Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 6, 1988

УДК 536.24:536.42

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСНОЙ ФОРМЫ ТЕЛ, ОБРАЗОВАВШИХСЯ ПРИ ЗАСТЫВАНИИ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

Корнев К. Г., Чугунов В. А.

Показано, что проблема отыскания равновесной формы тел, образовавшихся при застывании фильтрационного потока, сводится к задаче Римана со сдвигом. На примере одиночного тела строится и реализуется алгоритм нахождения его границы. Исследуются качественные свойства решения рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи. Замораживание влажных горных пород широко используется в строительстве различных сооружений [1]. Процесс застывания фильтрационного потока вокруг хладоисточников характеризуется тем, что с течением времени наступает состояние теплового баланса. При этом плотности тепловых потоков на границе раздела фаз становятся равными, что влечет равенство нулю скорости роста образующегося твердого тела. Таким образом, с ростом времени форма тела, формирующегося в процессе застывания фильтрационного потока, занимает свое предельное положение, называемое равновесным.

Предполагая, что процесс протекает в плоскости $z = x + iy$ фильтрация подчиняется закону Дарси, жидкость несжимаема, теплофизические характеристики фильтрующей среды постоянны, математическую модель изучаемого явления можно представить в виде

$$\mathbf{v} = -k\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad K_c \mathbf{v}\nabla t = a_+\Delta t \quad z \in D \tag{1.1}$$
$$\Delta t_k = 0, \quad z \in D_k$$

$$\mathbf{v} \to v_\infty, \quad t \to t_\infty, \quad |z| \to \infty \tag{1.2}$$

$$\lambda_+ \partial t/\partial n = \lambda_- \partial t_k/\partial n, \quad t = t_k = t_*, \quad z \in \partial D_k \tag{1.3}$$

$$t_k = t_0 < t_*, \quad z \in \Gamma_k \tag{1.4}$$

Здесь D — область фильтрации, D_k — область, занятая образовавшимся твердым телом, ∂D_k — его граница; $\mathbf{v}$ — скорость фильтрации, p — давление, k — коэффициент фильтрации, t, t_k — температуры в областях D и D_k соответственно, K_c — отношение теплоемкостей жидкости и фильтрующей среды, λ_+, λ_- — коэффициенты теплопроводности в областях D и D_k соответственно, a_+ — коэффициент температуропроводности в D, n — нормаль к поверхности ∂D_k, внешняя по отношению к области D_k, t_* — температура затвердевания потока, t_∞, v_∞ — значения температуры и скорости в бесконечно удаленной точке, Γ_k — заданная поверхность, на которой поддерживается заданная температура $t_0 < t_*$.

Следует отметить, что все дальнейшие рассуждения справедливы, если вместо (1.4) задается мощность хладоисточников.

2. Переход к задаче Римана со сдвигом. Первые два уравнения (1.1) позволяют стандартным образом ввести комплексный потенциал течения $W = \varphi + i\psi$, где φ — потенциал скорости, $\varphi = -kp$, ψ — функция тока.

Применим к третьему уравнению (1.1) преобразование Буссинеска, что эквивалентно конформному отображению физической плоскости z на плоскость потенциала W. При этом образовавшимся твердым телам будут соответствовать в плоскости W разрезы, параллельные оси φ. В результате указанное уравнение упрощается, и определение температуры t сводится к решению задачи

$$
\begin{aligned}
(2.1) \qquad & \frac{K_c}{a_+}\frac{\partial t}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2}; \quad t \to t_\infty, \quad |W| \to \infty \\
& t = t_*, \quad W \in L_k, \quad L_k = \bigcup_k \{\psi = \psi_k, \varphi \in [a_k, b_k]\}
\end{aligned}
$$

Параметры a_k, b_k определяются значениями потенциала скорости φ в критических точках обтекаемых тел. Следует заметить, что при заданных a_k, b_k система (2.1) становится замкнутой последним уравнением. Пользуясь (1.1) введем комплексный тепловой потенциал $W_k = -t_k + i\psi_k$, где ψ_k — функция тока тепла. Тогда первое условие (1.3) на неизвестной границе ∂D_k преобразуется к виду

$$(2.2) \qquad \lambda_+ / \lambda_- \,|\, \partial t/\partial\psi \,|\, |\, dW/dz \,| = |\, dW_k/dz \,|$$

Кроме того, в силу двух последних равенств (1.3) можно заключить, что искомая граница ∂D_k — изотермическая линия. Поэтому вектор плотности теплового потока направлен по нормали к ∂D_k. С другой стороны, кривая ∂D_k служит линией тока, следовательно, вектор скорости направлен по касательной к ∂D_k.

Учитывая сказанное и обозначая A_k, B_k точки разветвления и схода потока на обтекаемых телах, можно записать

$$(2.3) \qquad \arg\frac{\overline{dW}}{dz} = \arg\frac{\overline{dW}_k}{dz} + (-1)^n\frac{\pi}{2}, \quad n = \begin{cases} 0, & z \in \overset{\frown}{A_kB_k} \\ 1, & z \in \underset{\smile}{A_kB_k} \end{cases}$$

Полученные условия (2.2), (2.3) позволяют исходную задачу сформулировать как задачу сопряжения с разрывными коэффициентами на системе замкнутых контуров. Действительно, вводя функцию

$$\Phi = \begin{cases} \Phi^+ = dW/dz, & z \in D \\ \Phi^- = dW_k/dz, & z \in D_k \end{cases}$$

и учитывая (2.2), (2.3), приходим к следующей задаче: найти функции Φ^+, Φ^- — аналитические в областях D и $\bigcup_k D_k$ соответственно, удовлетворяющие на контуре $L = \bigcup_k \partial D_k$ линейному соотношению

$$(2.4) \qquad \Phi^- = G\Phi^+, \quad G = i\,(-1)^n\,(\lambda_+/\lambda_-)\,|\,\partial t/\partial\psi\,|$$

и условиям, следующим из (1.4).

Решение данной задачи в физической плоскости затруднительно, так как контуры, на которых заданы краевые условия, заранее не известны. Воспользуемся далее параметризацией, широко применяемой в теории струй идеальной жидкости [2, 3].

Рассмотрим плоскость канонической переменной ω. В ней линиям раздела фаз соответствуют канонические кривые, вид которых выбирается из соображений удобства дальнейших выкладок. Отобразим область D на внешность соответствующих контуров плоскости ω. Возможность такого отображения следует из [4]. Отображающую функцию обозначим $z^+(\omega^+)$. Область D_k отобразим на внутренность соответствующего контура $\partial\Omega_k$ функцией $z^-(\omega^-)$. Если $z \in \partial D_k$, то при приближении к этой точке из области D имеем $\omega^+ \to \xi \in \partial\Omega_k$, а если приближаться к z из D_k, то $\omega^- \to \eta \in \partial\Omega_k$. В общем случае $\xi \neq \eta$. Однако условие (2.4) позволяет установить связь $\eta = \eta(\xi)$ (называемую сдвигом [5, 6]).

Действительно, условие (2.4) можно переписать в виде

(2.5) $$\frac{dW_k}{d\omega^-}(\eta)\chi^-(\eta)=\frac{dW}{d\omega^+}(\xi)\chi^+(\xi)G(\xi),\quad \chi^\pm=\frac{d\omega^\pm}{dz}$$

Тогда

(2.6) $$\int\limits_{\eta_0}^{\eta}\frac{dW_k}{d\omega^-}(\eta)\,d\eta=\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{dW}{d\omega^+}(\xi)G(\xi)\,d\xi$$

Очевидно, что выражение (2.6) определяет сдвиг $\eta = \eta(\xi)$. Следует отметить, что функции $dW_k/d\omega^-$, $dW/d\omega^+$ могут быть найдены методами теории струй [2, 3].

Таким образом, исходная нелинейная задача (1.1)—(1.4) сведена к задаче Римана со сдвигом (2.4), (2.6). Техника ее решения хорошо разработана [5, 6]. Следует подчеркнуть, что такое сведение не устраняет нелинейности задачи, а переносит ее на определение параметров, связанных с геометрическими и физическими характеристиками задачи и возникающих при введении конформных отображений.

Из решения задачи (2.5) искомая граница ∂D_k находится простым интегрированием

(2.7) $$z=\int\limits_{\eta_0}^{\eta}\frac{d\eta}{\chi^-(\eta)}+C$$

3. Застывание фильтрационного потока вокруг осевого хладоисточника. Проиллюстрируем изложенную выше схему определения свободной границы на конкретном примере.

Начало координат плоскости z поместим в точку, где расположен источник холода мощности q, а ось x направим по потоку. Очевидно, что в данном примере образуется одиночное твердое тело, поэтому $k = 1$. Систему (1.1)—(1.4) приведем к безразмерному виду. С этой целью положим [7]

$$X=\frac{x}{l},\quad Y=\frac{y}{l},\quad \theta=\frac{t-t_*}{t_\infty-t_*},\quad \theta_1=\frac{2\pi\lambda_-(t_1-t_*)}{q}$$

$$\mathrm{Pe}=K_c\frac{v_\infty l}{a_+},\quad \mathbf{V}=\frac{\mathbf{v}}{v_\infty}$$

(l — характерный размер образовавшегося твердого тела, Pe — число Пекле). Методами теории размерности устанавливается, что

(3.1) $$l=\left[\frac{q}{2\pi\lambda_+(t_\infty-t_*)}\right]^2\frac{a_+}{K_c v_\infty}$$

Формула (3.1) может служить для предварительной оценки размеров образовавшегося тела.

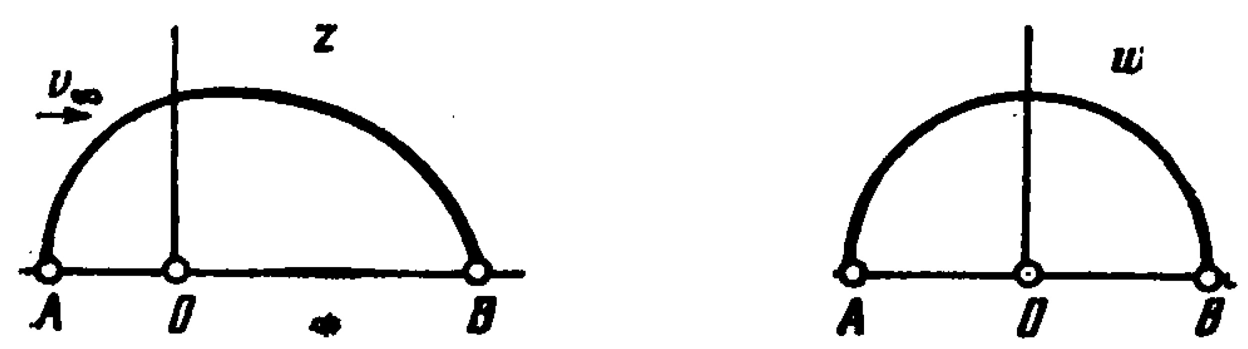
За область канонического переменного примем плоскость ω с единичным кругом, центр которого — в начале координат (соответствие точек указано на фиг. 1). Тогда комплексный потенциал течения в канонических переменных задается потенциалом Жуковского

(3.2) $$W = a(\omega^+ + 1/\omega^+)$$

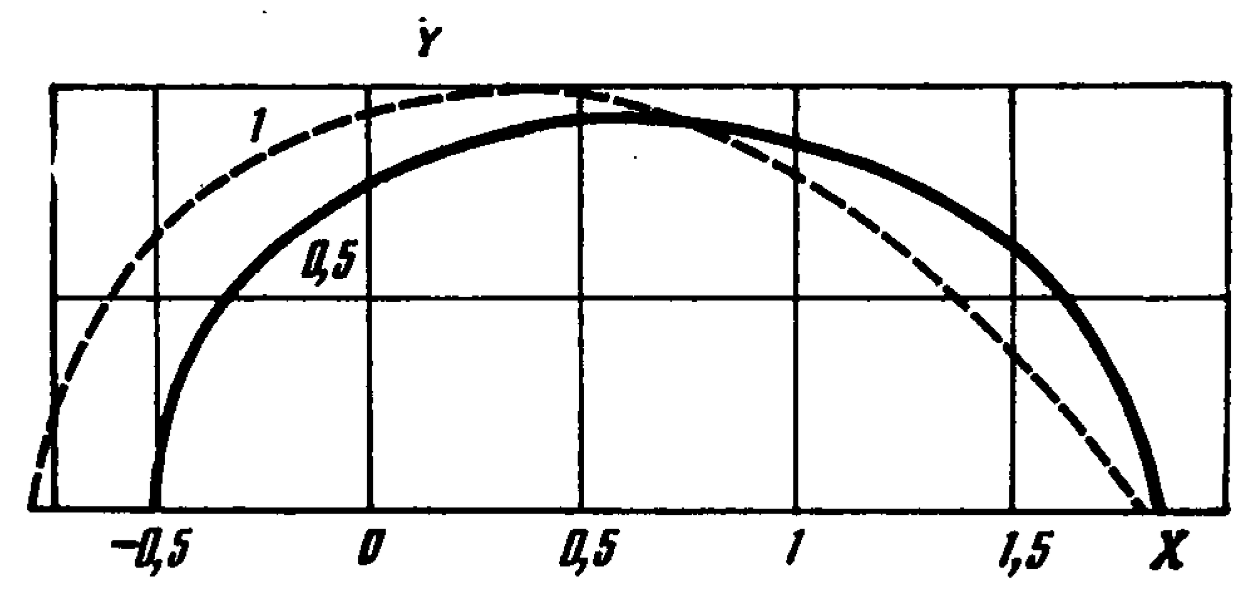
где a — параметр, подлежащий определению. Комплексный тепловой потенциал в канонических переменных находится методом особых точек [3]

(3.3) $$W_1 = -\ln\omega^-$$

Задача (2.1) для определения функций θ и G (последняя необходима



Фиг. 1



Фиг. 2

при формулировке задачи Римана) принимает вид

$$\begin{aligned}
&(3.4)\qquad \mathrm{Pe}\,\partial\theta/\partial\varphi = \Delta\theta;\quad \theta\to 1,\quad |W|\to\infty\\
&\qquad\qquad \theta = 0,\quad W\in L_1 = \{\psi = 0,\ \varphi\in[-2a, 2a]\}
\end{aligned}$$

Решение этой задачи существует и может быть найдено в виде рядов по функциям Матье и Эйри [8, 9].

Целесообразно отметить, что задача (3.4) эквивалентна интегральному уравнению [7,8]

$$\begin{aligned}
&(3.5)\qquad \pi = \int_{-1}^{1} \mu(\xi)\, K_0(a\,\mathrm{Pe}\,|t-\xi|)\exp[-a\,\mathrm{Pe}(\xi - t)]\,d\xi\\
&\qquad\qquad \mu = 2a\left.\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right|_{\psi=0,\ \varphi=2a\xi},\qquad t = \frac{\varphi}{2a}
\end{aligned}$$

($K_0(z)$ — функция Макдональда). Анализ этого уравнения позволяет получить асимптотические формулы (γ — постоянная Эйлера) [7, 10]

$$\begin{aligned}
&(3.6)\qquad \mu(\xi) = \frac{A}{2\pi\sqrt{1-\xi^2}} + O(4\beta^2\ln(2\beta))\\
&\qquad\qquad A = \pi\,[\gamma - \ln(4\beta)]^{-1} + O(4\beta^2\ln(2\beta));\quad \beta = a\,\mathrm{Pe}\to 0\\
&(3.7)\qquad \mu(\xi) = \sqrt{\frac{2\beta}{\pi(1+\xi)}} + \sqrt{\frac{2\beta}{\pi(1-\xi)}}\,\frac{e^{2\beta\xi}K_0(2\beta)}{2\pi} -\\
&\qquad\qquad -\frac{2}{\pi}\sqrt{2\beta}\,e^{-2\beta(1-\xi)}\int_0^\infty e^{-2\tau^2}\operatorname{erfc}\sqrt{(1-\xi)(\tau^2+2\beta)}\,d\tau + O(e^{-2\beta});\\
&\qquad\qquad \beta\to\infty
\end{aligned}$$

Расчеты показывают, что формула (3.7) применима в широком диапазоне изменения параметра β.

Уравнение для отыскания величины a вытекает из уравнения баланса тепла. Действительно, количество тепла, поглощенное источником, должно быть равно количеству тепла, отбираемому с границы ∂D_1. Следовательно, если воспользоваться граничными условиями на ∂D_1, то

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{Pe}}}\int_{\partial D_1}\frac{\partial\theta}{\partial n}\,ds = 1$$

Переходя в данном интеграле к координатам φ, ψ и вспоминая определение функции $\mu(\xi)$, последнее соотношение приводим к виду

$$(3.8)\qquad \int_{-1}^{1}\mu(\xi)\,d\xi = \pi\sqrt{\mathrm{Pe}}$$

т. е. получаем уравнение для неизвестной величины β.

Пользуясь принципом максимума для задач типа (3.4) [11] и уравнением (3.5), можно показать, что интеграл в левой части выражения (3.8) — монотонно возрастающая функция параметра β. Кроме того, из (3.6), (3.7) следует, что величина этого интеграла стремится к нулю при $\beta \to 0$ и к бесконечности при $\beta \to \infty$. Таким образом, уравнение (3.11) однозначно разрешимо относительно параметра β при любых значениях величины $\pi\sqrt{\mathrm{Pe}}$. Зная параметр β, находим и величину $a = \beta/\mathrm{Pe}$.

По формуле (2.6) определяем сдвиг

$$\eta = e^{i\alpha(\sigma)}, \quad \xi = e^{i\sigma}, \quad \alpha(\sigma) = \int_0^\sigma f(\tau)\sin\tau\, d\tau \tag{3.9}$$

$$f(\tau) = \pm\mu(\cos\tau)/\sqrt{\mathrm{Pe}}$$

где знак плюс берется при $0 \leqslant \tau < \pi$, минус — при $\pi \leqslant \tau \leqslant 2\pi$.

Очевидно, что подынтегральная функция в третьем выражении (3.9) положительна в рассматриваемом интервале $[0, 2\pi]$, а следовательно, зависимость $\alpha = \alpha(\sigma)$ монотонна и существует обратная к $\eta(\xi)$ функция, которую обозначим $\eta^{-1}(\xi)$.

Учитывая (3.2), (3.3), (3.9) равенство (2.5) запишем в виде ($\partial\Omega_1$ — окружность единичного радиуса)

$$\chi^-(\eta(\xi)) = \chi^+(\xi)G^*(\xi), \quad \xi \in \partial\Omega_1 \tag{3.10}$$

$$G^*(\xi) = f(\sigma)\sin\sigma e^{i(\alpha-\sigma)}$$

Следует отметить, что $G^*(\xi) = \eta'(\xi)$.

Таким образом, требуется определить функции χ^-, χ^+, аналитичные внутри и вне контура $\partial\Omega_1$ соответственно, удовлетворяющие на $\partial\Omega_1$ условию (3.10). Это известная задача Газемана [5, 6]. В случае $G^* = \eta'(\xi)$ она имеет единственное решение, определяемое равенствами

$$\ln\chi^- = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_1} \frac{F(\eta^{-1}(\xi))\,d\xi}{\xi-\omega} + \ln\frac{1}{a}, \quad \omega \overline{\in} \Omega_1 \tag{3.11}$$

$$\ln\chi^+ = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_1} \frac{F(\xi)\,d\xi}{\xi-\omega} + \ln\frac{1}{a}, \quad \omega \in \Omega_1$$

где функция $F(\xi)$ — решение однозначно разрешимого интегрального уравнения Фредгольма

$$F(\xi) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_1}\left[\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)-\eta(\xi)} - \frac{1}{\tau-\xi}\right]F(\tau)\,d\tau = \ln G^*(\xi) \tag{3.12}$$

Определив функции χ^-, χ^+, уравнение неизвестной границы ∂D_1, выписываем в квадратурах (2.7):

$$z = \int_0^\sigma \frac{ie^{i\tau}\,d\tau}{\chi^+(e^{i\tau})} + \int_0^1 \frac{d\tau}{\chi^-(\tau)} \tag{3.13}$$

Итак, установлено, что задача определения границы твердого тела, образующегося вокруг одиночного, осевого источника холода имеет единственное решение, определяемое равенством (3.3). Расчет координат точек искомого контура сводится к решению уравнения (3.12) и вычислению интегралов, входящих в формулы (3.11), (3.13).

Интегральное уравнение (3.12) решалось методом коллокаций. На фиг. 2 приводятся результаты расчетов по описанному алгоритму при Pe = 2, 3 (сплошная линия). Штриховой линией изображена кривая, построенная в [12]. Видно, что существенное различие построенных контуров состоит в наличии острой кромки у границы, найденной в [12]. В действительности, как показывают экспериментальные данные [13], граница образовавшегося тела должна быть гладкой. Присутствие острой кромки в решении [12] объясняется тем, что оно не учитывает требования отделимости от нуля плотности теплового потока в критических точках [7].

4. Оценка площади, занимаемой образовавшимся телом. Для оперативной оценки площади ледопородного тела оказывается полезным утверждение: из всех тел, ограниченных нулевой изотермой при заданном суммарном теплоотборе от фильтрационного потока, наибольшей площадью обладает круг.

Доказательство высказанного утверждения основано на свойствах конформных отображений. Обозначим $T(z)$ функцию, осуществляющую отображение внешности застывшего тела на внешность круга радиуса r, так что $T(\infty) = \infty$ и $dT/dz|_{\infty} = 1$. Величина r называется внешним радиусом изучаемой области в плоскости z [14]. Внешний радиус непосредственно связан с длиной разреза в плоскости W. Действительно, так как связь W с T задается соотношением $W = T + r^2/T$, а длина разреза в плоскости W равна $4a$, то, очевидно, $r = a$. Величина a, а следовательно, и r однозначно определяется заданием теплового расхода (3.8). Из теории изопериметрических неравенств известно [14], что $S \leqslant \pi r^2$, причем равенство достигается на круге. Этим завершается доказательство высказанного утверждения.

В заключение отметим, что в п. 3 рассмотрен лишь один частный пример. Предлагаемая в работе общая схема отыскания равновесной формы тел, образовавшихся при застывании фильтрационного потока, охватывает и случаи многих тел. Кроме того, данная схема позволяет не только построить алгоритм отыскания неизвестных границ, но и выявить ряд качественных свойств решения исследуемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян С. С., Красс Н. С., Гусева Б. В., Геворкян С. Г.* Количественная теория геокриологического прогноза. М.: Изд-во МГУ, 1987. 265 с.
2. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
3. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
4. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Гостехиздат, 1950. 540 с.
5. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
7. *Чугунов В. Д., Корнев К. Г.* Динамика ледопородных ограждений при замораживании фильтрующих горных пород // Инж.-физ. ж., 1986. Т. 51. № 2. С. 305—311.
8. *Рвачев В. Л.* Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 248—255.
9. *Хасанова А. Ю., Тумашев Г. Г.* Нагревание потенциального потока идеальной жидкости твердыми стенками // Изв. вузов. Математика. 1978. № 6. С. 109—116.
10. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
12. *Максимов В. А.* К определению формы тел, образовавшихся при застывании потока жидкой фазы // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 289—297.
13. *Прозоров Л. Б.* Замораживание при проходке шахтных стволов в условиях фильтрационного потока // Замораживание горных пород при проходке стволов шахт. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 138—193.
14. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.

Казань

Поступила в редакцию
11.II.1988