круга.

Обзор применения асимптотических методов к КЗ теории упругости содержится в [1, 2]. Решения пространственных КЗ со сложной линией раздела краевых условий полученные другими методами, приведены в [3—6].

1. Воспользуемся прямоугольной системой координат x_1, x_2, x_3. Рассмотрим линейно упругое тело, занимающее односвязный объем V. Пусть поверхность O, ограничивающая этот объем, состоит из некоторой поверхности O_1 и плоской поверхности O_0, уравнение которой $x_3 = 0$. В плоскую поверхность тела O_0 вдавливается жесткий цилиндрический штамп произвольного сечения. Основание штампа имеет форму выпуклой поверхности. Уравнение поверхности основания штампа имеет вид

$$x_3 = -f_0(x_1, x_2) \tag{1.1}$$

Плоская поверхность O_0 при этом будет разделена на две части: площадку контакта (ПК) O_3 и поверхность O_2.

Считаем, что величина и линия действия силы P таковы, что площадка контакта O_3 совпадает с поперечным сечением жесткого цилиндра (штампа). Поверхность O_2 свободна от напряжений, а на поверхности O_1 задано статическое краевое условие. Касательные напряжения на ПК O_3 равны нулю. Проекция вектора перемещения на ось x_3 в пределах ПК будет выражаться формулой

$$u_3(x_1, x_2, 0) = c - \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2 - f_0(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \subset O_3$$

Граничный контур ПК обозначим Γ_0. Увеличим размер ПК путем перемещения контура Γ_0 в близкое положение Γ. При этом в каждой точке M контура ПК вариацию $\delta n(M)$ направим вдоль внешней нормали к кривой Γ_0. В этом случае будет иметь место соотношение [7]

$$\int_{\Gamma_0} K_1^2(M)\,\delta n(M)\,ds = -\frac{2\mu}{\pi(1-\nu)} \iint_{O_3} u_3(Q)\,\delta_n\sigma_{33}(Q)\,dS \tag{1.2}$$

$$M \in \Gamma_0, \quad Q \in O_3$$

где K_1 — коэффициент интенсивности сжимающих нормальных напряжений, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\sigma_{33}(Q)$ — нормальное напряжение на ПК, $\delta_n\sigma_{33}$ — вариация напряжения σ_{33}, вызванная вариацией контура ПК δn.

В частном случае (при $K_1 = 0$) из (1.2) следует формула, которая успешно применялась ранее [8, 9] при решении КЗ.

2. Рассмотрим два состояния данного тела, приписывая соответствующим величинам индексы (1) и (2). Рассмотрим также суммарное состояние, для которого

$$u_3 = u_3^{(1)}(Q) + u_3^{(2)}(Q), \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}^{(1)}(Q) + \sigma_{33}^{(2)}(Q) \tag{2.1}$$
$$K_1 = K_1^{(1)}(M) + K_1^{(2)}(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad Q \in O_3$$

Подставляя (2.1) в (1.2) и используя теорему о взаимности работ, получаем

$$\iint\limits_{O_3} u_3^{(1)}\delta_n\sigma_{33}^{(2)}\,dS = \iint\limits_{O_3} u_3^{(2)}\delta_n\sigma_{33}^{(1)}\,dS = -\frac{\pi(1-\nu)}{2\mu}\int\limits_{\Gamma_0} K_1^{(1)}K_1^{(2)}\delta n\,ds \tag{2.2}$$

В случае осевой симметрии это выражение упрощается и принимает вид

$$K_1^{(1)}K_1^{(2)}\delta a = -\frac{2\mu}{\pi(1-\nu)a}\int\limits_0^a r u_3^{(1)}(r)\,\delta_n\sigma_{33}^{(2)}(r)\,dr \tag{2.3}$$

где a — радиус круга (области O_3), δa — вариация радиуса ПК. Отсюда следует, что если для какой-то осесимметричной КЗ известны $K_1^{(2)}$ и $\sigma_{33}^{(2)}(r)$, то для любой другой осесимметричной КЗ величина $K_1^{(1)}$ может быть найдена по формуле (2.3).

Рассмотрим частный случай выражения (2.2), когда $u_3^{(1)}(Q) = U\delta(Q, Q_1)$, где $\delta(Q, Q_1)$ — дельта-функция. Коэффициент интенсивности в этом случае обозначим $K_1^{(1)}(M; Q_1)$. Тогда при $Q_1 \in O_3$ будем иметь (индексы (1) и (2) опустим)

$$\delta_n\sigma_{33}(Q_1) = -\frac{\pi(1-\nu)}{2\mu}\int\limits_{\Gamma_0} K_1^*(M; Q_1)\,K_1^{(0)}(M)\,\delta n(M)\,ds \tag{2.4}$$

где $K_1^*(M; Q_1)$ соответствует $u_3(Q) = \delta(Q, Q_1)$, а $K_1^{(0)}(M)$ соответствует заданному перемещению $u_3(Q)$ на ПК. Формула (2.4) выражает вариацию нормального напряжения на ПК, вызванную вариацией контура ПК.

Из формулы (1.2) следует, что

$$\delta_n W = -\frac{\pi(1-\nu)}{2\mu}\int\limits_{\Gamma_0} K_1^2(M)\,\delta n(M)\,ds \tag{2.5}$$

где W — потенциальная энергия деформации, $\delta_n W$ — вариация потенциальной энергии деформации, вызванная вариацией контура ПК.

Положим в (2.5) $K_1 = UK_1^* + K_1^{(0)}$. Тогда формулу (2.4) можно представить и в таком виде:

$$\delta_n\sigma_{33} = \partial(\delta_n W)/\partial U\,|_{U=0} \tag{2.6}$$

Соотношение (2.6) является в некотором смысле аналогом известной в строительной механике формулы Лагранжа.

Рассмотрим частный случай формулы (2.4), когда ПК O_3 представляет собой круг радиуса a, а Γ_0 — окружность того же радиуса. В этом случае, используя цилиндрические координаты r, θ, z, получаем

$$\delta_n\sigma_z(r, \theta) = -\frac{\pi(1-\nu)a}{2\mu}\int\limits_0^{2\pi} K_1^*(\varphi; r, \theta)\,K_1^{(0)}(\varphi)\,\delta n(\varphi)\,d\varphi \tag{2.7}$$

где φ — полярный угол, соответствующий точке M.

Вариационные формулы (2.4), (2.7) оказались весьма эффективными при решении пространственных КЗ теории упругости со сложной линией раздела краевых условий.

3. Рассмотрим КЗ для упругого тела из п. 1. Граничный контур ПК обозначим через Г. Пусть кривая Г мало отклоняется от окружности радиуса a (кривой Γ_0). Уравнение граничного контура ПК в полярных координатах имеет вид

$$\rho = a\,[1 + \varepsilon f(\varphi)], \quad \varepsilon \ll 1 \tag{3.1}$$

где $f(\varphi)$ — некоторая кусочно-непрерывная функция.

В результате решения этой задачи должен быть найден закон распределения нормального напряжения $\sigma_z(r, \theta)$ на ПК S. Неизвестную функцию $\sigma_z(r, \theta)$ будем искать в виде асимптотического разложения по малому параметру

$$\sigma_z(r, \theta) = \sigma_z^{(0)}(r, \theta) + \varepsilon\sigma_z^{(1)}(r, \theta) + O(\varepsilon^2) \tag{3.2}$$

где $\sigma_z^{(0)}(r, \theta)$ — решение невозмущенной задачи (для круговой площадки контакта). Для нахождения функции $\sigma_z^{(1)}(r, \theta)$ предлагается использовать вариационную формулу (2.7).

Учитывая, что

$$\delta n(\varphi) = \varepsilon a f(\varphi), \quad \delta_n\sigma_z(r, \theta) = \varepsilon\sigma_z^{(1)}(r, \theta)$$

и используя (2.7), находим

$$\sigma_z^{(1)}(r, \theta) = -\frac{\pi(1-\nu)a^2}{2\mu}\int\limits_0^{2\pi} K_1{}^*(\varphi; r, \theta)\,K_1^{(0)}(\varphi)\,f(\varphi)\,d\varphi \tag{3.3}$$

Величины $K_1{}^*$ и $K_1{}^{(0)}$, входящие в (3.3), определяются для круговой ПК радиуса a.

Таким образом, асимптотическое разложение (3.2) построено. При этом КЗ, для которой контур ПК Г определяется формулой (3.1), сведена к задаче с круговой ПК.

Чтобы полученное решение довести до конца, нужно знать функции $\sigma_z^{(0)}(r, \theta)$, $K_1{}^*(\varphi; r, \theta)$ и $K_1{}^{(0)}(\varphi)$. Их можно определить, если конкретизировать вид упругого тела для которого решается КЗ. Наиболее простые результаты получаются если упругое тело занимает полупространство. Поэтому, ниже будем рассматривать пространственную КЗ для упругого полупространства, когда уравнение граничного контура ПК имеет вид (3.1). Чтобы решить эту задачу, необходимо иметь решение соответствующей задачи с круговой ПК. Для решения КЗ для упругого полупространства с круговой ПК предложен ряд способов [1]. Однако для исследования поставленной задачи наиболее удобно решение, полученное ниже.

4. Рассмотрим КЗ для упругого изотропного полупространства с круговой ПК. Считаем, что силы трения на ПК между штампом и полупространством не возникают, а нагрузка на полупространство вне штампа отсутствует. Интегральное уравнение этой задачи имеет вид

$$u_z(r, \theta) = -\frac{1-\nu}{2\pi\mu}\int\limits_0^{2\pi} d\theta_1\int\limits_0^{a}\frac{\sigma_z(r_1, \theta_1)\,r_1\,dr_1}{[r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\theta-\theta_1)]^{1/2}} \tag{4.1}$$

Решение уравнения (4.1) ищем в виде

$$\sigma_z(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{zn}(r)\cos n\theta \quad (r < a) \tag{4.2}$$

т. е. считаем, что напряжение $\sigma_z(r, \theta)$ симметрично относительно $\theta = 0$.

В этом случае

$$(4.3)\qquad u_z(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} u_{zn}(r)\cos n\theta$$

Подставляя (4.2), (4.3) в (4.1), после вычислений находим

$$(4.4)\qquad \sigma_{zn}(r)=\frac{2\mu r^{n-1}}{\pi(1-\nu)}\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{t\psi_n(t)\,dt}{(t^2-r^2)^{1/2}}$$

$$\psi_n(t)=\frac{1}{t^{2n}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{r_1^{n+1}u_{zn}(r_1)\,dr_1}{(t^2-r_1^2)^{1/2}}$$

Формулы (4.2)—(4.4) дают решение КЗ для упругого полупространства при наличии круговой ПК. Далее, можно получить выражение для коэффициента интенсивности сжимающих напряжений. Имеем

$$K_1(\varphi)=-\lim_{r\to a-0,\ \theta\to\varphi}\left[2^{1/2}(a-r)^{1/2}\sigma_z(r,\theta)\right]$$

Подставляя сюда (4.2) и (4.4), находим

$$(4.5)\qquad K_1(\varphi)=\frac{2\mu}{\pi(1-\nu)}\sum_{n=0}^{\infty} a^{n-1/2}\psi_n(a)\cos n\varphi$$

Рассмотрим частный случай, когда

$$u_z(r,\theta)=r^{-1}\delta(r-r_1)\delta(\theta)$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция. В этом случае формула (4.5) дает

$$K_1{}^*(\varphi)=-\frac{\mu a^{1/2}}{\pi^2(1-\nu)(a^2-r_1^2)^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\left(\frac{r_1}{a}\right)^n\cos n\varphi$$

где $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_n=2$ при $n>0$. Суммируя ряд, окончательно получаем

$$(4.6)\qquad K_1{}^*(\varphi)=-\frac{\mu a^{1/2}}{\pi^2(1-\nu)(a^2-r_1^2)^{1/2}(a^2+r_1^2-2ar_1\cos\varphi)}$$

5. Теперь можно возвратиться к КЗ для упругого полупространства, когда контур ПК Г определяется формулой (3.1).

Полагаем (для упрощения задачи), что ПК S имеет две оси симметрии и сила P направлена вдоль оси z, которая проходит через центр тяжести ПК. В этом случае штамп будет вдавливаться в упругое полупространство строго поступательно (без поворота) и перемещение поверхности полупространства в пределах ПК будет иметь вид

$$(5.1)\qquad u_z(r,\theta)=c-f_0(r,\theta)$$

Решение этой задачи дается формулой (3.2). Напряжение $\sigma_z{}^{(0)}(r,\theta)$, входящее в (3.2), можно найти при помощи выражений (4.2), (4.4). Для определения функции $\sigma_z{}^{(1)}(r,\theta)$ следует использовать (3.3). При помощи формулы (4.6) из (3.3) окончательно находим

$$(5.2)\qquad \sigma_z^{(1)}(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-r^2)^{-1/2}v(a,\varphi)\,d\varphi}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)}$$

$$v(a,\varphi)=a^{1/2}K_1{}^{(0)}(\varphi)f(\varphi)$$

В этой формуле $K_1{}^{(0)}(\varphi)$ определяется для круговой ПК в зависимости от функции $u_z(r,\theta)=c-f_0(r,\theta)$. Для нахождения величины $K_1{}^{(0)}$ можно использовать формулу (4.5).

Таким образом, асимптотическое разложение (3.2), которое дает решение рассматриваемой КЗ, построено.

Рассмотрим некоторые свойства функции $\sigma_z^{(1)}(r, \theta)$. Умножим обе части первой формулы (5.2) на $(a^2 - r^2)^{3/2}$. Тогда интеграл в правой части полученной формулы представляет собой интеграл Пуассона. Следовательно, выражение $(a^2 - r^2)^{3/2}\sigma_z^{(1)}(r, \theta)$ — гармоническая функция внутри круга $r < a$ и $v(a, \varphi)$ — предельные значения этой функции на окружности этого круга, т. е.

$$\lim_{r \to a,\ \theta \to \varphi} [(a^2 - r^2)^{3/2}\sigma_z^{(1)}(r, \theta)] = a^{5/2}K_1^{(0)}(\varphi) f(\varphi)$$

Функция $v(a, \varphi)$, а следовательно и $f(\varphi)$, может быть произвольной кусочно-непрерывной функцией.

6. Рассмотрим примеры использования полученного решения. Пусть штамп имеет плоское основание. В этом случае $f_0(r, \theta) = 0$ и

$$\sigma_z^{(0)}(r, \theta) = -\frac{2\mu c}{\pi(1-\nu)(a^2-r^2)^{1/2}}, \quad K_1^{(0)}(\varphi) = \frac{2\mu c}{\pi(1-\nu)a^{1/2}} \tag{6.1}$$

Подставляя (6.1) в (3.2) и (5.2), находим

$$\sigma_z(r, \theta) = -\frac{2\mu c}{\pi(1-\nu)(a^2-r^2)^{1/2}}\left[1 - \varepsilon\frac{a^2F(r, \theta)}{a^2-r^2}\right] + O(\varepsilon^2) \tag{6.2}$$

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-r^2)f(\varphi)\,d\varphi}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)}$$

Из рассмотрения выражения в квадратных скобках первой формулы (6.2) видно, что предположение о малости возмущений нарушается вблизи критической точки $r = a$. Поэтому полученное решение не является равномерно пригодным вблизи критической точки. Равномерную пригодность разложения (6.2) можно восстановить применяя метод деформированных координат [10].

Заменим в (6.2) r слегка деформированной координатой r_0

$$r = r_0 + \Psi(r_0, \theta) \tag{6.3}$$

Подставляя (6.3) в (6.2), получаем

$$\sigma_z(r_0, \theta) = -\frac{2\mu c}{\pi(1-\nu)}(a^2-r_0^2)^{-1/2}\left[1 + \varepsilon\frac{r_0\Psi(r_0, \theta)}{a^2-r_0^2} - \varepsilon\frac{a^2F(r_0, \theta)}{a^2-r_0^2}\right] + O(\varepsilon^2) \tag{6.4}$$

В соответствии с принципом Лайтхилла приближения высших порядков не должны иметь бóльшую особенность, чем первое приближение. На этом основании полагаем

$$\Psi(r_0, \theta) = r_0F(r_0, \theta) \tag{6.5}$$

Подставляя (6.5) в (6.4), будем иметь

$$\sigma_z(r_0, \theta) = -\frac{2\mu c}{\pi(1-\nu)}[1 - \varepsilon F(r_0, \theta)](a^2 - r_0^2)^{-1/2} + O(\varepsilon^2)$$

Возвращаясь к переменной r, окончательно находим

$$\sigma_z(r, \theta) = -\frac{2\mu c}{\pi(1-\nu)\{[1+2\varepsilon F(r, \theta)]a^2 - r^2\}^{1/2}} + O(\varepsilon^2) \tag{6.6}$$

$$r < a\,[1 + \varepsilon f(\varphi)]$$

Формула (6.6) определяет напряжение σ_z на ПК S, граничный контур которой описывается уравнением (3.1). Функцию $F(r, \theta)$, входящую в (6.6), можно найти по формуле (6.2). Таким образом, выражение (6.6) дает полное решение поставленной КЗ для штампа с плоским основанием.

Чтобы показать ход дальнейших вычислений нужно задаться конкретной формой ПК, т. е. функцией $f(\varphi)$. Пусть, например, граничный контур ПК S — эллипс с полуосями $(1+\varepsilon)\,a$ и a. В этом случае

$$(6.7)\qquad f(\varphi)=\cos^2\varphi,\quad F(r,\theta)=(a^2+r^2\cos 2\theta)/(2a^2)$$

Переходя в (6.6) к прямоугольным координатам и используя (6.7), получаем

$$(6.8)\qquad \sigma_{33}(x_1,x_2)=-\frac{2c\mu(1-\varepsilon/2)}{\pi(1-\nu)\,a}\left\{1-\frac{x_1^2}{[(1+\varepsilon)\,a]^2}-\frac{x_2^2}{a^2}\right\}^{-1/2}+O(\varepsilon^2)$$
$$(x_1,x_2)\subset S$$

Далее, если учесть соотношение

$$P=-\iint\limits_S \sigma_{33}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

то можно определить глубину вдавливания штампа

$$(6.9)\qquad c=\frac{P(1-\nu)}{4\mu a}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)+O(\varepsilon^2)$$

Точное решение этой задачи, когда ПК — эллипс с полуосями $(1+\varepsilon)\,a$ и a, имеет вид

$$(6.10)\qquad \sigma_{33}(x_1,x_2)=-\frac{c\mu}{(1-\nu)\,a\mathrm{K}(k)}\left\{1-\frac{x_1^2}{[(1+\varepsilon)\,a]^2}-\frac{x_2^2}{a^2}\right\}^{-1/2}$$
$$c=\frac{P(1-\nu)}{2\pi\mu(1+\varepsilon)\,a}\,\mathrm{K}(k),\qquad k=\frac{[\varepsilon(2+\varepsilon)]^{1/2}}{1+\varepsilon}$$

где $\mathrm{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Если разложить (6.10) в ряды по степеням ε, то придем к формулам (6.8), (6.9).

Оценим погрешность, к которой приводит использование формулы (6.8). Для этого рассмотрим величину

$$(6.11)\qquad \beta=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\mathrm{K}(k)$$

Например, $\beta=0{,}985$ при $\varepsilon=0{,}2$. Так как величина β представляет собой отношение напряжений σ_{33}, вычисленных по формулам (6.8) и (6.10), то выражение (6.8) при $\varepsilon\leqslant 0{,}2$ дает погрешность не более 1,5%. По-видимому, такой же точностью обладает и формула (6.6), частным случаем которой является (6.8). Но выражение (6.6) применимо и для других форм ПК, для которых точные решения отсутствуют.

Пусть теперь граничный контур ПК определяется уравнением (3.1). Будем считать, что функция $f(\varphi)$, входящая в (3.1), — четная функция от φ. Разлагая ее в ряд Фурье

$$f(\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos k\varphi,\qquad A_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi,\qquad k=0,1,2,\ldots$$

и подставляя во вторую формулу (6.2), после интегрирования получаем

$$(6.12)\qquad F(r,\theta)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\left(\frac{r}{a}\right)^k\cos k\theta$$

Если подставить (6.12) в (6.6), то получим формулу для определения напряжения σ_z на ПК, граничный контур которой дается уравнением (3.1).

Рассмотрим частный случай уравнения (3.1), когда

$$\rho=a\,[1+\varepsilon(1+\cos 4\varphi)]$$

В этом случае $f(\varphi)=1+\cos 4\varphi$ и формула (6.12) дает

$$F(r,\theta)=1+(r/a)^4\cos 4\theta$$

Не представляет принципиальных затруднений и рассмотрение случая штампа с неплоским основанием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
2. *Александров В. М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 672—683.
3. *Моссаковский В. И., Качаловская Н. Е., Голикова С. С.* Контактные задачи математической теории упругости. Киев: Наук. думка, 1985. 175 с.
4. *Мартыненко М. Д.* Некоторые пространственные задачи теории упругости // Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 78—85.
5. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
6. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
7. *Бородачев Н. М.* Применение принципа минимума дополнительной работы для контактных задач теории упругости // Прикл. механика, 1985. Т. 21. № 9. С. 116—120.
8. *Александров В. М.* Контактные задачи для полупространства. Сложные в плане области контакта // Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. С. 200—206.
9. *Порошин В. С.* К вопросу об ограниченности контактных давлений на контуре эллиптического в плане штампа, взаимодействующего с упругим слоем // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 466—472.
10. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.

Поступила в редакцию 9.III.1988

Киев