Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 6, 1988

УДК 539.3

МНОГОМОДОВЫЕ БИФУРКАЦИИ УПРУГИХ РАВНОВЕСИЙ

Сапронов Ю. И.

Рассматриваются консервативные упругие системы с симметрией параллелепипеда, изучение закритических равновесий которых сводится (методом Ляпунова — Шмидта) к анализу экстремалей функций вида

$$W(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \Sigma\alpha_j(\lambda)\, x_j^2 + \Sigma h_{i,j} x_i^2 x_j^2 + \ldots$$

где $H = (h_{i,j})$ — симметричная матрица с невырожденными главными (диагональными) минорами. Выписано соотношение, при котором матрица H определяется ритцевской аппроксимацией функционала полной энергии, построенной по основным модам бифуркации. В случае мягкой потери устойчивости и при ind $H = 0$ или $n - 1$ (ind — количество отрицательных собственных значений с учетом кратности) перечисляются все допустимые типы и количества бифурцирующих устойчивых равновесий. Показывается, что после мягкой потери устойчивости с нарушением симметрии возможны каскадные бифуркации (каскадные бифуркации моделируют закритические серии прощелкиваний, сопровождаемые падением нагрузки [1, 2]). Для иллюстрации приводятся два известных примера мягкой потери устойчивости и один новый пример жесткой потери устойчивости.

Многомодовые бифуркации упругих равновесий на основе вариационного (энергетического) принципа исследовались в рамках проблемы закритического поведения упругих систем [1—3]. Основные достижения здесь получены под влиянием теории особенностей гладких функций [4, 5] и идей, связанных с условием симметрии (эквивариантности уравнения равновесия относительно действия группы на пространстве конфигураций) [6—10]. Следует отметить, что большинство результатов, связанных с эквивариантностью относительно непрерывной группы, получены сведением (факторизацией по орбитам действия группы) к одномодовым бифуркациям.

Часто встречающаяся симметрия параллелепипеда (эквивариантность относительно действия группы $(Z_2)^n = Z_2 \times \ldots \times Z_2$)) приводит к анализу функции, четной по каждой переменной или, что эквивалентно, к анализу функции в конусе $R_+^n = \{x \in R^n \mid x_j \geqslant 0\}$ [3, 10, 11]. К настоящему времени практически полностью исследованы двухмодовые бифуркации (с симметрией прямоугольника), сводимые к анализу функций вида [5, 12] $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + x_1^4 + a x_1^2 x_2^2 + x_2^4$, $a^2 \neq 4$. В случае n мод ($n \geqslant 3$) для бифуркаций, сводимых к анализу функций вида $(\alpha, y) + (Hy, y) + \ldots$, $y = (x_1^2, \ldots, x_n^2)^T$ (при условии невырожденности главных миноров H), установлено [3], что количество орбит малых решений (с учетом кратности и комплексных решений) равно 2^n. В этой ситуации практический интерес представляет изучение всех допустимых типов, индексов Морса и асимптотик бифурцирующих решений в зависимости от типа матрицы H. В [9—11] для функций с групповой инвариантностью решены задачи, традиционные по постановкам для общей теории особенностей гладких функций.

1. Постановка задачи и основные результаты. Пусть E и F — вещественные банаховы пространства, E непрерывно вложено в F. Гладкое фредгольмово [3, 6] отображение f из E в F называется потенциальным, если $f = \mathrm{grad}_{\mathbf{H}}\, V$, где $\mathbf{H}$ — некоторое гильбертово пространство, в которое плотно и непрерывно вложены E и F, а V — гладкий функционал (потенциал отображения) на E. Если f включено в гладкое параметрическое семейство $f(\cdot, \delta)$, $f(x, 0) = f(x)$ гладких потенциальных отображений с потенциалом $V(x, \delta)$, $\delta \in R^1$, то уравнение

(1.1) $\qquad f(x, \delta) = 0$

можно рассматривать как абстрактный аналог уравнения равновесия консервативной упругой системы [13, 14].

Определение 1.1. Скажем, что для уравнения (1.1) при $\delta = 0$ выполнено условие потери устойчивости в нуле, если $f(0, \delta) \equiv 0$, $V(\cdot, \delta)$ принимает в нуле значение строгого локального минимума при $\delta < 0$ и при малых положительных δ нуль не является точкой локального минимума. Если дополнительно нуль — точка строгого локального минимума для $V(\cdot, 0)$, то потерю устойчивости в нуле назовем мягкой, а в противном случае — жесткой.

Предположим, что $V(\cdot, \delta)$ гладко продолжается на некоторое гильбертово (энергетическое) пространство $\mathbf{H}^1$, $E \subset \mathbf{H}^1 \subset \mathbf{H}$ (все вложения непрерывны) с условием, что $\operatorname{grad}_{\mathbf{H}^1} V$ представляется в форме Лере — Шаудера (единица плюс вполне непрерывное отображение из $\mathbf{H}^1$ в $\mathbf{H}^1$). Для такого функционала при мягкой потере устойчивости (в нуле) рядом с нулем появляется новое устойчивое решение (точка, в которой $V(\cdot, \delta)$ принимает локально минимальное значение). После жесткой потери устойчивости может не остаться в заранее фиксированной окрестности нуля ни одной точки минимума. В этом можно убедиться на примере возмущенной особенности A_{-3} [5]: $V = -x^4 - \delta x^2$, $x \in R^1$.

Пусть дополнительно уравнение содержит параметр $p \in R^m$:

$$f(x, \delta, p) = 0 \tag{1.2}$$

и $V(x, \delta, p)$ — потенциал для $f(x, \delta, p)$ (в конкретных уравнениях параметром δ учитывается основная нагрузка, а параметром p — дополнительные нагрузки, геометрические характеристики и т. п.). Пусть для $f(x, \delta, 0)$ выполняются условия потери устойчивости в нуле при $\delta = 0$ и следующие условия:

1.1) для любых δ, p функционал $V(\cdot, \delta, p)$ инвариантен относительно набора изометрических в $\mathbf{H}$ инволюций

$$J_k\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}, \quad J_k(E) \subset E, \quad J_k(F) \subset F, \quad k = 1, \ldots, n$$

1.2) существует набор гладких нормированных в $\mathbf{H}$ функций (ведущих мод бифуркации) $\{e_j(\delta, p)\}_{j=1}^n$, $(\delta, p) \in U \subset R^1 \times R^m$, для которых $J_k(e_k(\delta, p)) = -e_k(\delta, p)$, $J_k(e_j(\delta, p)) = e_j(\delta, p)$, $(\partial f/\partial x)(0, \delta, p)(e_j(\delta, p)) = \alpha_j(\delta, p) e_j(\delta, p)$, $k \neq j$, где $\{\alpha_j(\delta, p)\}_{j=1}^n$ — гладкие (спектральные) функции;

1.3) ядро оператора $(\partial f/\partial x)(0, 0, 0)$ совпадает с линейной оболочкой векторов $e_1(0, 0), \ldots, e_n(0, 0)$;

1.4) ранг матрицы, составленной из столбцов $(\partial\alpha/\partial p_1)(0, 0), \ldots, (\partial\alpha/\partial p_m)(0, 0)$, $(\partial\alpha/\partial\delta)(0, 0)$, где $\alpha(\delta, p) = (\alpha_1(\delta, p), \ldots, \alpha_n(\delta, p))^T$, равен n;

1.5) имеет место неравенство $(\partial\alpha_k/\partial\delta)(0, 0) < 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Заметим, что из 1.3) следует $\alpha_1(0, 0) = \ldots = \alpha_n(0, 0) = 0$, а из 1.3) и 1.5) вытекает предположение о потере устойчивости в нуле, если $f(0, \delta, 0) \equiv 0$.

Для любого $x \in E$ положим $x_j(\delta, p) = \langle x, e_j(\delta, p)\rangle$ (здесь $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{H}$). Тогда

$$x = \Sigma x_j(\delta, p) e_j(\delta, p) + x^*(\delta, p)$$

Аналогично

$$f(x, \delta, p) = \Sigma f_j(x, \delta, p) e_j(\delta, p) + f^*(x, \delta, p)$$

Пусть $E^*_{\delta, p}$ и $F^*_{\delta, p}$ — ортогональные дополнения в E и F по метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle$ к линейной оболочке векторов $\{e_j(\delta, p)\}_{j=1}^n$. Из 1.3) следует, что $f^*(\cdot, 0{,}0)$: $E_{0,0}{}^* \to F_{0,0}{}^*$ — локальный диффеоморфизм. Следовательно, в силу теоремы о неявной функции найдется гладкая функция $x^* = \Phi(\xi, \delta, p)$ со значениями в $E^*_{\delta, p}$, $\xi \in R^n$, для которой

$$\Phi(0, 0, 0) = 0, \quad f^*(\Sigma \xi_j e_j(\delta, p) + \Phi(\xi, \delta, p), \delta, p) \equiv 0$$

Определение 1.2. Функцию

$$W(\xi, \delta, p) = V(\Sigma \xi_j e_j(\delta, p) + \Phi(\xi, \delta, p), \delta, p)$$

назовем ключевой функцией уравнения (1.2).

Точка $a \in E$ будет решением уравнения (1.2) при заданных δ, p тогда и только тогда, когда $a = \Sigma \xi_j e_j(\delta, p) + \Phi(\xi, \delta, p)$, где ξ — критическая точка ключевой функции, причем $\operatorname{ind}(V(\cdot, \delta, p), a) = \operatorname{ind}(W(\cdot, \delta, p), \xi)$ (ind — индекс Морса). Таким образом, изучение решений уравнения (1.2) в некоторой окрестности нуля в E при малых δ, p сводится к анализу ветвления критических точек ключевой функции $W(\xi, \delta, p)$.

Из условий 1.1) и 1.2) следует, что $W(\xi, \delta, p)$ четна по каждой переменной ξ_j. Следовательно,

$$W(\xi, \delta, p) = g(\eta, \delta, p), \quad \eta = (\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2)^T$$

где $g(\eta, \delta, p)$ — некоторая гладкая функция.

Рассмотрим матрицу $H(\delta, p)$, составленную из элементов $h_{ij} = \partial^2 g \mid \partial\eta_i \partial\eta_j |_{x=0}$, от которой потребуем выполнения условия

$$(1.3) \qquad \det H_K{}^\circ \neq 0, \quad K \subset \{1, \ldots, n\}$$

Здесь $H_K{}^\circ$ — подматрица, составленная из элементов $h_{ij}(0, 0)$, $(i, j) \in K \times K$. Матрицу $H^\circ = H(0, 0)$ назовем определяющей.

Если $V(x, \delta, p)$ представляется в форме

$$(1.4) \qquad V(x, \delta, p) = \text{const} + V^{(2)}_{\delta, p}(x) + V^{(4)}_{\delta, p}(x) + o(\| x \|^4)$$

где $V^{(2)}_{\delta, p}$ и $V^{(4)}_{\delta, p}$ — однородные формы второго и четвертого порядков, то $h_{ij}(\delta, p) = {}^1/_4 \partial^4 W_R(0, \delta, p)/\partial\xi_i^2 \partial\xi_j^2$, где $W_R(\xi, \delta, p)$ — ритцевская аппроксимация функционала $V(x, \delta, p)$, построенная по системе векторов $\{e_j(\delta, p)\}_{j=1}^n$.

Пусть форма $V^{(4)}_{\delta, p}$ в разложении (1.4) порождена полилинейной симметричной формой $V^{(4)}_{\delta, p}(x, y, z, w)$, $V^{(4)}_{\delta, p}(x) = V^{(4)}_{\delta, p}(x, x, x, x)$. Тогда для $\mathring{h}_{i,j}$ получаем

$$(1.5) \qquad \mathring{h}_{i,j} = \begin{cases} 3V^{(4)}_{0,0}(e_j(0, 0), e_j(0, 0), e_i(0, 0), e_i(0, 0)), & i \neq j \\ V^{(4)}_{0,0}(e_j(0, 0)), & i = j \end{cases}$$

Формула (1.5) имеет место не только для потенциалов вида (1.4). Если в разложение (1.4) ввести слагаемое $V^{(3)}_{\delta, p}$ (кубическую форму), то представление (1.5) сохранится при условии

$$(1.6) \qquad \operatorname{grad}_H V^{(3)}_{0,0}(u) = 0, \quad u = \Sigma u_j e_j(0, 0)$$

Теорема 1.1 ([3]). Пусть матрица H° положительно определена. Тогда при достаточно малых δ, p в достаточно малой окрестности O нуля в E существует не более 2^n устойчивых решений уравнения (1.2).

Теорема 1.2. В случае положительной определенности H° в некоторой окрестности U нуля пространства параметров δ, p найдется такое замкнутое нигде не плотное подмножество σ, что для любой точки (δ', p') из фиксированной компоненты связности множества $U \setminus \sigma$ число устойчивых решений уравнения (1.2) при $\delta = \delta'$ и $p = p'$ постоянно и равно 2^r, $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Причем, для любого $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ найдется компонента связности в $U \setminus \sigma$, для которой число устойчивых решений равно 2^r.

Теорема 1.3. Пусть матрица H° условно положительна в конусе R_+^n [15] и индекс квадратичной формы $(H^\circ x, x)$ равен $n - 1$. Тогда в некоторой окрестности U нуля в пространстве параметров δ, p найдется замкнутое нигде не плотное подмножество σ, такое, что для любой точки (δ', p'), принадлежащей фиксированной компоненте связности множества $U \setminus \sigma$, число ненулевых устойчивых решений уравнения (1.2) (в достаточно малой окрестности O нуля в E) при $\delta = \delta'$ и $p = p'$ четно и не превосходит $2n$. Причем, для любого $r \in \{1, 2, \ldots n\}$ найдется компонента связности в $U \setminus \sigma$, для которой число устойчивых решений равно $2r$.

Доказательство теорем будет дано в п. 2.

2. Ветвление условных экстремалей в симплициальном конусе. Исследование экстремалей функции $W(\xi)$, $\xi \in R^n$, четной по каждой переменной ξ_j, сводится к исследованию условных экстремалей в конусе R_+^n для функции $g(x)$, $x = (\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2)^T$, $W(\xi) \equiv g(x)$ [3, 11, 16].

Точка $a \in R_+^n$ называется условной критической точкой (УКТ) в R_+^n для гладкой функции $g(x)$, $x \in R^n$, если grad $g(a)$ ортогонален наименьшей грани конуса R_+^n, содержащей a. Носителем точки $x \in R^n$ назовем совокупность $\operatorname{supp}(x) = \{j \mid x_j \neq 0\}$, а число card supp (x) — порядком точки. Через R_K^n, $K \subset \{1, \ldots, n\}$ обозначим подпространство $\{x \mid \operatorname{supp}(x) \subset K\}$. Таким образом, $a \in R_+^n$ — УКТ в R_+^n для g, если $\operatorname{grad} g(a) \perp R^n_{\operatorname{supp}(a)}$, или, что эквивалентно, выполняется соотношение

$$\operatorname{supp}(a) \cap \operatorname{supp}(\operatorname{grad} g(a)) = \varnothing \tag{2.1}$$

Если наряду с (2.1) выполняется равенство

$$\operatorname{supp}(a) \cup \operatorname{supp}(\operatorname{grad} g(a)) = \{1, \ldots, n\} \tag{2.2}$$

то a назовем вложенной УКТ. Если вместе с (2.1) и (2.2) выполняется условие невырожденности гессиана в a для ограничения $g_K = g\,|_{R_K^n}$, $K = \operatorname{supp}(a)$, то a назовем регулярной точкой. УКТ, не являющаяся регулярной, называется вырожденной. Индексом Морса регулярной критической точки a называется число, равное обычному индексу Морса ограничения g_K, $K = \operatorname{supp}(a)$, сложенному с количеством отрицательных чисел в наборе $\{(\partial g/\partial x_j)(a)\}_{j=1}^n$.

Для произвольной гладкой развертки $g(x, \lambda)$, $g(x, 0) = g(x)$, $\lambda \in R^m$ определим бифуркационное множество [4, 5] $\sigma(g, O)$, $O \subset R^n$ как совокупность λ, для которых $g(\cdot, \lambda)$ имеет вырожденную УКТ в $O \cap R^n_+$. Пусть $L \subset \{1, \ldots, n\}$, $K \cap L = \varnothing$; $\omega_{K;L}(g, O)$ — подмножество значений λ, для которых $g(\cdot, \lambda)$ имеет регулярную критическую точку $a \in O \cap R^n_+$ с носителем K и для которой

$$(\partial g/\partial x_l)(a, \lambda) < 0, \quad (\partial g/\partial x_j)(a, \lambda) > 0, \quad l \in L, \quad j \notin K \cup L$$

Из определения $\omega_{K;L}$ следует, что $\partial\omega_{K;L} \subset \sigma(g, O)$.

Для функции g при условии (1.3) и равенстве числу n ранга матрицы $(\partial^2 g/\partial\lambda\partial x)(0, 0)$ выполняется соотношение

$$\sigma(g, O) = \bigcup_{K, L} \partial\omega_{K;l}(g, O)$$

Здесь и дальше O — достаточно малая окрестность нуля в R^n.

Кроме того, найдется окрестность нуля U в R^m, такая, что

$$U \cap \sigma(g, O) = \bigcup_{K,\, j} (U \cap \sigma_{K;\, j}(g, O))$$

где $\sigma_{K,\, j}(g, O)$ — множество λ, для которых $g(\cdot, \lambda)$ имеет УКТ a с носителем K и

$$j \in \{1, \ldots, n\} \setminus (K \cup \operatorname{supp}(\operatorname{grad} g(a, \lambda)))$$

При достаточно малых O и U из (1.3) следует существование не более одной УКТ в $O \cap R^n_+$ с заданным носителем. Всюду далее предполагается, что

$$\text{(2.3)} \qquad \operatorname{grad} g(0, 0) = 0$$

Лемма 2.1. Пусть $\operatorname{rank}(\partial^2 g/\partial x \partial \lambda)(0, 0) = n$ и выполнены условия (1.3) и (2.3). Тогда для любой окрестности O нуля в R^n найдется такая окрестность U нуля в R^m, что для всякой в U кривой $\lambda(t)$, $t \in [0, 1]$, пересекающей при $t = t_1$ компоненту $\sigma_{K;\, j}$ и не пересекающей ни при каких t остальные компоненты σ, найдется в $O \cap R^n_+$ единственная кривая $x(t)$, состоящая из УКТ для $g(\cdot, \lambda(t))$ (при соответствующих t) с постоянным носителем K.

Доказательство в силу (1.3) вытекает из теоремы о неявной функции.

Заметим, что пересечение компоненты $\sigma_{K;\, j}$ кривой $\lambda(t)$ означает выполнение равенства $(\partial g/\partial x_j)(x(t_1), \lambda(t_1)) = 0$, где $x(t)$ — кривая, соответствующая $\lambda(t)$ по лемме 2.1.

Пусть

$$\gamma(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}(x(t), \lambda(t))\right)$$

Определение 2.1. Скажем, что гладкая кривая $\lambda(t)$ положительно пересекает $\sigma_{K;\, j}$, если $\gamma(t_1) > 0$. В противном случае пересечение назовем отрицательным.

Лемма 2.2. Пусть $\operatorname{rank}(\partial^2 g/\partial x \partial \lambda)(0, 0) = n$ и выполнены условия (1.3), (2.3). Пусть окрестности O и U удовлетворяют заключению леммы 2.1 и гладкая кривая $\lambda(t)$ положительно (отрицательно) пересекает $\sigma_{K;\, j}$ при $t = t_1$ и не пересекает остальные компоненты σ при любом t. Тогда индекс Морса УКТ $x(t)$ функции $g(\cdot, \lambda(t))$, $\operatorname{supp}(x(t)) = K$ уменьшается (увеличивается) на единицу после пересечения.

Доказательство. После положительного (отрицательного) пересечения имеем $(\partial g/\partial x_j)(x(t), \lambda(t)) > 0$ (< 0) при $t > t_1$. Следовательно, число отрицательных производных уменьшается (увеличивается) на единицу. Так как сигнатура матрицы Гессе в $x(t)$ для ограничения $g_K(\cdot, \lambda(t))$ постоянна в O, то отсюда получаем утверждение леммы.

Лемма 2.3. В условиях леммы 2.2 при прохождении t через t_1 либо рождается из $x(t_1)$, либо исчезает в этой точке ветвь УКТ в $R_+{}^n$ с носителем $K \cup j$. Рождение (исчезновение) происходит при положительном (отрицательном) пересечении и условии $\det H_K{}^\circ \det \overset{\circ}{H}_{K \cup j} < 0$ или при отрицательном (положительном) пересечении и условии $\det H_K{}^\circ \det \overset{\circ}{H}_{K \cup j} > 0$. Индекс Морса бифурцирующей точки с носителем $K \cup j$ совпадает с индексом Морса точки носителя K, рассмотренной до рождения (после исчезновения) бифурцирующей ветви.

Доказательство. Критическая точка с носителем $K \bigcup j$ определяется следующей системой уравнений:

$$(\partial g/\partial x_k)(x, \lambda(t)) = x_q = 0, \quad k \in K \bigcup j, \quad q \notin K \bigcup j \tag{2.4}$$

Из условия леммы следует, что эта система разрешима при $t = t_1$, а следовательно, и при $t \neq t_1$. Пусть $y(t)$ — решение системы (2.4), $y(t_1) = x(t_1)$, где $x(t)$ — ветвь УКТ с носителем K. Обозначим Γ матрицу Гессе функции $g(\cdot, \lambda(t_1))$ в точке $x(t_1)$, а $\Gamma_{K;L}$ — ее подматрицу, составленную из $\gamma_{k,l}$, $k \in K$, $l \in L$. Из правила дифференцирования неявных функций получаем при $t = t_1$

$$\Gamma_{j;K}\frac{dx_K}{dt} + B_j\frac{d\lambda}{dt} = \gamma, \quad \Gamma_{K;K}\frac{dx_K}{dt} + B_K\frac{d\lambda}{dt} = 0 \tag{2.5}$$

$$\Gamma_{j;K\bigcup j}\frac{dy_{K\bigcup j}}{dt} + B_j\frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad \Gamma_{K;K\bigcup j}\frac{dy_{K\bigcup j}}{dt} + B_K\frac{d\lambda}{dt} = 0 \tag{2.6}$$

$$B_j = \frac{\partial^2 g}{\partial\lambda\partial x_j}, \quad B_K = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\operatorname{grad} g\right)_K$$

(x_K — вектор, составленный из компонент x_k, $k \in K$ вектора x).

Из (2.5), (2.6) получаем

$$(\Gamma_{j;j} - \Gamma_{j;K}\Gamma_{K;K}^{-1}\Gamma_{K;j})\frac{dy_j}{dt} + \gamma = 0$$

В последнем выражении множитель перед производной равен $\det\Gamma_{K\bigcup j;K\bigcup j}/$ $/\det\Gamma_{K;K}$. Следовательно,

$$\operatorname{sgn} dy_j/dt = -\operatorname{sgn}\gamma\operatorname{sgn}(\det H_K{}^\circ \det \overset{\circ}{H}_{K\bigcup j})$$

Из последнего равенства вытекает утверждение леммы.

Докажем теперь теоремы 1.1 и 1.2. Если матрица H° положительно определена, то из леммы 2.3 вытекает, что $g(\cdot, \lambda)$, $\lambda = (\delta, p)$ имеет в O единственную УКТ нулевого индекса. Если кривая $\lambda(t)$, $t \in [0, 1]$ соединяет точку области $\omega_{\varnothing;\varnothing}$ с точкой области $\omega_{K;\varnothing}$, то в соответствии с леммой 2.3 при переходе в $\omega_{K;\varnothing}$ ответвится устойчивая точка с носителем K. Множество $\omega_{K;\varnothing}$ задается соотношениями

$$\partial g/\partial x_k = x_j = 0, \quad x_k > 0, \quad \partial g/\partial x_j > 0, \quad k \in K; \quad j \notin K$$

и, очевидно, при выполнении условий (1.3) и (2.3) не пусто.

Если $W(\xi, \lambda) = g(x, \lambda)$, $x = (\xi_1{}^2, \ldots, \xi_n{}^2)$, $\lambda = (\delta, p)$, то каждой УКТ x в $R_+{}^n$ функции $g(\cdot, \lambda)$ взаимно однозначно (с сохранением индекса Морса) соответствует критическая точка $\xi \in R_+{}^n$, $\xi_j = \sqrt{x_j}$ функции $W(\cdot, \lambda)$. Изменяя знаки перед компонентами ξ_j, получим другие (смежные) критические точки функции $W(\cdot, \lambda)$ с тем же индексом Морса. Всего этих точек будет 2^r, где $r = \operatorname{card}\operatorname{supp}(x)$.

В условиях теоремы 1.3 УКТ нулевого индекса в O имеет порядок не выше первого. Функция $g(\cdot, \nu t)$ при малых t имеет в O ровно r устойчивых УКТ первого порядка с носителями в $K = \{k_1, \ldots, k_r\}$, если ν — решение уравнения $(\partial^2 g/\partial x\partial\lambda)(0, 0)\nu = p$, $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$, где $p_j =$ $= -\sqrt{h_{j,j}}$ для $j \in K$ и $p_j = \sqrt{h_{j,j}}$ для $j \notin K$.

Замечание. Из доказательства леммы 2.3 следует, что компонента $x_K(\lambda)$ критической точки $x(\lambda)$ с носителем K имеет следующее асимптотическое представление:

$$x_K(\lambda) = -(H_K{}^\circ)^{-1} b_K(\lambda) + o(|\lambda|) \tag{2.7}$$
$$b(\lambda) = \operatorname{grad}_{R^n} g(0, \lambda)$$

Необходимым и достаточным условием включения точки λ в область $\omega_{K;L}$ являются соотношения

$$x_k(\lambda) > 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_l}(x(\lambda), \lambda) < 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_j}(x(\lambda), \lambda) > 0$$
$$k \in K, \quad l \in L, \quad j \notin K \bigcup L$$

3. Замечания о начальных несовершенствах и каскадных бифуркациях. В широком смысле учет начальных несовершенств означает изучение возможных изменений характера бифуркации при переходе от уравнения (1.1) к возмущенному уравнению $f'(x, \delta) = 0$ с потенциалом $V'(x, \delta)$:

$$\| d^j V'(x, \delta) - d^j V(x, \delta) \| < \varepsilon, \quad (x, \delta) \in O \times U, \ j \leqslant m \tag{3.1}$$

Здесь d^j — дифференциал j-го порядка, m — заданное целое число.

Скажем, что уравнение (1.1) допускает r-ступенчатую каскадную бифуркацию (r — целое положительное число), если для сколь угодно малых окрестностей O и U нулей в E и R^1 существует сколь угодно близкое в смысле (3.1) возмущенное уравнение $f'(x, \delta) = 0$, для которого в $O \times U$ найдется такая кривая $(x(t), \delta(t))$, $t \in [0, 1]$, что: 1) $f'(x(t), \delta(t)) = 0$, 2) проекция $(x, \delta) \to \delta$, суженная на график данной кривой, имеет ровно $2r$ точек поворота (точек локальной негомеоморфности), 3) индекс Морса потенциала $V'(\cdot, \delta(t))$ в точке $x(t)$ равен нулю или единице, если $(x(t), \delta(t))$ — не точка поворота. Одноступенчатые каскадные бифуркации порождены одномерными сборками [5].

Легко заметить, что r-ступенчатая каскадная бифуркация порождается особыми точками типа A_{2r+1} [4, 5], которые появляются в конкретных задачах как примыкающие к простейшим многомерным особым точкам (при вырождении по многим модам). В этой связи представляет интерес следующая

Теорема 3.1. Если для $V(g, \delta)$ выполняются условия 1.1) — 1.3) и определяющая матрица H° положительно определена, то найдется сколь угодно близкий (в смысле (3.1), с любым m) к $V(x, \delta)$ функционал $V'(x, \delta)$, для которого ключевая функция имеет вид

$$\sum_{k=1}^{2r} a_k(\delta)\xi^k + o(|\xi|^{2r}), \ \xi \in R^1, \ r = 2^n \tag{3.2}$$
$$\alpha_1(0) = \ldots = \alpha_{2r-1}(0) = 0, \quad \alpha_{2r}(0) > 0$$

При этом индекс Морса любой достаточно близкой к нулю регулярной критической точки x для $V'(\cdot, \delta)$ совпадает при достаточно малых δ с индексом Морса отвечающей ей критической точки ξ для функции (3.2.).

Доказательство. Пусть $W(\xi, \delta)$ — ключевая функция для $V(x, \delta)$, $\xi \in R^n$. Из условия теоремы следует, что $W(\xi, 0)$ представляется в виде $(H^\circ x, x) + o(|x|^2)$, $x = (\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2)^T$, где H° — положительно-определенная матрица. Рассмотрим функцию

$$h(\xi, \varepsilon) = g(\xi_1^2, \xi_2^2 + \varepsilon\xi_1, \ldots, \xi_n^2 + \varepsilon\xi_{n-1})$$

и произведем замену переменных

$$\eta_{k-1} = \varepsilon\xi_{k-1} + \xi_k^2, \quad k = 2, \ldots, n; \quad \xi_n = \eta_n$$

В переменных η_j функция $h(\cdot, \varepsilon)$ полуквазиоднородна с весами $\{^1/_2, \ldots, {}^1/_2, {}^1/_4 q_n^{-1}\}$ [4] ($q_n = 2^{n-1}$):

$$h(\xi, \varepsilon) = \sum_{i \geqslant 2, \ j \geqslant 2} \mathring{h}_{i, j}\eta_{i-1}\eta_{j-1} + \mathring{h}_{1,1}\varepsilon^{-4(q_n-1)}\eta_n^{4q_n} + \tag{3.3}$$
$$+ 2\Sigma\mathring{h}_{1, j}\varepsilon^{-2(q_n-1)}\eta_{j-1}\eta_n^{2q_n} + \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n)$$

Здесь $\omega(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — комбинация степенных мономов, лежащих выше многогранника Ньютона [4] функции $h(\cdot, \varepsilon)$, т. е. грани, содержащей показатели мономов $\eta_1^2, \ldots, \eta_{n-1}^2, \eta_n^{4q_n}$.

Невырожденность главной квазиоднородной части вытекает из положительной определенности H°. А так как коранг матрицы Гессе в нуле функции (3.3) равен единице при $\varepsilon \neq 0$, то эта функция имеет в нуле особую точку типа A_k, $k = 4q_n - 1 = 2^{n+1} - 1$. Отсюда следует утверждение о форме (3.2). Совпадение индексов Морса в соответствующих критических точках для $V'(\cdot, \delta)$ и (3.2) следует из положительной определенности главной квазиоднородной части функции $h(\cdot, \varepsilon)$.

Определение 3.1. Сборкой размерности n называется полуоднородный [4] полином четвертого порядка от n переменных вида

$$W(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^4 + \sum a_{k_1, \ldots, k_n} \xi_1^{k_1} \circ \ldots \circ \xi_n^{k_n} \tag{3.4}$$

при условии, что квартичная часть (3.4) конечнократна (3^n-кратна). Во втором слагаемом (3.4) суммирование происходит по $k_1, \ldots, k_n$ при $0 \leqslant k_j \leqslant 2$, $\Sigma k_j \geqslant 4$.

Введение формы (3.4) мотивировано теорией нормальных форм полуквазиоднородных функций [4]. Множество полиномов вида (3.4) образует в пространстве полиномов аффинное подмногообразие M координаты точек которого задаются набором коэффициентов $a = \{a_{k_1, \ldots, k_n}\}$. Размерность M равна $3^n - n(n+1)(n+2)/6 - n(n+1)/2 - 1$.

Обозначим $k(a)$ наибольшую из кратностей особенностей типа A_k, примыкающих к (3.4) для заданного набора коэффициентов a.

Теорема 3.2. В M существует открытое всюду плотное подмножество, для любой точки a которого справедлива оценка

$$k(a) \leqslant n(n+1)/2 + n(n+1)(n+2)/6$$

Доказательство см. в [17, 18].

4. Примеры упругих систем с симметрией параллелепипеда. *Система эйлеровых стержней.* Простейшим примером упругой системы с симметрией параллелепипеда является набор одинаковых и одинаково сжатых плоских (эйлеровых [19, 20]) стержней [5]. Определяющая матрица здесь пропорциональна единице (потеря устойчивости мягкая), и следовательно, в закритической фазе допускается сосуществование устойчивых форм равновесия любого заранее заданного, но общих для всех ответвившихся форм типа.

Уравнение Кармана для упругой прямоугольной пластины. В [12] приведены численные результаты о двухмодовых бифуркациях решений уравнения Кармана для аксиально сжатой прямоугольной пластины при различных краевых условиях. Из этих результатов вытекает, что матрица H° условно положительна в R_+^2 и $\det H^\circ < 0$. В соответствии с теоремой 1.3 это означает, что здесь в закритической стадии допускается сосуществование устойчивых одномодовых (первого порядка) решений и не допускается существование устойчивых двухмодовых (второго порядка) решений.

Кирхгофов стержень с упругим подкреплением. Рассмотрим прямолинейный аксиально сжатый тонкий упругий стержень в пространстве [19—21], жестко заделанный на концах и подкрепленный упругой силой с потенциалом

$$\frac{\mu}{2}\left(\int_0^1 (r_2, g_3(s))\, ds\right)^2, \quad r_2 = (0, 1, 0)^T$$

$g_3(s)$ — орт, касательный к средней линии стержня в точке параметра длины s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, μ — параметр силы упругости подкрепления (реагирующей на отклонение конца стержня от оси r_3 в направлении r_2). Предполагается, что $\mu > 4\pi^2$. Пусть $g_1(s)$ и $g_2(s)$ — орты, направленные по главным осям инерции нормального сечения в точке средней линии параметра s, и пусть $r_1 = (1, 0, 0)^T$, $r_3 = (0, 0, 1)^T$.

Уравнение Кирхгофа [19—21] равновесной конфигурации стержня с указанным выше упругим подкреплением записывается следующим образом:

$$-A\, d\varkappa/ds + [A\varkappa, \varkappa] + \lambda [r_3, g^{-1} r_3] + \mu \langle r_3, g^{-1} r_2\rangle [r_3 g^{-1} r_2] = 0 \tag{4.1}$$

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 (\varphi(s), \psi(s))\, ds, \quad A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3)$$

Здесь λ — параметр силы аксиального сжатия, A — тензор упругости в поперечном сечении, для которого выполняется условие Е. Л. Николаи

$$A_3 < \frac{2}{1+\nu} \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$$

ν — коэффициент Пуассона, $0 < \nu < {}^1/_2$, $\varkappa(s)$ — угловая скорость движения сечения в зависимости от s, записанная в координатах по тройке $g_1(s)$, $g_2(s)$, $g_3(s)$; $g(s)$ — матрица, составленная из координат векторов $g_1(s)$, $g_2(s)$, $g_3(s)$ в базисной тройке $g_1(0)$, $g_2(0)$, $g_3(0)$; $[A\varkappa, \varkappa]$ — векторное произведение.

Жесткому закреплению на концах соответствует краевое условие

$$g(0) = g(1) = I \tag{4.2}$$

Потенциалом уравнения (4.1) при условии (4.2) является

$$ {}^1/_2\langle A\varkappa, \varkappa\rangle + \lambda\langle r_3, g^{-1}r_3\rangle + {}^1/_2\mu\langle r_3, g^{-1}r_2\rangle^2 \tag{4.3}$$

Если отождествить $\varkappa$ с матрицей

$$X = \begin{Vmatrix} 0 & -\varkappa_3 & \varkappa_2 \\ \varkappa_3 & 0 & -\varkappa_1 \\ -\varkappa_2 & \varkappa_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

то для матричного изображения $X(s)$ вектора $\varkappa(s)$ верно равенство $X(s) = g^{-1}(s)(dg/ds)(s)$ [22].

Пусть функционал $V(\varphi, \lambda, \mu, A)$ получен из (4.3) заменой

$$g = \exp(\varphi_3 r_3)\exp(\varphi_2 r_2)\exp(\varphi_1 r_1), \quad \exp(\varkappa) = \Sigma \frac{1}{k!} X^k$$

Положим E — пространство функций $\varphi(s)$, $s \in [0, 1]$ класса C^2 со значениями в $\mathbf{R}^3$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0; \quad F = C([0, 1], R^3), \quad \mathbf{H} = L_2([0, 1], R^3)$$

(пространство непрерывных и пространство суммируемых с квадратом функций на $[0, 1]$ со значениями в R^3). Функционал V инвариантен относительно инволюций J_1 J_2, где $J_1(\varphi) = -\varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2 - \varphi_3 r_3$, $J_2(\varphi) = \varphi_1 r_1 - \varphi_2 r_2 - \varphi_3 r_3$

При локализации параметров $\lambda = 4\pi^2 + \delta$, $A_1 = 1$, $A_2 = 4 + p$ модами бифуркации служат

$$e_1 = \sqrt{2}(\sin 2\pi s) r_1, \quad e_2 = \sqrt{2}(\sin \pi s) r_2$$

При этом

$$\alpha_1(\delta, p) = -\delta, \quad \alpha_2(\delta, p) = -\delta + p$$

Условие (1.6) здесь не выполняется. Элементарные вычисления (опущенные здесь из-за громоздкости) показывают, что $\overset{\circ}{h}_{1,2} < -\sqrt{\overset{\circ}{h}_{1,1}\overset{\circ}{h}_{2,2}}$. Следовательно, определяющая матрица в этом примере не является условно-положительной в $R_+{}^2$.

Сформулированное ранее ограничение $\mu > 4\pi^2$ «запирает» моду

$$e_3(\mu) = d(\mu)(\cos\theta(\mu)(s - {}^1/_2) - \cos{}^1/_2\,\theta(\mu))\, r_1$$

Здесь $d(\mu)$ — нормирующий множитель, а $\theta(\mu)$ находится из уравнения $\theta^2 = \mu(1 - 2\theta^{-1}\operatorname{tg}{}^1/_2\,\theta)$.

При локализации $\mu \approx 4\pi^2$ возникает ситуация трехмодовой бифуркации с симметрией параллелепипеда.

Автор благодарит рецензента за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Койтер В. Т.* Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1960. № 5. С. 99—110.
2. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
3. *Срубщик Л. С.* Выпучивание и послекритическое поведение оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Ростов. ун-та. 1981. 96 с.
4. *Арнольд В. И.* Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29. Вып. 2. С. 11—49.
5. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Кн. 2. М.: Мир. 1984. 285 с.
6. *Логинов Б. В., Треногин В. А.* О применении непрерывных групп в теории ветвления // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197. № 1. С. 36—39.

7. *Sattinger D. H.* Group representation on theory and branch points of nonlinear functional equations // SIAM J. Math. Anal. 1977. V. 8. № 2. P. 179—201.
8. *Golubitsky M.*, *Schaeffer D.* Imperfect bifurcation in the presence of symmetry // Communs. in Math. Phys. 1979. V. 67. № 3. P. 205—232.
9. *Poénaru V.* Singularites C^∞ en presence de symétrie // Lecture Notes in Math. 1976. V. 510. 174 p.
10. *Wall C. T. C.* A note on summetry of singularities // Bull. London Math. Soc. 1980. V. 12. № 3. P. 169—175.
11. *Siersma D.* Singularities of functions on boundaries, corners etc. // Quart. J. Math. 1981. V. 32. № 125. P. 119—127.
12. *Holder E. J.*, *Schaeffer D.* Boundary conditions and mode jumping in the Kàrmàn equations // SIAM J. Math. Anal. 1984. B. 15. No. 3. P. 446—458.
13. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. № 2. С. 203—206.
14. *Срубщик Л. С.*, *Юдович В. И.* О динамическом прощелкивании нелинейной упругой системы // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 426—435.
15. *Рапопорт Л. Б.* Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы в конусе // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 674—679.
16. *Сапронов Ю. И.* Угловые особенности в анализе закритического поведения упругих систем // Оптимальное управление, геометрия и анализ. Кемерово: 1986. С. 111.
17. *Гусейн-Заде С. М.*, *Нехорошев Н. Н.* О примываниях особенностей A_k к точкам страта μ-const особенности // Функцион. анализ и его приложения. 1983. Т. 17. Вып. 4. С. 82—83.
18. *Сапронов Ю. И.* Разрушение сферической симметрии в нелинейных вариационных задачах // Анализ на многообразиях и дифференциальные уравнения. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та. 1986. С. 88—111.
19. *Николаи Е. Л.* К задаче об упругой линии двоякой кривизны // Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. С. 45—277.
20. *Попов Е. П.* Нелинейные задачи статики тонких стержней. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 170 с.
21. *Илюхин А. А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наук. думка. 1979. 216 с.
22. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
29.XII.1986