Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 539.3

К АСИМПТОТИЧЕСКОМУ МЕТОДУ «БОЛЬШИХ λ»

Лубягин И. А., Чебаков М. И.

В развитие результатов работы [1], где для одного класса смешанных осесимметричных задач теории упругости приведен легко реализуемый способ построения любого количества членов разложения решения в ряд при помощи метода больших λ, излагается способ построения также любого количества членов такого разложения для другого широкого класса интегральных уравнений смешанных задач теории упругости и математической физики. Алгоритм приводит к простым арифметическим рекуррентным соотношениям, что позволяет значительно расширить область применения метода больших λ вплоть до его теоретической границы и строить решение с любой степенью точности. В качестве примера рассматриваются две задачи о взаимодействии штампа с прямоугольником, для которых получены некоторые новые результаты

Метод больших λ был предложен и развит в работах [2—5] и др.

1. Решение интегрального уравнения. Многие плоские смешанные задачи механики сплошной среды сводятся к решению интегрального уравнения [5]

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t) k\left(\frac{t-\tau}{\lambda}\right) dt = \pi f(\tau), \quad |\tau| \leqslant 1 \tag{1.1}$$

где λ — безразмерный геометрический параметр, $f(\tau)$ — известная функция, $k(y)$ — ядро, представимое в виде

$$k(y) = -\ln|y| - F(y), \quad F(y) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i y^{2i} \tag{1.2}$$

Последний ряд абсолютно сходится при $|y| < y_0$, следовательно, аналогичный ряд для функции $F((t-\tau)/\lambda)$ при $|t| \leqslant 1$, $|\tau| \leqslant 1$ будет сходиться, если $\lambda > 2/y_0$.

Было показано [5], что если $f'(\tau) \in L_{p[-1,1]}$, $p > 3/4$, то любое решение интегрального уравнения (1.1) из класса $L_{p[-1,1]}$, $p \geqslant 1$ будет также решением интегрального уравнения

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\left[P - \int_{-1}^{1} \frac{f'(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t} d\tau + \right. \tag{1.3}$$

$$\left. + \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t} d\tau \int_{-1}^{1} \varphi(x) F'\left(\frac{x-\tau}{\lambda}\right) dx\right]$$

$$P = \frac{1}{\ln 2\lambda}\left[\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^{1} \varphi(x) F\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) dx\right]$$

$$\left(P = \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt\right)$$

Решение интегрального уравнения (1.3) будем искать в виде [5]

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-2n} \varphi_n(t)$$

Тогда для определения $\varphi_n(t)$ получим рекуррентные соотношения

$$\varphi_0(t)=\frac{g(t)}{\pi\sqrt{1-t^2}}, \quad g(t)=P-\int_{-1}^{1}\frac{f'(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t}$$

$$\varphi_m(t)=\frac{2}{\pi^2\sqrt{1-t^2}}\sum_{i=1}^{m} id_i\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}\,d\tau}{\tau-t}\int_{-1}^{1}\varphi_{m-i}(x)(x-\tau)^{2i-1}dx$$

$(m\geqslant 1)$

Если в последнем соотношении представить бином $(x-\tau)^{2i-1}$ в виде многочлена и изменить порядок интегрирования, то получим

$$\varphi_m(t)=\frac{2}{\pi^2\sqrt{1-t^2}}\sum_{i=1}^{m} id_i\sum_{k=0}^{2i-1} c_{ki}\Phi_{m-i}^{2i-k-1}R_k(t) \quad (m\geqslant 1) \tag{1.4}$$

Здесь

$$R_k(t)=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}\,\tau^k\,d\tau}{\tau-t}, \quad \Phi_m{}^k=\int_{-1}^{1}\varphi_m(x)\,x^k\,dx \tag{1.5}$$

$$c_{ki}=(-1)^k\frac{(2i-1)!}{k!\,(2i-k-1)!}$$

Сингулярный интеграл $R_k(t)$ представляется в виде многочлена [5]

$$R_{2n+1}(t)=\pi\sum_{j=0}^{n+1}s_{n-j}t^{2j}\ (n\geqslant 0), \quad R_{2n+2}(t)=\pi\sum_{j=0}^{n+1}s_{n-j}t^{2j+1}\ (n\geqslant -1) \tag{1.6}$$

$$s_{-1}=-1, \quad s_0=\frac{1}{2}, \quad s_k=\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} \quad (k\geqslant 1)$$

Подставляя (1.6) в (1.4) и изменяя порядок суммирования, получим представление

$$\varphi_m(t)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}\left\{\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_{mj}t^{2j+1}+\sum_{j=0}^{m}\beta_{mj}t^{2j}\right\} \quad (m\geqslant 1) \tag{1.7}$$

в котором коэффициенты α_{mj} и β_{mj} определяются из простых рекуррентных соотношений

$$\alpha_{mj}=2\sum_{i=j+1}^{m-1}id_i\sum_{n=j}^{i-1}c_{2n,\,i}s_{n-j-1}\sum_{p=0}^{m-i-1}\alpha_{m-i,\,p}\frac{(2p+2i-2n-1)!!}{(2p+2i-2n)!!}+ \tag{1.8}$$

$$+\ d_m\sum_{n=j}^{m-1}c_{2n,\,m}s_{n-j-1}\Phi_0^{2m-2n-1} \quad (m\geqslant 1,\ 0\leqslant j\leqslant m-1)$$

$$\beta_{mj}=2\sum_{\substack{i=j\\ i\neq 0}}^{m-1}id_i\sum_{\substack{n=j-1\\ n\neq -1}}^{i-1}c_{2n+1,\,i}s_{n-j}\sum_{p=0}^{m-i}\beta_{m-i,\,p}\frac{(2p+2i-2n-3)!!}{(2p+2i-2n-2)!!}+$$

$$+\ md_m\sum_{\substack{n=j-1\\ n\neq -1}}^{m-1}c_{2n+1,\,m}s_{n-j}\Phi_0^{2m-2n-2} \quad (m\geqslant 1, 0\leqslant j\leqslant m)$$

При переходе от соотношения (1.4) к (1.7), (1.8) постоянные $\Phi_m{}^k$ $(m\geqslant 1)$ были вычислены подстановкой (1.7) во второе соотношение (1.5).

Постоянные $\Phi_0{}^k$, участвующие в соотношениях (1.8), выражаются через правую часть интегрального уравнения (1.1) по формуле

$$\Phi_0^k = P\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} - \Phi_*^k, \quad \Phi_*^0 = 0 \tag{1.9}$$

$$\Phi_*^{2k+1} = -\int_{-1}^{1} f'(\tau)\sqrt{1-\tau^2}\,T_k(\tau)\,d\tau \quad (k \geqslant 0)$$

$$\Phi_*^{2k+2} = -\int_{-1}^{1} f'(\tau)\sqrt{1-\tau^2}\,\tau T_k(\tau)\,d\tau \quad (k \geqslant 0)$$

$$T_k(\tau) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\tau^{2(k-n)}$$

Учитывая линейную зависимость Φ_0^k от P, даваемую первым соотношением (1.9), представим решение исходного интегрального уравнения (1.1) в форме

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\left[P\varphi^{(1)}(t) - \varphi^{(2)}(t)\right] \tag{1.10}$$

$$\varphi^{(1)}(t) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{-2m} \sum_{j=0}^{m} \beta_{mj}^1 t^{2j}$$

$$\varphi^{(2)}(t) = \int_{-1}^{1} \frac{f'(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - t}\,d\tau + 2\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{-2m}\left(\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{mj}^2 t^{2j+1} + \sum_{j=0}^{m} \beta_{mj}^2 t^{2j}\right)$$

Коэффициенты β_{mj}^1 находятся по рекуррентным соотношениям из (1.8), в которых β_{mj} надо заменять на β_{mj}^1

$$\Phi_0^{2k} = (2k-1)!!/(2k)!! \tag{1.11}$$

а коэффициенты α_{mj}^2 и β_{mj}^2 находятся по рекуррентным соотношениям (1.8), в которых α_{mj} и β_{mj} надо соответственно заменить на α_{mj}^2 и β_{mj}^2 причем $\Phi_0^k = \Phi_*^k$, где Φ_*^k определяется вторым, третьим и четвертым соотношениями (1.9).

Для нахождения интегральной характеристики P решения интегрального уравнения (1.1) воспользуемся вторым равенством (1.3), тогда

$$P = \left[\ln 2\lambda - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-2k} p_k\right]^{-1}\left[P_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-2k} p_k^*\right] \tag{1.12}$$

$$P_0 = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad p_0 = d_0$$

$$p_k = d_k \sum_{m=0}^{k} q_{mk}\frac{(2k-2m-1)!!}{(2k-2m)!!} + 2\Sigma_1$$

$$p_k^* = d_k \sum_{m=0}^{k} q_{mk}\Phi_*^{2(k-m)} + 2\Sigma_2$$

$$\Sigma_s = \sum_{i=0}^{k-1} d_i \sum_{m=0}^{i} q_{mi} \sum_{p=0}^{k-i} \beta_{k-i,\,p}^s \frac{(2p+2i-2m-1)!!}{(2p+2i-2m)!!} \quad (k \geqslant 1)$$

$$q_{mi} = \frac{(2m-1)!!\,(2i)!}{(2m)!!\,(2m)!\,(2i-2m)!}$$

В ряде случаев полезно знать и такую интегральную характеристику:

$$M = \int_{-1}^{1} t\varphi(t)\,dt \tag{1.13}$$

Подставляя первое соотношение (1.10) в (1.13), получим

$$M = -\Phi_*^{1} - 2\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{-2m}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{mj}^2\frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!} \tag{1.14}$$

Видно, что все искомые величины, связанные с решением интегрального уравнения (1.1), выражены через элементарные функции. В решении фигурируют постоянные Φ_*^{k} и P_0, представимые в виде интегралов от $f(t)$. В случае, когда $f(t)$ — многочлен, эти интегралы берутся в явном виде.

Из условия сходимости ряда (1.2) получаем, что решение интегрального уравнения (1.1) изложенным методом может быть получено при $\lambda > 2/y_0$, где y_0 — радиус сходимости ряда в (1.2).

2. Примеры. Для иллюстрации эффективности изложенного метода рассмотрим плоскую задачу о взаимодействии штампа с упругим прямоугольником. Некоторые из полученных здесь результатов для этой задачи имеют также самостоятельный интерес. Пусть в декартовой системе координат x, y прямоугольник занимает область $0 \leqslant y \leqslant h$, $|x| \leqslant b$. Штамп с плоским основанием без трения вдавливается на величину δ в грань $y = h$ на отрезке $|x| \leqslant a$. На гранях $y = 0$ и $|x| = b$ заданы условия отсутствия нормальных перемещений и касательных напряжений (задача А). На грани $y = 0$ могут быть рассмотрены и условия жесткого защемления (задача Б). Эти задачи и аналогичные им по постановке рассматривались и другими авторами (например, [6—12] и др.).

Поставленные задачи сводятся к решению интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1}\psi(\tau)\,k\left(\frac{t-\tau}{\lambda}\right)d\tau = \pi\left(\frac{\mu\delta}{a(1-\nu)} - \frac{Qk_0}{2a\varepsilon}\right) \quad (|t| \leqslant 1) \tag{2.1}$$

$$\lambda = \frac{h}{a}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad Q = \int_{-a}^{a} q(x)\,dx, \quad l_0 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)^2}$$

$$k(y) = \frac{\pi}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}K(\beta_n)\cos\beta_n y, \quad \beta_n = \frac{\pi n h}{b} \tag{2.2}$$

$$K(u) = \frac{\operatorname{ch}2u - 1}{u(\operatorname{sh}2u + 2u)} \quad \text{(задача А)}$$

$$K(u) = \frac{2\varkappa\operatorname{sh}2u - 4u}{u(2\varkappa\operatorname{ch}2u + 1 + \varkappa^2 + 4u^2)}, \quad \varkappa = 3 - 4\nu \text{ (задача Б)}$$

где $q(x) = \psi(x/a)$ — контактные напряжения под штампом, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, Q — сила, действующая на штамп.

λ	N	Q^*	q^*			
			$\tau = 0$	0,4	0,8	0,95
1,2	19	4,803	1,905	1,948	2,381	3,919
1,2	20	4,833	1,910	1,953	2,388	3,975
1,2	21	4,808	1,906	1,949	2,382	3,927
1,5	8	4,012	1,560	1,607	2,003	3,346
1,5	9	4,010	1,559	1,606	2,002	3,340
1,5	10	4,011	1,559	1,607	2,002	3,343
2,0	2	3,159	1,210	1,250	1,582	2,687
2,0	3	3,143	1,213	1,254	1,574	2,637
2,0	4	3,147	1,213	1,254	1,577	2,645

Решение интегрального уравнения (2.1) связано с решением уравнения (1.1) при $f(\tau)=1$ с ядром (2.2) соотношением

$$\psi(\tau)=\frac{\mu\delta}{a(1-\nu)}\left(1-\frac{k_0Q^*}{2\varepsilon}\right)\varphi(\tau)$$

$$Q=\frac{\mu\delta}{1-\nu}Q^*,\quad Q^*=P\left(1+\frac{k_0P}{2\varepsilon}\right)^{-1}$$

(величина P определена выражением в скобках в (1.3)).

Ядро (2.2) может быть представлено в виде (1.2), где (B_{2i} — числа Бернулли)

$$d_0=\ln\frac{\pi}{\varepsilon}+\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}[1-\beta_nK(\beta_n)]$$

$$d_i=\frac{(-1)^iB_{2i}}{2i(2i)!}\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{2i}+$$
$$+\frac{(-1)^i\pi}{(2i)!\,\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}[1-\beta_nK(\beta_n)]\beta_n^{2i-1}\quad(i=1,2,\ldots)$$

Используя результаты п. 1, для поставленных задач получим

$$\varphi(t)=\frac{P}{\pi\sqrt{1-t^2}}\left[1+2\sum_{m=1}^{N}\lambda^{-2m}\sum_{j=0}^{m}\beta_{mj}^1t^{2j}+O(\lambda^{-2N-2})\right]\tag{2.3}$$

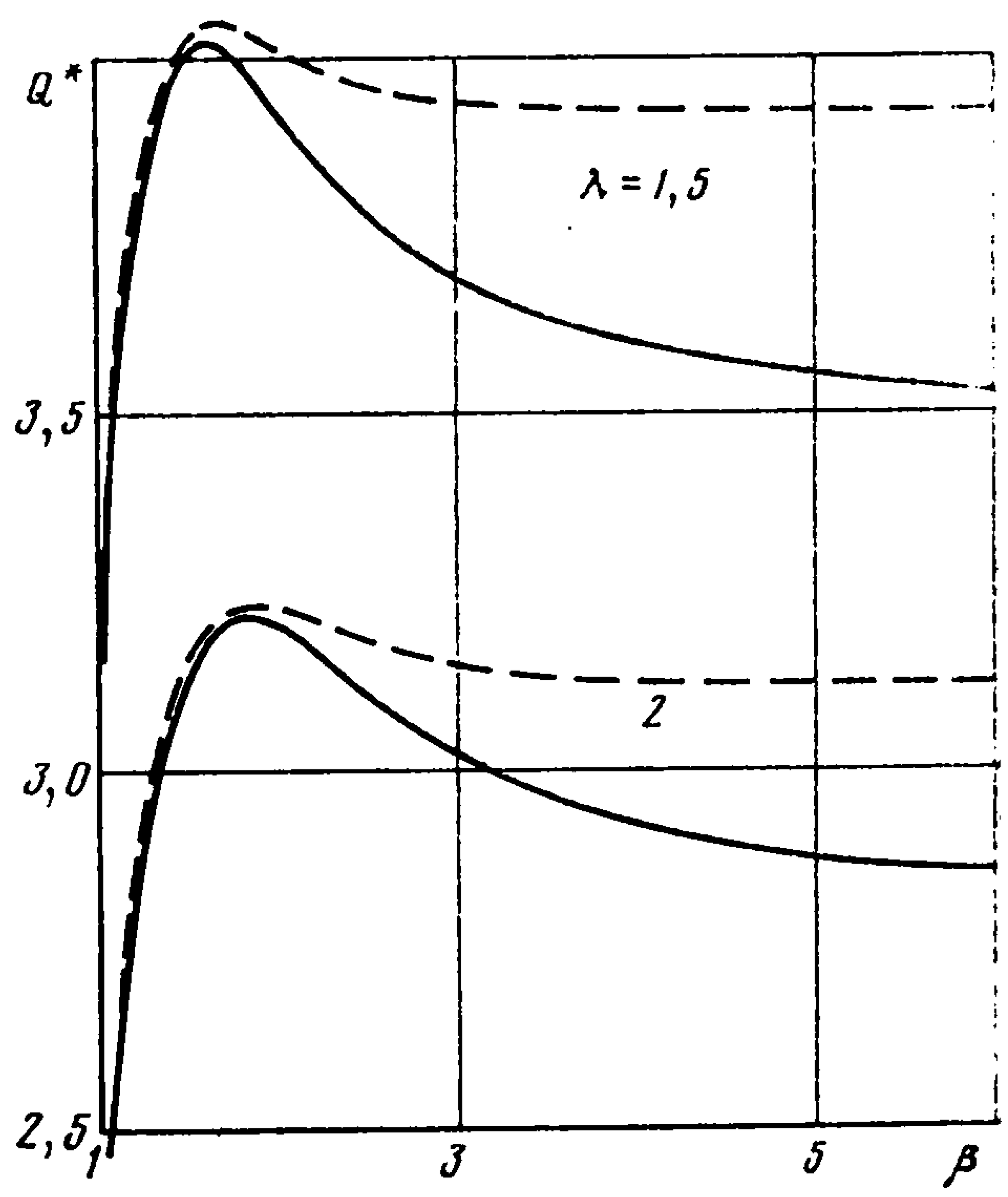
$$P=\pi\left[\ln 2\lambda-\sum_{k=0}^{N}\lambda^{-2k}p_k+O(\lambda^{-2N-2})\right]^{-1}$$

где β_{mj}^1 вычисляются по рекуррентным соотношениям из (1.8), в которых β_{mj} надо заменить на β_{mj}^1, а Φ_0^{2k} взять из (1.11), p_k вычисляются по формулам из (1.12).

Формулы (2.3) выписаны с точностью до членов $O(\lambda^{-2N-2})$ и значение N выбирается в зависимости от заданной точности.

Как показали числовые эксперименты, сходимость метода (выбор значения N) не зависит от параметра ε и улучшается с увеличением λ. При этом решение можно получить с любой степенью точности при $\lambda>1$. Важно отметить, что коэффициенты при степенях λ^{-1} в суммах из (2.3) знакопеременны.

Для получения заданной точности, например в 1%, в (2.3) следует взять $N=3$ при $\lambda=2$, $N=8$ при $\lambda=1{,}3$, $N=17$ при $\lambda=1{,}2$, $N=26$ при $\lambda=1{,}15$.



В таблице для демонстрации сходимости метода больших λ для задачи А приведены значения величины Q^*, характеризующей жесткость прямоугольника, и величины безразмерных контактных напряжений под штампом

$$q^*(\tau)=\frac{a(1-\nu)}{\mu\delta}q(\tau a)=\frac{a(1-\nu)}{\mu\delta}\psi(\tau)\quad(|\tau|\leqslant 1)$$

при некоторых значениях параметров λ, N, τ и $\beta=b/a=1.5$.

В результате проведенных исследований обнаружена немонотонная зависимость жесткости прямоугольника (величины Q^*) от параметра β при фиксированном значении λ. На фигуре для задач А (сплошная линия) и Б (штриховая линия) приведены зависимости Q^* от β при разных λ. Видно, что при определенных значениях β в обеих задачах прямоугольник имеет максимальную жесткость, при дальнейшем увеличении β жесткость уменьшается и стремится к предельному значению, соответствующему задачам для слоя. Следует подчеркнуть, что в задаче Б при $\beta \to \infty$ убывание Q^* идет гораздо быстрее, чем в задаче А.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чебаков М. И.* О дальнейшем развитии метода больших λ в теории смешанных задач // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 561—565.
2. *Ворович И. И.*, *Юдович В. И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 525—532.
3. *Ворович И. И.*, *Устинов Ю. А.* О давлении штампа на слой конечной толщины // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 445—455.
4. *Александров В. М.*, *Ворович И. И.* О действии штампа на упругий слой конечной толщины // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 323—333.
5. *Ворович И. И.*, *Александров В. М.*, *Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
6. *Александров В. М.*, *Коваленко Е. В.* Периодические контактные задачи для упругой полосы // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т. 30. № 4. С. 18—33.
7. *Нахмейн Е. Л.*, *Нуллер Б. М.* Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 53—61.
8. *Валов Г. М.* Об одной основной смешанной задаче теории упругости для прямоугольника // Изв. АН СССР. Механика. 1961. № 3. С. 133—142.
9. *Баблоян А. А.*, *Енгибарян А. А.* Контактная задача для прямоугольника при наличии сцепления // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т. 30. № 3. С. 3—14.
10. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 1. С. 89—100.
11. *Баблоян А. А.*, *Гулканян Н. О.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника // Изв. АН АрмССР. Механика. 1969. Т. 22, № 1. С. 3—16.
12. *Баблоян А. А.*, *Мкртчян А. М.* Решение плоской смешанной задачи для прямоугольника // Изв. АН АрмССР. Механика. 1972. Т. 25. № 2. С. 3—14.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
8.IX.1987