

УДК 539.3

О НОВОМ ПОДХОДЕ К АСИМПТОТИЧЕСКОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК В ЗАКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

Евкин А. Ю.

Предлагается метод асимптотического интегрирования нелинейных уравнений теории пологих упругих оболочек, основанный на новом определении малого параметра, который выбирается пропорциональным отношению толщины оболочки к амплитуде ее прогиба. Этот параметр действительно мал в случае, если оболочка находится в закритической стадии, т. е. ее прогибы велики. Выполнено асимптотическое разложение решения уравнений равновесия оболочки по указанному параметру. Установлено, что первые два приближения приводят к геометрической теории устойчивости оболочек, сформулированной А. В. Погореловым [1]. Путем сравнения асимптотического решения с численным решением [2], найденным для сферической оболочки при осесимметричной деформации, показана удовлетворительная точность предложенного метода при достаточно больших прогибах. В области малых прогибов используется известный подход Койтера. Сращивание двух асимптотических разложений, одно из которых пригодно при малых прогибах, а второе — при больших, осуществляется при помощи аппроксимации Паде.

Несмотря на определенную эффективность известного асимптотического метода ([3—5] и др.) в нелинейной теории оболочек, в нем не используются особенности нелинейных уравнений, описывающие поведение оболочки при прогибах, существенно превышающих ее толщину. Значительные закритические деформации оболочек в ряде случаев хорошо описываются геометрической теорией А. В. Погорелова [1], которая, однако, носит феноменологический характер. Обоснованию геометрического метода посвящены исследования [3—7]. Следует отметить работу [7], в которой при изучении осесимметричной деформации замкнутой сферы при равномерном внешнем давлении в качестве малого параметра использовано отношение толщины оболочки к характерному размеру области закритической вмятины. В качестве основного приближения получены соотношения геометрической теории. Однако связь между параметрами закритической формы равновесия и величиной нагрузки не была установлена.

Отличительная особенность предлагаемого ниже подхода заключается в преобразовании системы разрешающих уравнений теории пологих оболочек путем введения новых переменных, которые выявляются при рассмотрении изгибаний исходной срединной поверхности с нарушением регулярности вдоль линий. Эти линии, а также им ортогональные принимаются в качестве координатных. В результате выявлен новый малый параметр, который непосредственно характеризует нелинейность системы.

1. В рамках теории пологих оболочек рассматривается закритическая осесимметричная деформация замкнутой сферы при равномерном внешнем давлении q . Исходные разрешающие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \frac{d}{dr} (\nabla^2 W) &= \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{rq}{2h} \\ \frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) &= -E \left[\frac{1}{R} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{2r} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 \right], \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где Φ — функция напряжений, R — радиус сферы, E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала. Система уравнений (1.1) допускает два очевидных решения. Первое

$$W = \text{const}, \quad d\Phi/dr = -qrR/(2h)$$

соответствует исходному безмоментному состоянию оболочки. Второе описывает изометрическое преобразование сферы, полученное путем зеркального отражения сегмента относительно плоскости его основания [1], и имеет вид

$$W = W^{\circ} (1 - r^2/(W^{\circ}R)) \quad (1.2)$$

Вводя замену переменных

$$z = r^2/(W^{\circ}R), \quad w = W/W^{\circ}$$

которая соответствует соотношению (1.2), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(z \frac{dw}{dz} \right) &= \frac{d\varphi}{dz} \left(1 + 2 \frac{dw}{dz} \right) + q^{\circ} \\ \varepsilon^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(z \frac{d\varphi}{dz} \right) &= - \frac{dw}{dz} \left(1 + \frac{dw}{dz} \right) \\ \varepsilon^2 &= \frac{2}{w^{\circ} \sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad w^{\circ} = \frac{W^{\circ}}{h}, \quad \Phi = \varphi \frac{EhW^{\circ}}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \\ q^{\circ} &= \frac{q}{q_*}, \quad q_* = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Особенность полученной системы — наличие параметра ε , который уменьшается с ростом амплитуды прогиба W° и становится малым для существенно закритических конфигураций. Предельная система уравнений (при $\varepsilon = 0$) имеет два решения. Первое соответствует исходному безмоментному состоянию оболочки, второе — изометрическому преобразованию срединной поверхности, которое в новых переменных имеет наиболее простой вид

$$w = 1 - z \quad (1.4)$$

Составное решение при $z = 1$ терпит разрыв, который компенсируется функциями внутреннего пограничного слоя. Поэтому в соответствии с работой [8] асимптотическое разложение решения системы (1.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом первых приближений ищется в виде

$$\begin{aligned} w &= \varepsilon^n w_{n-1}, \quad \varphi = \varepsilon^n \varphi_{n-1}, \quad q^{\circ} = q_0 + \varepsilon^n q_n \quad (n = 1, 2, 3, 4) \\ \varepsilon w_i &= W_i(z) + \varepsilon v_i(t), \quad \varepsilon \varphi_i = \Phi_i(z) + \varepsilon u_i(t), \quad t = (1-z)/\varepsilon \end{aligned} \quad (1.5)$$

где v_i, u_i — функции, описывающие внутренний краевой эффект, W_i, Φ_i — функции, соответствующие основному состоянию. Можно получить, что

$$\begin{aligned} \frac{dW_k}{dz} &= 0, \quad \frac{d\Phi_k}{dz} = -q_k, \quad z > 1 \\ \frac{dW_0}{dz} &= -1, \quad \frac{dW_{k+1}}{dz} = 0, \quad \frac{d\Phi_k}{dz} = q_k, \quad z < 1 \quad (k = 0, 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Составляющие решения W_k и Φ_k удобно представить в виде функций, зависящих от переменной t . Например, при $z < 1$ имеем $W_0 = 1 - z = \varepsilon t$. Тогда в выражении (1.5) w_i и φ_i можно считать функциями переменной t , которые непрерывны вместе со своими производными и в соответствии с соотношениями (1.6) должны удовлетворять следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} w_k' &= 0, \quad \varphi_k' = q_k, \quad t \rightarrow -\infty; \quad w_0' = 1, \quad w_{k+1}' = 0, \quad \varphi_k' = -q_k, \\ t &\rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (1.7)$$

После асимптотического анализа уравнений (1.3) с учетом разложений (1.5) получаем уравнения:

в основном приближении

$$w_0''' - \varphi_0' (1 - 2w_0') + q_0 = 0 \quad (1.8)$$

$$\varphi_0''' + w_0' (1 - w_0') = 0 \quad (1.9)$$

во втором приближении

$$w_1''' - (tw_0')''' + 2w_1'\varphi_0' - \varphi_1' (1 - 2w_0') + q_1 = 0 \quad (1.10)$$

$$\varphi_1''' - 2\varphi_0'' - t\varphi_0'' + w_1' (1 - 2w_0') = 0 \quad (1.11)$$

в третьем приближении

$$w_2''' - (tw_1')''' + 2w_1'\varphi_1' - \varphi_2' (1 - 2w_0') + 2\varphi_0'w_2' + q_2 = 0 \quad (1.12)$$

$$\varphi_2''' - 2\varphi_1'' - t\varphi_1''' + w_2' (1 - 2w_0') - w_1'^2 = 0 \quad (1.13)$$

Совместно с граничными условиями (1.7) приведенные уравнения, очевидно, могут служить для определения функций w_i и φ_i при любых заданных значениях q_i . Во втором и последующих приближениях уравнения линейны. Однако сами коэффициенты разложения нагрузки в ряд по параметру ε остаются неопределенными. Причина этой неопределенности становится ясной, если обратиться к соответствующей вариационной формулировке задачи.

Рассмотрим функционал полной потенциальной энергии оболочки, который после асимптотического анализа в соответствии с разложением (1.5) приобретает вид

$$U = D_1 [J_0\varepsilon + J_1\varepsilon^2 + J_2\varepsilon^3 - q^0 (1 + 2\varepsilon^2 \int v_0 dt + 2\varepsilon^3 \int w_1 dt) + O(\varepsilon^4)] \quad (1.14)$$

$$J_0 = \int (\varphi_0''^2 + w_0''^2) dt, \quad J_1 = 2 \int [\varphi_0'' (\varphi_1'' - t\varphi_0'') + w_0'' (w_1'' - tw_0'')] dt$$

$$J_2 = \int (\varphi_1''^2 + 2\varphi_0''\varphi_2'' - 4t\varphi_0''\varphi_1'' + t^2\varphi_0''^2 + w_1''^2 + 2w_0''w_2'' - 4tw_0''w_1'' + t^2w_0''^2) dt, \quad D_1 = \frac{16\pi D}{\sqrt{3(1-\nu^2)} R\varepsilon^4} \quad (1.15)$$

Здесь и всюду далее интегрирование ведется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Учитывая представление q^c в виде ряда (1.5), получаем

$$U = D_1 [-q_0 + \varepsilon (I_0 - q_1) + \varepsilon^2 (I_1 - q_2) + \varepsilon^3 (I_2 - q_3) + O(\varepsilon^4)] \quad (1.16)$$

$$I_0 = J_0, \quad I_1 = J_1 - 2q_0 \int v_0 dt, \quad I_2 = J_2 - 2q_1 \int v_0 dt - 2q_0 \int w_1 dt$$

Можно убедиться, что вариация функционала полной потенциальной энергии (1.14) по функциям w_i и φ_i с учетом связей (1.9), (1.11) и (1.13) и граничных условий (1.7) в каждом приближении в качестве уравнений Эйлера дает соответствующие уравнения равновесия (1.8), (1.10) и (1.12). Так, например, рассматривая задачу о минимуме функционала I_2 при наличии связей (1.9), (1.11) и (1.13), при его вариации по функциям w_2 и φ_2 получаем уравнение (1.8), при вариации по функциям w_1 и φ_1 приходим к соотношению (1.10), а варьируя функционал I_2 по функциям w_0 и φ_0 , получаем выражение (1.12). Однако при этом остается без внимания параметр ε , который также должен рассматриваться как варьируемый, поскольку связан с амплитудой прогиба критической конфигурации.

Варьируя (1.14) по ε , получаем соотношения

$$q_0 = 0, \quad q_1 = \frac{3}{4} J_0, \quad q_2 = \frac{1}{2} J_1, \quad q_3 = \frac{1}{4} J_2 - q_1 \int v_0 dt$$

где под J_i следует понимать минимальное значение этих функционалов. Соотношения (1.7)—(1.13) обладают симметрией, которая позволяет заключить, что функции φ_0' , φ_2' , w_1' четные, а φ_1' , w_0' , w_2' — нечетные. Отсюда следует, что $J_1 = 0$, поскольку соответствующая подынтегральная функция нечетная. Тогда $q_2 = 0$. Можно установить, что $q_4 = 0$.

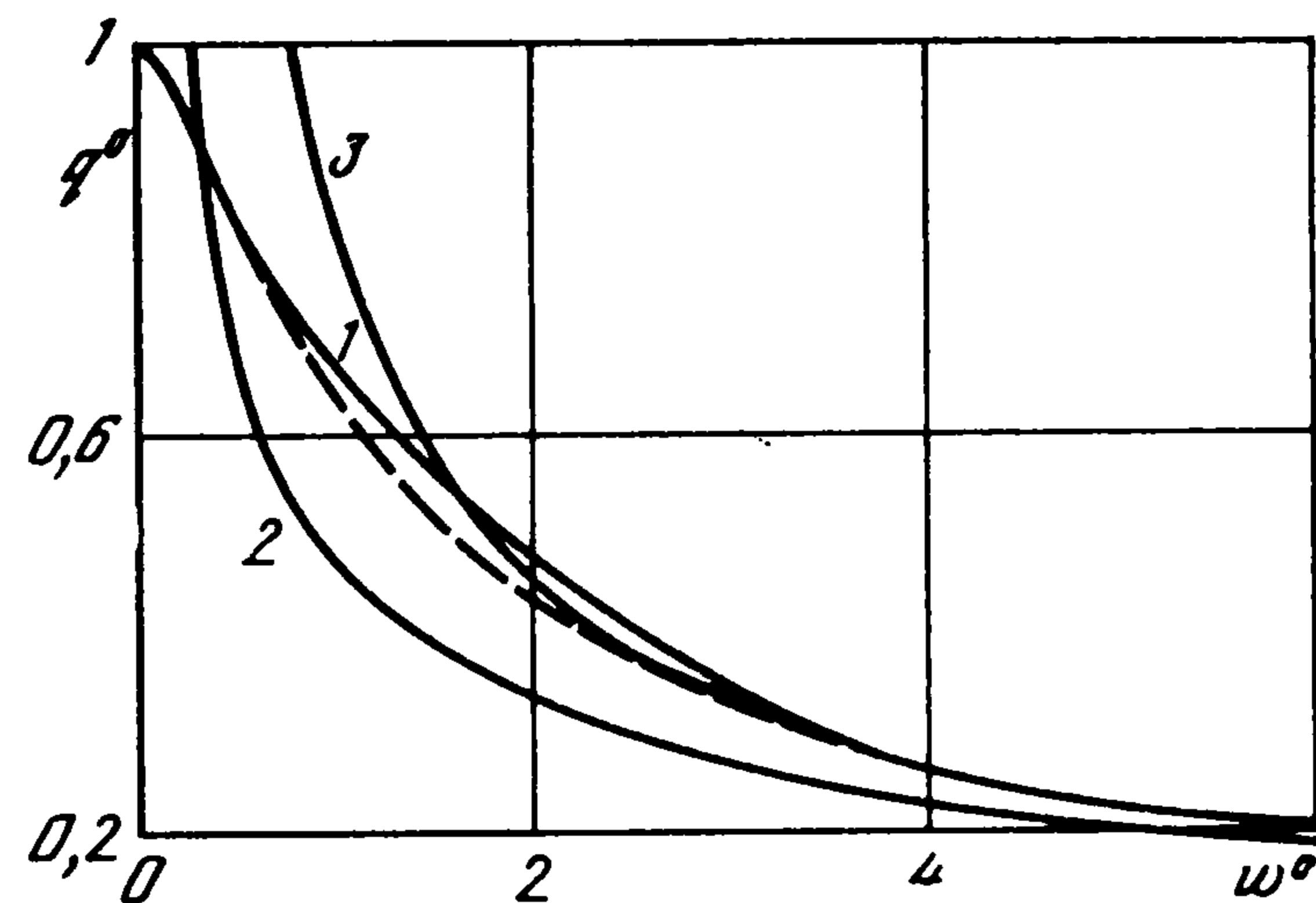
В выражении (1.15) слагаемые, содержащие w_2'' и φ_2'' , могут быть проинтегрированы. Тогда с учетом (1.7) получаем

$$J_2 = \int [\varphi_1''^2 + t^2 \varphi_0''^2 - 4t w_0'' w_1'' + t^2 w_0''^2 + 2\varphi_0' (t\varphi_1''' - w_1'^2)] dt \quad (1.17)$$

Отсюда следует, что для определения q_1 необходимо проинтегрировать уравнения (1.8) и (1.9) основного приближения. Коэффициент q_3 будет

определяться также функциями w_1 и φ_1 второго приближения.

Функционал J_0 при соответствующей замене переменных сводится к функционалу А. В. Погорелова, минимум которого $J_* = 2J_0 \simeq 1,12$. Решая задачу о минимуме функционала J_2 с использованием метода Ритца, приближенно получаем $J_2 = -0,4$. Окончательно приходим к соотношению



нию (при $\nu = 0,3$)

$$q^0 = 0,42\varepsilon + 0,26\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5) \quad (1.18)$$

Первое слагаемое с точностью до множителя $(1 - \nu^2)^{1/4}$ дает известный результат [1]. Таким образом, устанавливается, что соотношения геометрической теории являются асимптотически точными при $\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом первых двух приближений.

Полученный результат представлен в виде графиков на фигуре. Кривая 1 соответствует точному решению, полученному численно [2]. Кривая 2 получена с учетом основного приближения, которое соответствует геометрической теории. Формула (1.18) представлена на графике кривой 3. Из сопоставления кривых 1 и 3 следует, что имеет место хорошее соответствие приведенных данных при $h/W^0 \lesssim 1$. При $W^0 \rightarrow 0$ рассматриваемый асимптотический подход дает качественно неверный результат. Однако в этой области применим достаточно хорошо разработанный подход Койтера, в соответствии с которым с использованием метода возмущений при малых прогибах получаем асимптотическую формулу

$$q^0 = 1 + aw^0 + O(w^2) \quad (1.19)$$

причем для осесимметричной деформации полой сферы при внешнем давлении $a = 0$. Поскольку при этом в качестве малого параметра рассматривается величина, обратная ε , то выражение (1.19) дает в разложении функции $q^0(\varepsilon)$ по степеням $1/\varepsilon$ первые члены ряда.

Осуществим сращивание асимптотических представлений (1.18) и (1.19) при помощи двухточечных аппроксимаций Паде [9]. Для этого $q^0(\varepsilon)$ разыскивается в виде дробнорациональной функции, коэффициенты

которой определяются из условия совпадения разложения этой функции при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow \infty$ с разложениями (1.18) и (1.19) соответственно. Окончательно получаем зависимость

$$\begin{aligned} q^\circ(\varepsilon) &= A(\varepsilon)/(1 + A(\varepsilon)) \\ A(\varepsilon) &= 0,42\varepsilon + 0,176\varepsilon^2 + 0,333\varepsilon^3 + 0,4\varepsilon^4 \end{aligned} \quad (1.20)$$

которой на фигуре соответствует штриховая линия. Сопоставление с данными работы [2] (кривая 1) свидетельствует о достаточной точности полученного решения.

2. Приведенные результаты могут быть обобщены на случай строго выпуклых пологих оболочек с радиусами главных кривизн R_1 и R_2 . Ограничимся более подробным рассмотрением основного приближения. Уравнение совместности деформаций имеет вид

$$E^{-1}\nabla^4\Phi = W_{\alpha\beta}^2 - W_{\alpha\alpha}W_{\beta\beta} - W_{\alpha\alpha}/R_1 - W_{\beta\beta}/R_2 \quad (2.1)$$

Функция

$$W = W^0(1 - \alpha^2/(W^0R_1) - \beta^2/(W^0R_2)) \quad (2.2)$$

обращает в нуль правую часть этого уравнения и описывает изометрическое преобразование зеркального отражения исходной срединной поверхности относительно некоторой плоскости. Получаем кусочно-гладкую поверхность с нарушением регулярности вдоль линий, лежащих в рассматриваемой плоскости. Примем эти линии, а также им ортогональные в качестве координатных, что соответствует следующей замене переменных

$$t_1 = \frac{\alpha^2}{W^0R_1} + \frac{\beta^2}{W^0R_2}, \quad t_2 = \frac{\alpha^2}{W^0R_1} - \frac{\beta^2}{W^0R_2} \quad (2.3)$$

Переходя к безразмерным величинам w и φ , устанавливаем наличие в исходных соотношениях малого параметра

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2(R_1 + R_2)^2}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}R_1R_2w^0}, \quad c = 1 + \frac{t_2}{t_1} \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}, \quad R_2 \geq R_1 \quad (2.4)$$

который совпадает с полученным для сферической оболочки при $R_1 = R_2 = R$. После асимптотического анализа функционала полной потенциальной энергии оболочки получаем выражение

$$U = D_1(J_0\varepsilon - q^\circ) \quad (2.5)$$

$$D_1 = \frac{\pi(R_1 + R_2)^4 hD}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}(R_1R_2)^{5/2}\varepsilon^4}, \quad q^\circ = \frac{q}{q_*}, \quad q_* = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}R_1R_2}$$

Функционал J_0 в точности совпадает с приведенным для сферической оболочки. Однако при этом естественным образом устанавливается необходимость требования $c \simeq 1$ при $t_1 = 1$ и $|t_2| \leq 1$, что накладывает дополнительное ограничение на полученные соотношения в виде

$$\varepsilon_1 = (R_2 - R_1)/(R_2 + R_1) \ll 1 \quad (2.6)$$

Численный анализ показывает, что практически достаточно ограничиться требованием $2R_2 \leq R_1$. При этих условиях получаем формулу

$$q^\circ = 0,42\varepsilon + O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon_1)$$

которая соответствует результату, полученному в работе [1]. При построении решения в более высоких приближениях приходим к соотношению (1.18). Используя описанную процедуру сращивания решений при больших и малых относительных прогибах, получаем в этом случае формулу (1.20), в которой

$$\varepsilon^2 = \frac{(R_1 + R_2)^2}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}R_1R_2w^0}$$

Приведенные простые соотношения свидетельствуют об эффективности предлагаемого подхода.

Автор благодарит И. В. Андрианова за предложение использовать для сращивания предельных разложений аппарат двухточечных аппроксимаций Паде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Погорелов А. В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М.: Наука, 1967. 280 с.
2. *Габрильянц А. Г., Феодосьев В. И.* Об осесимметричных формах равновесия упругой сферической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного давления // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1091—1101.
3. *Срубщик Л. С., Юдович В. И.* Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично нагруженных оболочек вращения // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 913—922.
4. *Ворович И. И., Срубщик Л. С.* Асимптотический анализ общих уравнений нелинейной теории пологих оболочек // Тр. 7-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969; М.: Наука, 1970. С. 156—162.
5. *Бабенко В. И.* К теории закритических деформаций сферических оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. 1966. № 2. С. 166—168.
6. *Бабенко В. И., Иванова Й. А.* Закритические деформации анизотропных оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. 1971. № 9. С. 798—800.
7. *Лесничая В. А.* Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений теории тонких оболочек в закритической стадии // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 147—152.
8. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро изменяющимися коэффициентами и граничными условиями // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. Вып. 4. С. 27—96.
9. *Бейкер Дж., Грейес-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
13.VII.1987