

УДК 539.3

МАТРИЦА ГРИНА ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Долгова И. М., Мельников Ю. А.

Строится матрица Грина для однородной и ортотропной полуполосы, зажатой между двумя абсолютно жесткими полуплоскостями. Граничные условия на всех сторонах соответствуют контакту без трения. Для решения уравнений равновесия в перемещениях, составленных для случая воздействия массовых сил, используются методы преобразования Фурье. Окончательные результаты представлены сравнительно простыми формулами. Элементы матрицы Грина, которые по своему физическому смыслу представляют собой смещения точек полуполосы от воздействия сосредоточенной силы, выражаются через элементарные функции. Приводятся численные результаты для случая воздействия поперечной сосредоточенной силы.

Таким образом, демонстрируется возможность распространения алгоритма построения функций и матриц Грина для одной смешанной граничной задачи теории упругости в случае изотропной полосы [1] на некоторые плоские задачи теории упругости для ортотропных материалов.

1. Рассмотрим упругое равновесие полосы ($-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq b$) из однородного материала, главные направления ортотропии которого совпадают с координатными осями x и y ; E_1 , E_2 — модули Юнга первого рода, ν_1 , ν_2 — коэффициенты Пуассона; G — модуль сдвига.

Систему уравнений равновесия в смещениях выпишем в виде

$$\Lambda (\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial x\partial y, A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}) U(x, y) = F(x, y) \quad (1.1)$$

Здесь $U = U(x, y)$ — вектор смещений точек полосы, $F = F(x, y)$ — вектор массовых сил. Элементы матрицы $\Lambda = (\Lambda^{ij})_{2,2}$ записываются следующим образом (используются обозначения, принятые в [2]):

$$\begin{aligned} \Lambda^{11} &\equiv A_{11}\partial^2/\partial x^2 + A_{66}\partial^2/\partial y^2, & \Lambda^{22} &\equiv A_{66}\partial^2/\partial x^2 + A_{22}\partial^2/\partial y^2 \\ \Lambda^{12} &= \Lambda^{21} \equiv (A_{12} + A_{66})\partial^2/\partial x\partial y \\ A_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2}, & A_{12} &= \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1\nu_2}, & A_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2}, \\ A_{66} &= G \end{aligned}$$

Пусть анализируемое напряженно-деформируемое состояние симметрично относительно оси y . Тогда, очевидно, компоненты $u(x, y)$ и $v(x, y)$ вектора $U(x, y)$ при $x = 0$ должны удовлетворять соотношениям

$$u = 0, \quad \partial v/\partial x = 0$$

Потребуем обращения в нуль этих компонент при $x \rightarrow \infty$, а на кромках $y = 0$, $y = b$ будем рассматривать условия контакта полосы с абсолютно жесткими полуплоскостями при отсутствии трения и отставания

$$v = 0, \quad \partial u/\partial y = 0 \quad (1.2)$$

Представим решение такой задачи и вектор $F(x, y)$ массовых сил разложениями

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(y) U_n(x), & F(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(y) F_n(x) & (1.3) \\ Q_n(y) &\equiv \begin{vmatrix} \cos \nu y & 0 \\ 0 & \sin \nu y \end{vmatrix}, & \nu &= \frac{n\pi}{b} \end{aligned}$$

что, очевидно, позволяет удовлетворить условиям (1.2), а для компонент $u_n(x)$ и $v_n(x)$ вектора $U_n(x)$ привести к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_n(d^2/dx^2, A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}) U_n(x) = F_n(x) \quad (1.4)$$

с краевыми условиями

$$x=0 \quad u_n=0, \quad v_n'=0; \quad x \rightarrow \infty, \quad u_n=0, \quad v_n=0 \quad (1.5)$$

Элементы L_n^{ij} матрицы L_n при этом определяются выражениями

$$L_n^{11} \equiv A_{11}d^2/dx^2 - A_{66}v^2, \quad L_n^{22} \equiv A_{66}d^2/dx^2 - A_{22}v^2$$

$$L_n^{12} = -L_n^{21} \equiv (A_{12} + A_{66})vd/dx$$

Фундаментальную систему решений однородной системы, соответствующей (1.4), составляют векторы

$$U_n^*(x, \pm p), \quad U_n^*(x, \pm q) \quad (1.6)$$

Здесь

$$U_n^*(x, p) = \begin{pmatrix} \frac{A_{12} + A_{66}}{v(A_{66} - A_{11}p^2)} e^{vpx} \\ (vp)^{-1} e^{vpx} \end{pmatrix}$$

$$p, q = \left(\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2 - 2A_{12}A_{66} \pm B^{1/2}}{2A_{11}A_{66}} \right)^{1/2}$$

$$B = (A_{12}^2 - A_{11}A_{22})^2 + 4(A_{12}^2 - A_{11}A_{22})A_{66}(A_{12} + A_{66})$$

Применяя далее процедуру метода Лагранжа вариации произвольных постоянных, получим общее решение системы (1.4) в виде

$$U_n(x) = \int_0^x S_n(x, \xi) F_n(\xi) d\xi + P_n(x) C_n \quad (1.7)$$

Элементы $S_n^{ij}(x, \xi)$ матрицы $(S_n(x, \xi))_{2,2}$ определяются выражениями

$$S_n^{11}(x, \xi) = (pD_q \operatorname{sh} vp(x - \xi) - \dots)/(A_{11}R)$$

$$S_n^{12}(x, \xi) = \mu (\operatorname{ch} vp(x - \xi) + \dots)/(A_{66}(D_p - D_q))$$

$$S_n^{21}(x, \xi) = D_p D_q (\operatorname{ch} vp(x - \xi) - \dots)/(\mu A_{11}R)$$

$$S_n^{22}(x, \xi) = (qD_p \operatorname{sh} vp(x - \xi) - \dots)/(A_{66}pq(D_p - D_q))$$

$$\mu = A_{12} + A_{66}, \quad D_p = A_{66} - A_{11}p^2, \quad D_q = A_{66} - A_{11}q^2,$$

$$R = p^2 D_q - q^2 D_p$$

Здесь и далее многоточие означает величину, соответствующую предыдущему слагаемому при замене в нем p на q и q на p ; $P_n(x) = (U_n^*)_{2,4}$ — матрица, столбцы которой — векторы (1.6).

После удовлетворения краевым условиям (1.5) матрица-столбец произвольных постоянных C_n определяется интегралом

$$C_n = \int_0^\infty W_n(\xi) F_n(\xi) d\xi$$

подставив который в (1.7), получим

$$U_n(x) = \int_0^\infty G_n(x, \xi) F_n(\xi) d\xi \quad (1.8)$$

$$G_n(x, \xi) = \begin{cases} S_n(x, \xi) + P_n(x) W_n(\xi), & x > \xi \\ P_n(x) W_n(\xi), & x < \xi \end{cases}$$

Ядро $G_n(x, \xi)$ — матрица Грина краевой задачи (1.4), (1.5), а ее элементы имеют вид

$$G_n^{11}(x, \xi) = \begin{cases} -K_{11}v^{-1}(pD_q e^{-vp\xi} \operatorname{sh} vpx - \dots), & x > \xi \\ -K_{11}v^{-1}(pD_q e^{-vp\xi} \operatorname{sh} vpx - \dots), & x < \xi \end{cases}$$

$$G_n^{12}(x, \xi) = \begin{cases} K_{12}v^{-1}(e^{-vp\xi} \operatorname{ch} vpx - \dots), & x > \xi \\ -K_{12}v^{-1}(e^{-vp\xi} \operatorname{sh} vpx - \dots), & x < \xi \end{cases}$$

$$G_n^{21}(x, \xi) = \begin{cases} K_{21}v^{-1}(e^{-vp\xi} \operatorname{sh} vpx - \dots), & x > \xi \\ -K_{21}v^{-1}(e^{-vp\xi} \operatorname{ch} vpx - \dots), & x < \xi \end{cases}$$

$$G_n^{22}(x, \xi) = \begin{cases} K_{22}v^{-1}(pD_q e^{-vq\xi} \operatorname{ch} vqx - \dots), & x > \xi \\ K_{22}v^{-1}(pD_q e^{-vq\xi} \operatorname{ch} vqx - \dots), & x < \xi \end{cases}$$

$$K_{11} = \frac{1}{A_{11}R}, \quad K_{12} = \frac{\mu}{A_{66}(D_p - D_q)},$$

$$K_{21} = \frac{D_p D_q}{\mu A_{11}R}, \quad K_{22} = \frac{1}{A_{66}pq(D_p - D_q)}$$

Применим далее для $F_n(\xi)$ в (1.8) формулу Фурье — Эйлера и, подставив затем $U_n(x)$ в (1.3), получим

$$U(x, y) = \int_0^\infty \int_0^b G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.9)$$

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n Q_n(y) G_n(x, \xi) Q_n(\eta) \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n > 0 \end{cases}$$

В силу единственной разрешимости исходной краевой задачи теории упругости для ортотропной полуполосы и известной представимости ее решения массовым потенциалом можно сделать вывод о том, что ядро (1.10) интеграла (1.9) — искомая матрица Грина рассматриваемой задачи.

Принимая далее во внимание, что при $t < 1$ и $0 \leq y \leq 2\pi$ имеют место соотношения

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{t^n \cos ny}{n} = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2t \cos y + t^2)$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{t^n \sin ny}{n} = \operatorname{arctg} \frac{t \sin y}{1 - t \cos y}$$

произведем суммирование в элементах матрицы Грина, после чего они запишутся в виде

$$G_{11}(x, y; \xi, \eta) = \frac{K_{11}}{4\pi} \left[pD_q \ln \frac{E(p, x, y; -\xi, \eta) E(p, x, y; -\xi, -\eta)}{E(p, x, y; \xi, \eta) E(p, x, y; \xi, -\eta)} - \dots \right]$$

$$G_{12}(x, y; \xi, \eta) = \frac{K_{12}}{2\pi} [\operatorname{arctg} M(p, x, y; \xi, \eta) - \dots$$

$$\dots + \delta \operatorname{arctg} M(p, x, y; -\xi, \eta) - \dots + \operatorname{arctg} M(q, x, y; \xi, -\eta) - \dots$$

$$\dots + \delta \operatorname{arctg} M(q, x, y; -\xi, -\eta) - \dots]$$

$$G_{21}(x, y; \xi, \eta) = \frac{K_{21}}{2\pi} [\operatorname{arctg} M(q, x, y; \xi, \eta) - \dots$$

$$\dots + \delta \operatorname{arctg} M(p, x, y; -\xi, \eta) - \dots + \operatorname{arctg} M(q, x, y; \xi, -\eta) - \dots$$

$$\dots + \delta \operatorname{arctg} M(p, x, y; -\xi, -\eta) - \dots]$$

$$G_{22}(x, y; \xi, \eta) = \frac{K_{22}}{4\pi} \left[pD_q \ln \frac{E(p, x, y; \xi, -\eta) E(p, x, y; -\xi, -\eta)}{E(p, x, y; \xi, \eta) E(p, x, y; -\xi, \eta)} - \dots \right]$$

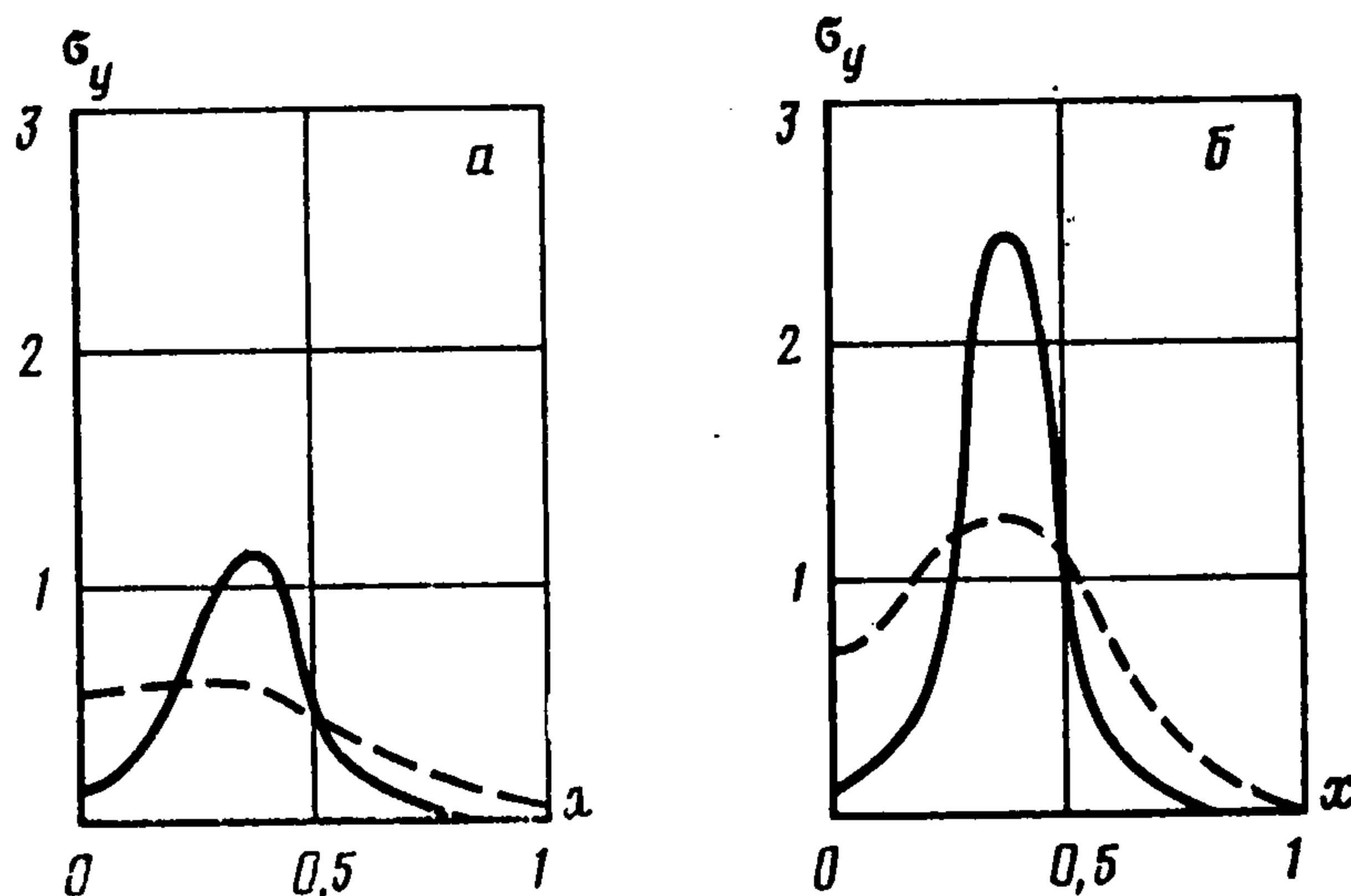
$$\delta = \begin{cases} 1, & x > \xi \\ -1, & x < \xi \end{cases}$$

$$E(p, x, y; \xi, \eta) = 1 - 2 \exp\left(-\frac{\pi}{b} p |x + \xi|\right) \cos\left[\frac{\pi}{b} (y + \eta)\right] + \exp\left(-\frac{2\pi}{b} p |x + \xi|\right)$$

$$M(p, x, y; \xi, \eta) = \exp\left(-\frac{\pi}{b} p |x + \xi|\right) \sin\left[\frac{\pi}{b} (y + \eta)\right] \times \times \left(1 - \exp\left(-\frac{\pi}{b} p |x + \xi|\right) \cos\left[\frac{\pi}{b} (y + \eta)\right]\right)^{-1}$$

Можно проверить, что построенная конструкция удовлетворяет всем определяющим свойствам матрицы Грина.

2. Приведем теперь некоторые результаты использования полученной матрицы Грина. Исходя из механической интерпретации последней, можно усмотреть, что компоненты $G_{12}(x, y; \xi, \eta)$, $G_{22}(x, y; \xi, \eta)$ представляют



собой перемещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ точки (x, y) рассматриваемой полуполосы, вызванные единичной массовой силой, приложенной в точке (ξ, η) и направленной параллельно оси y . Воспользовавшись известными [2] формулами, получим возникающие при этом нормальные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_{11} \partial G_{12} / \partial x + A_{12} \partial G_{22} / \partial y \\ \sigma_y &= A_{12} \partial G_{12} / \partial x + A_{22} \partial G_{22} / \partial y \end{aligned}$$

которые в рассматриваемом случае будут выглядеть так:

$$\sigma_x = \frac{A_{12} + A_{11} p^2}{2b A_{11} p (q^2 - p^2)} [\Phi(p, x, y; -\xi, -\eta) + \Phi(p, x, y; \xi, -\eta) - \Phi(p, x, y; -\xi, \eta) - \Phi(p, x, y; \xi, \eta)] + \dots$$

$$\sigma_y = \frac{p^2 (A_{12}^2 - A_{11} A_{22} + A_{21} A_{66}) + A_{22} A_{66}}{2b A_{11} A_{66} p (q^2 - p^2)} [\Phi(p, x, y; -\xi, -\eta) + \Phi(p, x, y; \xi, -\eta) - \Phi(p, x, y; -\xi, \eta) - \Phi(p, x, y; \xi, \eta)] + \dots$$

$$\begin{aligned} \Phi(p, x, y; \xi, \eta) &= \exp\left(-\frac{\pi}{b} p |x + \xi|\right) \times \\ &\times \sin\left[\frac{\pi}{b} (y + \eta)\right] [E(p, x, y; \xi, \eta)]^{-1} \end{aligned}$$

На фигуре изображены эпюры напряжений σ_y , возникающих на верхней a и нижней b кромках полуполосы шириной $b = 1$ от единичной силы, помещенной в точке $(0,35, 0,65)$. Сплошные линии соответствуют компонентам напряжений в ортотропном случае ($E_1 = 0,59 \cdot 10^9$ Н/м², $E_2 = 1,18 \cdot 10^9$ Н/м², $\nu_1 = 0,036$, $\nu_2 = 0,071$, $G = 0,07 \cdot 10^9$ Н/м²), штриховые — в изотропном ($E = 0,59 \cdot 10^9$ Н/м², $\nu = 0,036$).

Укажем, что наличие полученной здесь матрицы Грина позволяет рассматривать действие на ортотропную полосу любой системы сосредоточенных или по заданному закону распределенных массовых сил. Эту матрицу можно также использовать при разработке алгоритмов решения ряда прикладных задач на базе известных [3,4] вариантов метода потенциала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгова И. М., Мельников Ю. А. Построение функций и матриц Грина для уравнений и систем эллиптического типа // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 695—700.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
3. Мельников Ю. А. Упругая полоса с регулярным рядом жестко окантованных отверстий сложного очертания // Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. № 7. С. 622—625.
4. Кошнарева В. А., Мельников Ю. А., Преображенский И. Н. Решение плоских контактных задач теории упругости методом функций Грина // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 148—155.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
1.III.1988