Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ

Коваленко Е. В.

Развиваются два алгоритма исследования интегрального уравнения (ИУ), встречающегося при изучении смешанных задач механики сплошных сред с круговой линией раздела граничных условий. Первый из них представляет собой обобщение метода ортогональных функций и опирается на приближенное построение последовательности собственных чисел и соответствующей ей системы собственных функций интегрального оператора исходной задачи. Показано, что такой подход эффективен при любых значениях некоторого безразмерного параметра $\lambda \in (0, \infty)$ геометрического или физического происхождения, входящего в ядро ИУ. Второй метод применим при малых значениях λ и базируется на идее приближенной факторизации Койтера. Преимуществом его является более точная по сравнению с ранее использовавшимися аппроксимация символа ядра ИУ.

В качестве примера приводится решение осесимметричной задачи о вдавливании штампа в упругое полупространство, армированное по границе тонким усиливающим покрытием.

1. Известно [1, 2], что широкий класс пространственных смешанных задач механики сплошных сред и математической физики с круговой линией раздела граничных условий сводится к исследованию ИУ вида

$$\int_0^1 \varphi(\rho)\rho k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right)d\rho = \lambda f(r) \quad (0 \leqslant r \leqslant 1) \tag{1.1}$$

$$k(\beta, \alpha) = \int_0^\infty K(u)uJ_0(u\beta)J_0(u\alpha)\,du \quad \left(\beta = \frac{\rho}{\lambda},\ \alpha = \frac{r}{\lambda}\right) \tag{1.2}$$

Символ ядра $K(\zeta)$ обладает следующими свойствами [3]: 1) четная функция $K(u) > 0$ $(|u| < \infty)$; 2) в плоскости комплексного переменного $\zeta = u + iv$ функция $K(\zeta)$ регулярна в полосе $|u| < \infty$, $|v < \delta$ и непрерывна на вещественной оси, кроме точки $\zeta = 0$; 3) функция $K(\zeta)$ на действительной оси имеет асимптотику

$$K(u) \sim |u|^{-1} \ (|u| \to \infty), \quad K(u) \sim B|u|^{-1} \ (u \to 0) \tag{1.3}$$

Тогда из (1.2) с учетом (1.3) и значения интеграла [4]

$$\int_0^\infty J_0(u\beta)J_0(u\alpha)\,du = \frac{2}{\pi(\beta+\alpha)}\mathbf{K}(e), \quad e = \frac{2\sqrt{\beta\alpha}}{\beta+\alpha} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{K}(e)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, найдем

$$k(\beta, \alpha) \sim \frac{2}{\pi(\beta+\alpha)}\mathbf{K}(e) \quad (|\beta-\alpha| \to 0) \tag{1.5}$$

$$k(\beta, \alpha) \sim \frac{2B}{\pi(\beta+\alpha)}\mathbf{K}(e) \quad (|\beta-\alpha| \to \infty)$$

Следует иметь в виду, что ИУ (1.1), (1.2) «методом преобразующих операторов» [5] приводится к эквивалентному ему уравнению второго рода

$$\pi\lambda\psi(x)+\int_{-1}^{1}\psi(\xi)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi\lambda g(x)\quad(|x|\leqslant 1)\tag{1.6}$$

$$k(t)=\int_{0}^{\infty}[L(u)-1]\cos ut\,du,\quad K(u)\,|u|=L(u)\tag{1.7}$$

Здесь

$$\varphi(r)=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\psi(1)}{\sqrt{1-r^2}}-\int_{r}^{1}\frac{\psi'(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}}\right\}\tag{1.8}$$

$$g(x)=f(0)+|x|\int_{0}^{|x|}\frac{f'(\rho)\,d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\tag{1.9}$$

Помимо предположенного ранее относительно свойств символа $K(\zeta)$ ядра (1.2) или (1.7) допустим, что для него имеют место формулы

$$L(u)=1+\sum_{n=1}^{N}c_n u^{-n}+O(u^{-N-1})\quad(u\to\infty)\tag{1.10}$$

$$\left|L(u)-1-\frac{c_1}{u}-\frac{c_2}{u^2}\right|\leqslant\frac{a}{u^2(u+b)}\quad(0\leqslant u\leqslant\infty;\ a,b>0)\tag{1.11}$$

Тогда справедливо представление [3]

$$k(t)=R_0-c_1\ln|t|-{}^1\!/_2\pi c_2|t|+l(t)\quad(R_0=\mathrm{const})$$

причем функция $l(t)$ такова, что ее первая производная при $|t|\leqslant R<\infty$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1-\varepsilon>0$ $(\varepsilon>0)$, т. е. $l(t)\in H_1^{1-\varepsilon}(-R, R)$. Отсюда следует, что ИУ (1.6) фредгольмово.

Покажем, что если $f'(r)\in L_p(\Omega)$ $(p>2)$ ($L_p(\Omega)$ — пространство функций, суммируемых в круге Ω: $0\leqslant r\leqslant 1$ со степенью p), то $g(x)\in H_0^1(-1, 1)$. Для этого, очевидно, необходимо доказать ограниченность интеграла (1.9). Воспользуемся неравенством Гельдера [6]

$$\left|\int_0^{|x|}\frac{f'(\rho)\,d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\right|\leqslant\left(\int_0^{|x|}\rho\,|f'(\rho)|^p\,d\rho\right)^{1/p}\left[\int_0^{|x|}\left(\frac{\rho^{-1/p}}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\right)^q d\rho\right]^{1/q}$$

$$(1/p+1/q=1)$$

из которого вытекает, что $p>2$ и, таким образом, $g(x)\in H_0^1(-1, 1)$.

Можно доказать, что если в ИУ (1.6), (1.7) правая часть $g(x)\in H_0^1(-1, 1)$, то решение его обладает следующими свойствами:

$$\psi(x)\in H_0^1(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon),\quad \psi(x)\in H_0^{1-0}(-1,\ -1+\varepsilon)$$
$$\psi(x)\in H_0^{1-0}(1-\varepsilon,\ 1)\tag{1.12}$$

(ε — сколь угодно малое положительное число).

Действительно, рассмотрим интеграл

$$F(x)=-\int_{-1}^{1}\psi(\xi)\left[c_1\ln\left|\frac{\xi-x}{\lambda}\right|+\frac{\pi c_2}{2}\left|\frac{\xi-x}{\lambda}\right|\right]d\xi\tag{1.13}$$

представляющий собой главную (особую) часть ядра (1.11) уравнения (1.6). Поскольку $g(x)\in H_0^1(-1, 1)$, то последнее, в силу того что является уравнением Фредгольма второго рода, разрешимо по крайней мере в пространстве непрерывных функций $C(-1, 1)$ почти при всех значениях параметра $\lambda\in(0, \infty)$ (можно доказать, что ИУ (1.6), (1.7) разрешимо при всех $\lambda\in(0, \infty)$).

Продифференцировав обе части равенства (1.13) по x с учетом $\psi(x)\in C(-1, 1)$, заключаем [7], что функция $F(x)$ удовлетворяет условиям (1.12). Поскольку правая часть ИУ (1.6) — функция класса $H_0^1(-1, 1)$, то, сопоставляя свойства $g(x)$ и $F(x)$, приходим к выводу, что предположение (1.12) оправданно.

Исследуем теперь структуру решения исходного ИУ (1.1), (1.2). Покажем, что если $f'(r) \in L_p(\Omega)$, то функция $\varphi(r)$ вида (1.8) представима в форме

$$\varphi(r) = \omega(r)/\sqrt{1-r^2}, \quad \omega(r) \in C(\Omega) \tag{1.14}$$

Для этого изучим свойства интеграла в (1.8)

$$I(r) = \sqrt{1-r^2}\int_r^1 \frac{\psi'(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}} = \psi(1) - \psi(r) +$$

$$+\sqrt{1-r^2}\int_r^1 \frac{\Psi(\rho, r)}{\sqrt{\rho - r}}\,d\rho, \quad \Psi(\rho, r) = \frac{\rho[\psi(\rho)-\psi(r)]}{(\rho^2-r^2)\sqrt{\rho+r}} \tag{1.15}$$

Заметим, что в силу свойств $\psi(r)$, установленных выше, функция $\Psi(\rho, r)$ в (1.15) имеет следующую асимптотику при $\rho \to r$:

$$\Psi(\rho, r) = \Psi(r, r) + o(\rho - r), \quad \Psi(r, r) \in C(\Omega^*) \tag{1.16}$$

$$\Psi(\rho, r) \sim (\rho - r)^{-\varepsilon} \quad (\rho, r \in \Omega \setminus \Omega^*)$$

где Ω^* — круг радиуса $1-\varepsilon$. Внося (1.16) в последний интеграл (1.15), получим $I(r) \sim \Psi(r, r)$ $(r \in \Omega^*)$, $I(r) \sim (1-r)^{1-\varepsilon}$ $(r \in \Omega \setminus \Omega^*)$, откуда вытекает, что $I(r) \in C(\Omega)$, а следовательно, и $\omega(r) \in C(\Omega)$. Таким образом, доказана

Теорема. Если $f'(r) \in L_p(\Omega)$ $(p > 2)$, то интегральное уравнение (1.1) с ядром (1.2) и символом $K(u)$, удовлетворяющим условиям 1) — 3), разрешимо единственным образом в $L_q(\Omega)$ $(1 < q < 2)$ и решение его $\varphi(r)$ имеет структуру (1.14). При этом выполняются соотношения корректности

$$\|\varphi\|_{L_q} \leqslant \theta_1(\lambda)\|f'\|_{L_p}, \quad \|\omega\|_C \leqslant \theta_2(\lambda)\|f'\|_{L_p}$$

где $\theta_1(\lambda)$ и $\theta_2(\lambda)$ — ограниченные при любом фиксированном λ постоянные.

2. Прежде чем приступить к построению решения исходного ИУ (1.1), (1.2), изучим более детально свойства его ядра. Пусть символ его удовлетворяет условиям (1.3), а на бесконечности имеет место асимптотика (1.10). В этом случае с учетом интегралов (1.4) и [4]

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\beta u)J_0(\alpha u) - e^{-u/2}}{u}\,du = -\ln\frac{\beta+\alpha+|\beta-\alpha|}{2}$$

представим $k(\beta, \alpha)$ вида (1.2) в форме

$$k(\beta, \alpha) = \frac{2}{\pi(\beta+\alpha)}\mathrm{K}(e) - c_1\ln\frac{\beta+\alpha+|\beta-\alpha|}{2} + m(\beta, \alpha) \tag{2.1}$$

$$m(\beta, \alpha) = \int_0^\infty\left\{\left[L(u) - 1 - \frac{c_1}{u}\right]J_0(\beta u)J_0(\alpha u) + \frac{c_1}{u}e^{-u/2}\right\}du$$

причем, как можно показать, $m(\beta, \alpha)$ является по крайней мере непрерывно дифференцируемой функцией по совокупности своих переменных в квадрате $0 \leqslant \alpha,\ \beta < \infty$.

Введем теперь в рассмотрение, в согласии с теоремой, гильбертово пространство $L_2^{1/2}(\Omega)$ функций, суммируемых с квадратом в круге Ω: $0 \leqslant r \leqslant 1$ с весом $(1-r^2)^{-1/2}$ и будем искать решение $\varphi(r)$ уравнения

(1.1), (1.2) в форме (1.14), где

$$\omega(r) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \omega_n(r) \tag{2.2}$$

В соотношении (2.2) $\omega_n(r)$ — собственные функции оператора

$$\mathbf{A}\omega = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \frac{\omega(\rho)\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) d\rho \tag{2.3}$$

т. е. нетривиальные решения однородного уравнения

$$\mathbf{A}\omega_n = \mu_n \omega_n \quad (0 \leqslant r \leqslant 1) \tag{2.4}$$

Отметим, что в соответствии с представлением (2.1) и симметрией ядра (1.2) в круге Ω система собственных функций $\{\omega_n(r)\}$ ортонормирована и полна в $L_2^{1/2}(\Omega)$, а ряд (2.2) сходится по норме пространства $L_2^{1/2}(\Omega)$, причем $\{d_n\} \in l_2$.

Разложим функцию $f(r)$ в равномерно сходящийся в круге Ω ряд Фурье по системе $\{\omega_n(r)\}$

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \omega_n(r), \quad f_n = \int_0^1 \frac{rf(r)\,\omega_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr \tag{2.5}$$

Внося (2.2), (2.5) в (1.1), используя (2.4) и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при собственных функциях оператора (2.3) одинакового номера, будем иметь

$$d_n = f_n \mu_n^{-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.6}$$

и, следовательно, окончательно запишем решение исходного уравнения (1.1), (1.2) в виде (1.14), (2.2), (2.6) в предположении задания вещественных собственных чисел $\{\mu_n\}$ и соответствующих им собственных функций $\{\omega_n(r)\}$ оператора $\mathbf{A}\omega$.

Корректность соотношения (2.6) следует из положительной определенности оператора (2.3).

Рассмотрим скалярное произведение

$$(\mathbf{A}\omega, \omega)_{L_2^{1/2}} = \int_0^{\infty} L(u) H^2\left(\frac{u}{\lambda}\right) du \tag{2.7}$$

$$H\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \frac{r\omega(r)}{\sqrt{1-r^2}} J_0\left(\frac{ur}{\lambda}\right) dr$$

В силу асимптотических свойств $L(u) = K(u)\,|u|$ (1.3) и равенства Парсеваля для преобразования Ганкеля интеграл в правой части первого соотношения (2.7) сходится.

Поскольку $L(u) > 0$ на действительной полуоси $0 \leqslant u < \infty$, то

$$(\mathbf{A}\omega, \omega)_{L_2^{1/2}} = \gamma(\omega, \omega)_{L_2^{1/2}} > 0 \quad (\gamma = \mathrm{const})$$

откуда и следует положительная определенность оператора (2.3). Тогда [6] $0 < \gamma < \ldots \ldots < \mu_n < \ldots < \mu_2 < \mu_1$, а равенство (2.6) законно.

Перейдем к определению собственных функций оператора $\mathbf{A}\omega$ или, что то же самое, к решению однородного интегрального уравнения (2.4). Воспользуемся, например, методом Ритца [8, 9]. В качестве последовательности координатных элементов возьмем систему полиномов Лежандра

$\{P_{2n}^* (\sqrt{1-r^2})\}$

$$\omega_n^N(r) = \sum_{m=0}^{N} b_m^{(n)} P_{2m}^*(\sqrt{1-r^2}), \quad P_{2m}^*(\sqrt{1-r^2}) = \\ = \sqrt{4m+1}\, P_{2m}(\sqrt{1-r^2}) \qquad (2.8)$$

Известно [6], что они составляют базис в $L_2^{1/2}(\Omega)$. Подставим (2.8) в (2.4), а затем скалярно умножим обе части полученного выражения на $P_{2k}^* (\sqrt{1-r^2})$. Принимая в расчет условие ортонормированности многочленов $P_{2m}^* (\sqrt{1-r^2})$, будем иметь

$$\sum_{m=0}^{N} c_{km} b_m^{(n)} = \mu_n b_k^{(n)} \quad (k = 0, 1, \ldots, N;\ n \geqslant 1) \qquad (2.9)$$

$$c_{km} = (\mathbf{A} P_{2k}^*, P_{2m}^*)_{L_2^{1/2}} \qquad (2.10)$$

Используя значение интеграла [4] $(u \geqslant 0)$

$$\int_0^1 J_0(ur) P_{2n}(\sqrt{1-r^2}) \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\, \alpha_n J_{2n+1/2}(u)$$

$$\alpha_n = (2n-1)!!/(2n)!!$$

запишем коэффициенты c_{km} в форме

$$c_{km} = {}^1/_2\pi \sqrt{(4k+1)(4m+1)}\, \alpha_k \alpha_m \int_0^\infty K(u)\, J_{2k+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{2m+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right) du \qquad (2.11)$$

Чтобы существовало нетривиальное решение системы (2.9), (2.10), приравняем к нулю ее определитель. Придем к уравнению для нахождения первых N характеристических чисел μ_n оператора (2.3). Определив μ_n, найдем затем $b_m^{(n)}$, выразив их через $b_0^{(n)}$:

$$b_m^{(n)} = b_0^{(n)} h_m^{(n)} \quad (h_0^{(n)} = 1) \qquad (2.12)$$

Учитывая (2.8), получим

$$\omega_n^N(r) = b_0^{(n)} \psi_n^N(r), \quad \psi_n^N(r) = \sum_{m=0}^{N} h_m^{(n)} P_{2m}^* (\sqrt{1-r^2}) \qquad (2.13)$$

Постоянные $b_0^{(n)}$ $(n \geqslant 1)$ в (2.12), (2.13) подберем из условия нормировки собственных функций $\omega_n^N(r)$, т. е.

$$\int_0^1 \frac{r[\omega_n^N(r)]^2}{\sqrt{1-r^2}} dr = [b_0^{(n)}]^2 \sum_{m=0}^{N} [h_m^{(n)}]^2 = 1 \qquad (2.14)$$

После нахождения $b_0^{(n)}$ из (2.14) будут найдены приближения искомых собственных функций оператора $\mathbf{A}\omega$. Заметим при этом, что в силу свойств оператора (2.3), указанных выше, процесс Ритца для ИУ (2.4) будет сходящимся [8], т. е. $\omega_n^N(r) \to \omega_n(r)$ $(N \to \infty)$. Кроме того, в силу формул (1.5) и спектрального соотношения [10]

$$\int_0^1 \frac{\rho P_{2m}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}} \mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right) \frac{d\rho}{\rho+r} = \frac{\pi^2}{4} \alpha_m^2 P_{2m}(\sqrt{1-r^2})$$

для коэффициентов c_{km} вида (2.11) имеет место асимптотика

$$c_{km} \sim {}^1/_2\pi\alpha_k^2\delta_{km} \quad (\lambda \to \infty), \qquad c_{km} \sim {}^1/_2\pi B\alpha_k^2\delta_{km} \quad (\lambda \to 0)$$

(δ_{km} — символ Кронекера), которая говорит о том, что при $\lambda \to \infty$ либо при $\lambda \to 0$ матрица системы (2.9) имеет диагональный вид.

3. Изложим алгоритм исследования ИУ (1.1), (1.2), эффективный при малых значениях параметра λ. Принимая в расчет формулу М. Г. Крейна [11], рассмотрим ИУ (1.6), (1.7)

$$\int_{-1}^{1} \psi(\xi)\, k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi\lambda g \quad (|x| \leqslant 1,\ g = f(0) = \mathrm{const}) \tag{3.1}$$

$$k(t) = \int_0^\infty L(u) \cos ut\, du \tag{3.2}$$

Имея далее целью использовать для решения ИУ (3.1) при $\lambda \ll 1$ метод приближенной факторизации Койтера [12], аппроксимируем в согласии с формулами (1.3), (1.10) символ ядра (3.2) $K(\zeta) \mid \zeta \mid = L(\zeta)$ следующим образом:

$$L(\zeta) \approx L_*(\zeta) = \frac{\zeta^2 + h_3^2}{\zeta^2 + h_4^2} \exp\left(\frac{h_1 \sqrt{\zeta^2 + \varepsilon^2}}{\zeta^2 + h_2^2}\right) \quad (\varepsilon \to 0,\ B = h_3^2 h_4^{-2}) \tag{3.3}$$

Будем искать главный член асимптотики решения ИУ (3.1) с ядром (3.2), (3.3) в форме [3]

$$\psi(x) = g\left[\omega\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \omega\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) - \frac{1}{B}\right] \tag{3.4}$$

где функция $\omega(s)$ удовлетворяет ИУ Винера — Хопфа, решение которого имеет вид [3]

$$\omega(s) = \frac{1}{2\pi i L_-(0)} \int_\Gamma \frac{e^{-i\zeta s}}{\zeta L_+(\zeta)}\, d\zeta \quad (0 \leqslant s < \infty) \tag{3.5}$$

Здесь контур Γ — прямая, лежащая чуть выше действительной оси в плоскости комплексного переменного $\zeta = u + iv$, а $L_*(\zeta) = L_+(\zeta) L_-(\zeta)$, причем функции $L_+(\zeta)$ и $L_-(\zeta)$ регулярны соответственно в полуплоскостях $\mathrm{Im}\,\zeta > -\varepsilon$, $\mathrm{Im}\,\zeta < \varepsilon$, не имеют там нулей и могут быть записаны в форме [13]

$$L_\pm(\zeta) = \frac{\zeta + ih_3}{\zeta \pm ih_4} \exp[h_1 \mu_\pm(\zeta)] \tag{3.6}$$

$$\mu_\pm(\zeta) = \frac{-i\zeta\,[i\zeta \nu_\pm(\zeta) \pm h_2 \nu_\pm(\pm ih_2)]}{\zeta^2 + h_2^2}$$

$$\nu_\pm(\zeta) = \pm \frac{i}{\pi\sqrt{\zeta^2 + \varepsilon^2}} \ln \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \varepsilon^2}}{\pm i\varepsilon}$$

Из равенств (3.6) следует, что

$$L_-(0) = L_+(0) = \sqrt{B} \tag{3.7}$$

Внесем (3.7) в формулу (3.5) и перейдем в последней для удобства от интегрального преобразования Фурье к преобразованию Лапласа — Карсона, положив $\zeta = ip$. С учетом соотношений (3.6) получим

$$\omega(s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{B}\, i} \int_L \frac{\Omega(p)}{p} e^{ps}\, dp \tag{3.8}$$

где L — прямая, лежащая чуть правее мнимой оси в плоскости комплексного переменного p, и введены обозначения

$$\Omega(p) = \frac{p + h_4}{p + h_3} \exp[-h_1 \mu(p)], \quad \mu(p) = \frac{p\,[p\nu(p) - h_2\nu(h_2)]}{p^2 - h_2^2} \tag{3.9}$$

$$\nu(p) = \frac{1}{\pi\sqrt{p^2 - \varepsilon^2}} \ln \frac{p + \sqrt{p^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}, \quad \nu(h_2) = \nu_+(ih_2)$$

Преобразуя далее выражение для $\mu(p)$ при помощи третьей формулы (3.9), найдем

$$\mu(p)\ [\pi(p^2 - h_2^2)]^{-1} p \ln(p h_2^{-1}) \tag{3.10}$$

Заметим еще, что функцию $\exp[-h_1\mu(p)]$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ с высокой степенью точности можно приблизить выражением [14]

$$\exp[-h_1\mu(p)] \approx 1 - h_1\mu(p) \tag{3.11}$$

Погрешность аппроксимации (3.11) на положительной части вещественной оси, например [13], не превосходит 1% при указанных в разд. 4 значениях h_1 и h_2.

Подставляя (3.9)—(3.11) в (3.8) и используя таблицы [15], получим ($\mathrm{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция)

$$\omega(s) = \frac{1}{B} + \frac{1}{\sqrt{B}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{B}}\right) e^{-h_2 s} + J(s) \tag{3.12}$$

$$J(s) = \frac{h_1}{\pi\sqrt{B}(h_3 - h_2)} \int_0^s e^{h_2\tau}\, \mathrm{Ei}(-h_2\tau)\,[(h_3 - h_4)\, e^{-h_3(s-\tau)} +$$
$$+ (h_4 - h_2)\, e^{-h_2(s-\tau)}]\, d\tau$$

Таким образом, решение ИУ (1.1), (1.2) при $\lambda \ll 1$ может быть записано в форме (1.8), (3.4), (3.12).

4. В качестве примера рассмотрим осесимметричную контактную задачу о вдавливании без трения кругового ($0 \leqslant r \leqslant a$) в плане штампа с плоским основанием в упругое (G_2, ν_2) полупространство, поверхность которого усилена покрытием типа накладки [16, 17]

$$2G_1 h \Delta u_{\pm} = -(1 - \nu_1)(\tau_+ - \tau_-) - 0{,}5\nu_1 h\,(\sigma_+' + \sigma_-') \tag{4.1}$$

$$\sigma_+ - \sigma_- = -\frac{h}{2r}[r(\tau_+ + \tau_-)]', \quad \Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}$$

Здесь G_1, ν_1 — упругие постоянные материала накладки, h — ее толщина, $\sigma_{\pm}(r)$ и $\tau_{\pm}(r)$ — нормальные и касательные напряжения, действующие на верхней и нижней гранях накладки.

Требуется определить закон распределения контактных давлений $q(r)$, а также найти связь между осадкой основания δ и вдавливающей штамп силой

$$P = 2\pi \int_0^a r q(r)\, dr \tag{4.2}$$

При помощи интегрального преобразования Ганкеля по r поставленная задача может быть приведена к нахождению $q(r)$ из интегрального уравнения первого рода. Последнее с учетом безразмерных переменных $\rho^* = \rho a^{-1}$, $r^* = r a^{-1}$ обозначений $\varphi(r^*) = q(r)\theta_2^{-1}$, $N_0 = P(a\theta_2)^{-1}$, $f(r^*) = f(1 - \varepsilon_2^2)^{-1} = g$, $f = \delta a^{-1}$, $\varepsilon_2 = 0{,}5(1 - 2\nu_2)(1 - \nu_2)^{-1}$, $\theta_j = G_j(1 - \nu_j)^{-1}$, $\lambda = 2hna^{-1}$, $n = \theta_1\theta_2^{-1}$ (звездочку далее опустим) запишется в форме (1.1), где функция $k(\beta, \alpha)$ дается формулой (1.2), в которой $K(u)$ имеет вид

$$K(u) = \frac{u + (1 - \varepsilon_2^2)^{-1}}{u(u + 1)}, \quad B = \frac{1}{1 - \varepsilon_2^2} \tag{4.3}$$

Отметим важное обстоятельство. Путем асимптотического анализа контактной задачи о вдавливании штампа в двухслойное основание [18] установлено, что если относительная толщина покрытия ha^{-1} мала, а относительная его жесткость n велика, причем $n^{-1} = O(ha^{-1})$ $(ha^{-1} \to 0)$, то с точностью до членов порядка $O(ha^{-1})$ его физико-механические свойства будут описываться уравнениями накладки (4.1).

Чтобы получить числовые результаты исходной задачи при малых λ, т. е. использовать формулы разд. 3, подберем в (3.3) значения постоянных h_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Например, при $\nu_2 = 0{,}3$ в (4.3) положим $h_1 = -0{,}09796$, $h_2 = 1{,}0954$, $h_3 = 3{,}9044$, $h_4 = 3{,}7417$. В этом случае погрешность аппроксимации (3.3) символа ядра $K(u)$ вида (4.3) не превосходит 1% на всей действительной оси.

λ	$r=0$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,95	N_0f^{-1}
0,25	0,594 0,591	0,599 0,597	0,633 0,635	0,735 0,737	0,982 0,981	1,909 1,911	3,74 3,75
0,5	0,673 0,677	0,633 0,636	0,607 0,611	0,741 0,745	1,018 1,020	1,864 1,888	3,77 3,81
1	0,626 0,624	0,617 0,615	0,637 0,639	0,757 0,759	1,003 1,007	1,915 1,920	3,82 3,85
2	0,647 0,653	0,630 0,637	0,642 0,643	0,771 0,778	1,015 1,012	1,917 1,925	3,87 3,89
4	0,656	0,640	0,651	0,781	1,027	1,934	3,91

В таблице приведены значения контактных давлений $\varphi(r)f^{-1}$ и вдавливающей штамп силы N_0f^{-1} (4.2), вычисленные методами разд. 2 (первые строки) и разд. 3 (вторые строки). При этом в решении (2.2) брались первые семь собственных функций оператора $A\omega$, а погрешность приближенного решения не превосходит 1,5% при любых значениях параметра $\lambda \in (0, \infty)$. Видно, что с увеличением относительной жесткости покрытия или его относительной толщины наблюдается рост контактных давлений и вдавливающей штамп силы, причем последняя изменяется в пределах от $N_0f^{-1} = 3{,}67$ при $\lambda \to 0$ до $N_0f^{-1} = 4$ при $\lambda \to \infty$ [19]. Отсюда следует, что неучет влияния тонкого упрочняющего покрытия может привести к ошибке при определении контактной жесткости составного основания при $\nu_2 = 0{,}3$ в 9%.

Автор благодарит В. М. Александрова за внимание к работе и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Галина Л. А. М.: Наука, 1976. 493 с.
2. *Александров В. М.* О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 6. С. 1117—1131.
3. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401 с.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
8. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
9. *Коваленко Е. В.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики // Изв. АН АрмССР. Механика. 1981. Т. 34. № 5. С. 14—26.
10. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
11. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.
12. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 280 с.
13. *Александров В. М., Броновец М. А., Коваленко Е. В.* Плоские контактные задачи для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 5. С. 60—67.
14. *Александров В. М.* Контактная задача с учетом износа, вызванного локальным оплавлением // Физ.-хим. механика материалов. 1986. Т. 22. № 1. С. 116—124.
15. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 466 с.
16. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
17. *Авилкин В. И., Александров В. М., Коваленко Е. В.* Об использовании уточненных уравнений тонких покрытий в теории осесимметричных контактных задач для составных оснований // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1010—1018.
18. *Авилкин В. И., Коваленко Е. В.* Асимптотический анализ плоской контактной задачи теории упругости для двухслойного основания // ПМТФ. 1985. № 1. С. 133—138.
19. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.II.1988