Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 6, 1988

УДК 536.24

МАССООБМЕН ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ПУЗЫРЯ

Берман В. С., Полянин А. Д.

Рассматривается массообмен пульсирующего пузыря с окружающей средой при больших и малых числах Пекле. Получена зависимость числа Шервуда от времени для произвольного периодического закона изменения радиуса пузыря. Подробно исследован случай синусоидальных колебаний.

1. Динамика пульсирующего пузыря. Сферически-симметричные колебания пузыря при различных условиях рассматривались во многих работах (например, [1—7]). Перечислим здесь основные свойства таких движений, которые понадобятся далее для анализа массообмена пульсирующего пузыря.

Радиальная компонента скорости жидкости вне пузыря описывается выражением

(1.1) $$v_r = R^2R'/r^2, \quad R' = dR/dt_*$$

Здесь r — радиальная координата, t_* — время, $R = R(t_*)$ — закон движения границы пузыря, который при достаточно общих предположениях определяется путем решения дифференциального уравнения [1—5]

(1.2) $$\rho\,(RR'' + {}^3/_2R'^2) + 4\mu R'/R = g_*(R) + \varphi_*(t_*)$$

где μ и ρ — динамическая вязкость и плотность окружающей жидкости.

Для завершения формулировки задачи уравнение (1.2) следует дополнить начальными условиями $R(0) = R_0$, $R'(0) = 0$, где R_0 — начальный радиус пузыря. (Иногда требуется найти периодическое решение уравнения (1.2).)

Функция g_* в (1.2) обычно выбирается в виде [1—5]

(1.3) $$g_*(R) = p_{g0}(R_0/R)^{3\gamma} - p_\infty - 2\sigma/R$$

где p_∞ — статическое давление на бесконечности, σ — поверхностное натяжение, γ — показатель адиабаты, p_{g0} — постоянная величина, имеющая размерность давления.

Для тонких упругих сферических оболочек (например, резиновый шарик), колеблющихся в жидкости или газе, из правой части выражения (1.3) при $\sigma = 0$ следует вычесть линейную функцию R [8].

При вынужденных колебаниях пузыря функция φ_* в (1.2) — периодическая (T_* — период колебания) и отвечает за переменность поля давления. В этом случае без ограничения общности можно считать, что выполняется условие

$$\langle\varphi_*\rangle \equiv \frac{1}{T_*}\int_0^{T_*}\varphi_*(t_*)\,dt_* = 0$$

В безразмерных переменных уравнение (1.2) принимает вид

(1.4) $$aa^{\cdot\cdot} + {}^3/_2a^{\cdot 2} + \beta a^{\cdot}/a = g(a) + \varphi(t)$$

$$a = \frac{R}{R_0}, \quad t = \frac{t_*}{R_0}\sqrt{\frac{p_s}{\rho}}, \quad a^{\cdot} = \frac{da}{dt}, \quad \beta = \frac{4\mu}{R_0\sqrt{\rho p_s}}$$

$$g(a) = g_*(R)/p_s, \quad \varphi(t) = \varphi_*(t_*)/p_s$$

где p_s — постоянная величина, выбранная за масштаб давления.

Свободные колебания пузыря в идеальной жидкости. При $\beta = 0$ и $\varphi = 0$ уравнение (1.4) интегрируется в квадратурах. После однократного интегрирования из (1.4) получим [3]

$$(1.5) \qquad a^{\cdot 2} = \frac{2}{a^3} G(a), \quad G(a) = \int_1^a g(x) x^2 \, dx$$

где $a \geqslant 1$ при $g(1) \geqslant 0$ и $a < 1$ при $g(1) < 0$.

Интегрируя (1.5), находим неявный вид зависимости изменения радиуса пузыря от времени

$$(1.6) \qquad t = \theta(a), \quad \theta(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \int_0^a \frac{x^{3/2}\, dx}{\sqrt{G(x)}} \right|$$

При выводе формул (1.5) и (1.6) были учтены начальные условия $a(0) = 1$, $a^{\cdot}(0) = 0$.

Далее считаем, что функция g монотонна и имеет единственный корень a_e: $g(a_e) = 0$, где $a_e > 1$ при $g(1) > 0$ и $0 < a_e < 1$ при $g(1) < 0$. В этом случае пузырь будет совершать колебания между экстремальными значениями $a = 1$ и $a = \bar{a}$, где $\bar{a} \neq 1$ — корень уравнения $G(\bar{a}) = 0$. Период колебания пузыря вычисляется по формуле $T = 2\theta(\bar{a})$, которая учитывает сразу обе возможные ситуации: $\bar{a} < a_e < 1$ и $1 < a_e < \bar{a}$.

Вынужденные колебания пузыря в вязкой жидкости вблизи положения равновесия. Рассмотрим теперь пульсации пузыря в поле переменного давления при $\max|\varphi| \ll 1$. В качестве масштаба длины в этом случае удобно взять равновесный радиус пузыря, который определяется путем решения алгебраического уравнения $g_*(R_0) = 0$. За масштаб давления выбираем величину $p_s = R_0 \, |\partial g_*/\partial R|_{R=R_0}$ (считается, что g_* — монотонно убывающая функция R).

При указанном определении безразмерных переменных уравнение (1.4) при $\varphi = 0$ в силу свойства $g(1) = 0$ имеет стационарное решение $a = 1$. Линеаризация (1.4) в окрестности этой точки приводит к уравнению для вынужденных колебаний пузыря

$$(1.7) \qquad y^{\cdot\cdot} + \beta y^{\cdot} + y = \varphi(t), \quad y = a - 1$$

При $\beta > 0$ любое решение уравнения (1.7) при $t \to \infty$ выходит на периодический режим с тем же периодом, который имеет функция φ. Для синусоидальных колебаний $\varphi = A \sin \omega t$ соответствующее решение имеет вид

$$(1.8) \qquad y = \frac{A}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2} \left[(1-\omega^2) \sin \omega t - \omega\beta \cos \omega t\right]$$

В этом частном случае y отличается от функции φ только сдвигом фазы.

Вынужденные колебания пузыря при низкочастотных и высокочастотных изменениях давления. При низкочастотных изменениях внешнего давления функция $\varphi(t)$ в (1.4) имеет большой период $T \gg 1$. В этом случае производными в уравнении (1.4) можно пренебречь. Поэтому зависимость радиуса пузыря от времени находится путем решения алгебраического уравнения $g(a) = -\varphi(t)$.

Высокочастотные колебания давления соответствуют малым значениям периода функции φ. При $T \ll 1$ для анализа удобно использовать новые переменные $\tau = t/T$, $x = a^{5/2}$, которые позволяют записать уравнение (1.4) в следующей форме:

$$(1.9) \qquad \frac{d^2x}{d\tau^2} + T\beta x^{-4/5} \frac{dx}{d\tau} = \frac{5}{2} T^2 x^{1/5} \left[g(x^{2/5}) + \psi(\tau)\right]$$

Здесь $\psi(\tau) \equiv \varphi(t)$ — функция с периодом единица: $\psi(\tau) = \psi(\tau + 1)$.

Периодическое решение уравнения (1.9) строим при помощи регулярного разложения по малому параметру T. Учитывая свойство $g(1) = 0$, можно получить формулу $x \approx 1 + T^2 x_2$, где x_2 — периодическое решение уравнения $dx^2{}_2/d\tau^2 = {}^5/_2\psi(\tau)$. Отсюда для синусоидальных колебаний $\varphi = A \sin \omega t$ при $\omega = 2\pi/T \to \infty$ имеем закон движения границы пузыря $a = x^{2/5} \approx 1 - A\omega^{-2} \sin \omega t$.

Уравнения динамики сферического пузыря в вязкой жидкости, интегрируемые в квадратурах. Опишем теперь некоторые интегрируемые в квадратурах уравнения вида (1.4) при $\varphi = 0$ и $\beta \neq 0$.

Используя стандартную подстановку $a^{\cdot} = u$ ($a^{\cdot\cdot} = u\,du/da$) понизим порядок уравнения (1.4). Переходя далее к новым переменным $z = \sqrt{a}$, $w = a^{3/2} u$ ($u = a^{\cdot}$), получим уравнение Абеля

(1.10) $\qquad wdw/dz = -2\beta w + 2z^5 g(z^2)$

В силу начальных условий $a = 1$, $a^{\cdot} = 0$ при $t = 0$ искомая величина должна удовлетворять условию $w = 0$ при $z = 1$.

В частном случае, когда функция g_* задана формулой (1.3) при $\sigma = 0$, $p_\infty = 0$, уравнение (1.10) принимает вид

(1.11) $\qquad wdw/dz = -2\beta w + 2z^{5-6\gamma}$

Здесь в качестве характерного масштаба давления выбрана величина $p_s = p_{g0}$. Уравнение (1.11) является уравнением с разделяющимися переменными при $\gamma = {}^5/_6$ и однородным уравнением при $\gamma = {}^2/_3$. В изотермическом случае при $\gamma = 1$ из (1.11) заменой $\zeta = 1/z$, $v = w + 2\beta z$ можно получить линейное уравнение $2d\zeta/dv = -v\zeta + 2\beta$. В указанных случаях уравнение (1.11) легко интегрируется. Кроме того, решение уравнения (1.11) при $\gamma = {}^{11}/_{12}$ и $\gamma = {}^7/_6$ можно выразить через функции Бесселя порядка ${}^1/_3$.[1]

2. Постановка задачи о массообмене пульсирующего пузыря. Рассмотрим теперь диффузию растворенного в жидкости вещества к поверхности пульсирующего пузыря.

Известно [1, 2], что изменение объема пузыря, обусловленное процессом диффузии, происходит очень медленно. Поэтому зависимость радиуса пузыря от времени будем считать заданной функцией $R = R(t_*)$, удовлетворяющей условию $R_{\min} < R < R_{\max}$, где $R_{\min}/R_{\max} = O(1)$. Колебания пузыря могут вызываться, например, периодическим изменением внешнего давления (конкретные примеры такого рода были рассмотрены в п. 1).

Предполагается, что на поверхности пузыря и вдали от него концентрация принимает постоянные значения, равные нулю и C_∞, а наличием диффундирующего вещества внутри пузыря можно пренебречь.

Распределение концентрации в жидкости описывается уравнением конвективной диффузии и граничными условиями

(2.1) $$\frac{\partial C}{\partial t_*} + v_r \frac{\partial C}{\partial r} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial C}{\partial r}\right)$$

(2.2) $$r = R(t_*),\quad C = 0;\quad r \to \infty,\quad C \to C_\infty$$

Здесь C — концентрация в сплошной фазе, D — коэффициент диффузии, v_r — радиальная компонента скорости жидкости, которая определяется формулой (1.1).

Относя в (2.1) и (2.2) радиальную координату r к радиусу пузыря R приходим к задаче с неподвижными границами, которая в безразмерных переменных имеет вид

(2.3) $$a^2 \frac{\partial c}{\partial t} + a \frac{da}{dt}\left(\frac{1}{\xi^2} - \xi\right)\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{1}{P} \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2 \frac{\partial c}{\partial \xi}\right)$$

(2.4) $$\xi = 1,\quad c = 1;\quad \xi \to \infty,\quad c \to 0$$

$$\xi = \frac{r}{R(t_*)},\quad t = \frac{t_*}{T_*},\ c = \frac{C_\infty - C}{C_\infty},\quad P = \frac{R_0^2}{T_* D}$$

Здесь R_0 — начальный радиус пузыря, P — число Пекле, T_* — характерное время пульсаций (для свободных колебаний пузыря за T_* можно принять величину $R_0\sqrt{\rho/p_s}$, см. уравнение (1.4)).

---

[1] *Полянин А. Д.* Уравнения Абеля и связанные с ними уравнения нелинейной механики, интегрируемые в квадратурах. Препринт № 271. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1986. 68 с.

Уравнение (2.3) и граничные условия (2.4) следует дополнить начальным условием. Представляет интерес рассмотреть две ситуации.

Пусть при $t \leqslant 0$ пульсации отсутствуют. Соответствующее стационарное решение задачи (2.3), (2.4) при $a = 1$ дается выражением $c = 1/\xi$. В этом случае начальное условие имеет вид

$$t = 0, \quad c = 1/\xi \tag{2.5}$$

Для периодических колебаний пузыря имеет смысл искать периодические решения задачи (2.3), (2.4).

Наиболее важная характеристика массообмена пузыря с окружающей жидкостью — число Шервуда — вычисляется по формуле

$$\mathrm{Sh} = I/(4\pi RDC_\infty) = -(\partial c/\partial\xi)_{\xi=1} \tag{2.6}$$

где I — размерная величина полного диффузионного потока.

Построим асимптотические решения задачи о массообмене пульсирующего пузыря с окружающей средой при больших и малых числах Пекле.

3. Большие числа Пекле ($P \gg 1$). В уравнении (2.3) перейдем от переменных t, ξ к новым переменным t, η, где зависимость $\eta = \eta\,(t, \xi)$ будет определена далее. В результате имеем

$$\begin{aligned} &a^2 \frac{\partial c}{\partial t} + \left\{a^2 \frac{\partial\eta}{\partial t} + a\frac{da}{dt}\left(\frac{1}{\xi^2} - \xi\right)\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right\}\frac{\partial c}{\partial\eta} = \\ &= \frac{1}{P}\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\xi^2\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial c}{\partial\eta}\right)\end{aligned} \tag{3.1}$$

Потребуем, чтобы функция η обращала в нуль выражение в фигурных скобках. Это условие приводит к линейному уравнению в частных производных первого порядка для η, частное решение которого дается формулой

$$\eta = a\,(\xi^3 - 1)^{1/3}, \quad a = a\,(t) \tag{3.2}$$

Подставляя зависимость (3.2) в (3.1) и (2.4), получим следующие уравнение и граничные условия:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{P}\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\eta^3 + a^3)^{4/3}}{\eta^2}\frac{\partial c}{\partial\eta}\right] \tag{3.3}$$

$$\eta = 0, \quad c = 1; \quad \eta \to \infty, \quad c \to 0 \tag{3.4}$$

Асимптотическое решение при $P \to \infty$, описывающее процесс на всем интервале $0 \leqslant t < \infty$, будем строить на основе двухмасштабного временного разложения [9, 10]. Для этого введем дополнительную переменную

$$\tau = t/P \tag{3.5}$$

и будем искать распределение концентрации во всей области $0 \leqslant \eta < \infty$ в виде разложения по обратным степеням числа Пекле

$$c = c_0\,(\eta, t, \tau) + P^{-1}c_1\,(\eta, t, \tau) + \ldots, \quad c_1/c_0 = O\,(1) \tag{3.6}$$

Введение двух разных масштабов времени увеличивает число независимых переменных. Поэтому в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции производную по времени следует вычислять по формуле $\partial/\partial t = \partial/\partial t + P^{-1}\partial/\partial\tau$.

Учитывая сказанное, подставим разложение (3.6) в (3.3). Приравнивая далее коэффициенты при одинаковых степенях P, получим уравнения

(3.7) $\partial c_0/\partial t = 0 \quad (\eta = 0,\ c_0 = 1;\ \eta \to \infty,\ c_0 \to 0)$

(3.8) $$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(\eta^3 + a^3)^{4/3}}{\eta^2}\frac{\partial c_0}{\partial \eta}\right] - \frac{\partial c_0}{\partial \tau}$$

Уравнения (3.7) с соответствующими граничными и начальными условиями оказывается недостаточно для определения главного члена разложения концентрации. Из (3.7) можно установить лишь общий вид искомого решения

(3.9) $c_0 = c_0(\eta, \tau)$

Для получения необходимой дополнительной информации о функции c_0 воспользуемся уравнением для следующего члена разложения c_1 (3.8). Учитывая (3.9), находим общее решение уравнения (3.8)

(3.10) $$c_1(\eta, t, \tau) = t\left\{\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\eta^2}\left[\frac{1}{t}\int_0^t (\eta^3 + a^3)^{4/3}\,dt\right]\frac{\partial c_0}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial c_0}{\partial \tau}\right\} + B(\eta, \tau)$$

Для равномерной пригодности разложения (3.6) на всем интервале $0 \leqslant t < \infty$ необходимо, чтобы отношение c_1/c_0 было ограниченным при $t \to \infty$. Это условие, как следует из выражений (3.9) и (3.10), выполняется только в том случае, если нулевой член разложения c_0 удовлетворяет уравнению

(3.11) $$\frac{\partial c_0}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{f(\eta)}{\eta^2}\frac{\partial c_0}{\partial \eta}\right]$$
$$\eta = 0,\quad c_0 = 1;\quad \eta \to \infty,\quad c_0 \to 0$$

где положительная функция f определяется так:

(3.12) $$f(\eta) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t (\eta^3 + a^3)^{4/3}\,dt, \qquad a = a(t)$$

Уравнение (3.11) имеет «стационарное» решение

(3.13) $$c_0^{st} = \frac{J(\eta)}{J(0)}, \qquad J(\eta) = \int_\eta^\infty \frac{\eta^2}{f(\eta)}\,d\eta$$

Соответствующее число Шервуда, которое вычисляется по формуле (2.6) с учетом выражений (3.2), (3.13), равно

(3.14) $\mathrm{Sh} = a^3(t)/[f(0)J(0)]$

Важно отметить, что при любом начальном условии решение уравнения (3.11) при $\tau \to \infty$ выходит на «стационарный» режим (3.13). Для периодических колебаний пузыря зависимость (3.13), (3.2) отвечает периодическому решению задачи.

В случае (2.5) начальное условие для главного члена разложения концентрации имеет вид

(3.15) $\tau = 0,\quad c_0 = (\eta^3 + 1)^{-1/3}$

Рассмотрим теперь некоторые примеры.

1°. Пусть $a(t) \to 1$ при $t \to \infty$. Это условие выполняется, например, когда колебания пузыря происходят только на ограниченном интервале времени. (Указанная ситуация реализуется при прохождении ударной волны через жидкость.) В этом случае из формулы (3.12) можно получить

(3.16) $f(\eta) = (\eta^3 + 1)^{4/3}$

Подставляя (3.16) в выражение (3.13), находим $c_0 = (\eta^3 + 1)^{-1/3}$. Видно, что это решение удовлетворяет начальному условию (3.15).

Число Шервуда вычисляем по формуле (3.14) с учетом (3.16). В результате приходим к простой зависимости

$$\mathrm{Sh} = a^3(t) \tag{3.17}$$

2°. Для периодических колебаний пузыря соотношение (3.12) упрощается и принимает вид

$$f(\eta) = \frac{1}{T}\int_0^T (\eta^3 + a^3)^{4/3}\,dt \tag{3.18}$$

где T — период функции a.

Рассмотрим пульсации пузыря с малой амплитудой

$$a(t) = 1 + \delta(t); \quad \max|\delta| \ll 1, \quad \langle\delta\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \delta\,dt = 0 \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в (3.14), найдем функции и интегралы, входящие в формулу (3.14):

$$f(\eta) = (1 + \eta^3)^{4/3}\left\{1 + \frac{2(3 + 2\eta^3)}{(1 + \eta^3)^2}\langle\delta^2\rangle\right\}, \quad f(0) = 1 + 6\langle\delta^2\rangle$$

$$J(0) = 1 - \frac{9}{7}\langle\delta^2\rangle$$

В результате для числа Шервуда и среднего числа Шервуда за период колебания пузыря имеем

$$\mathrm{Sh} = 1 + 3\delta + 3\delta^2 - \frac{33}{7}\langle\delta^2\rangle + o(\langle\delta^2\rangle) \tag{3.20}$$

$$\langle\mathrm{Sh}\rangle = 1 - \frac{12}{7}\langle\delta^2\rangle + o(\langle\delta^2\rangle) \tag{3.21}$$

В случае синусоидального закона изменения радиуса от времени, который реализуется при вынужденных колебаниях пузыря (см. п. 1) и соответствует $\delta = \varepsilon \sin t$, $\varepsilon \ll 1$ в (3.19), для среднего числа Шервуда (3.21) получим $\langle\mathrm{Sh}\rangle = 1 - {}^6/_7\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$.

Необходимо отметить любопытное обстоятельство. Из формулы (3.21) следует, что при малых периодических пульсациях пузыря среднее число Шервуда меньше единицы. В то же время можно показать, что средний (за период колебания) полный диффузионный поток на поверхность колеблющегося пузыря будет больше, чем на поверхность пузыря, находящегося в покое. (Это утверждение доказывается умножением правой части формулы (3.20) на a^2 и последующим осреднением по периоду колебаний.)

4. Малые числа Пекле ($P \ll 1$). Построим теперь приближенное аналитическое решение задачи (2.3)—(2.5) методом сращиваемых асимптотических разложений [9—11] по малому числу Пекле.

При $\xi = O(P^{-1/2})$ члены в правой части уравнения (2.3) будут того же порядка, что и в левой. Поэтому следует выделить две области: внутреннюю $\Omega^{(i)} = \{1 \leqslant \xi \leqslant O(P^{-1/2})\}$ и внешнюю $\Omega^{(e)} = \{O(P^{-1/2}) \leqslant \xi\}$. Во внутренней области сохраним прежние переменные ξ, t, а во внешней введем вместо ξ сжатую радиальную координату

$$y = P^{1/2}\xi \tag{4.1}$$

Внутреннее и внешнее разложения концентрации ищем соответственно в виде

$$(4.2)\qquad c=\frac{1}{\xi}+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^{(i)}(P)\,c_n^{(i)}(\xi,t)\quad \text{в } \Omega^{(i)}$$

$$(4.3)\qquad c=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^{(e)}(P)\,c_n^{(e)}(y,t)\quad \text{в } \Omega^{(e)}$$

$$(\varepsilon_{n+1}^{(i)}/\varepsilon_n^{(i)}\to 0,\quad \varepsilon_{n+1}^{(e)}/\varepsilon_n^{(e)}\to 0\quad \text{при } P\to 0)$$

Члены внутреннего разложения (4.2) находятся из уравнения (2.3) и удовлетворяют однородным граничным и начальным условиям (это следует из (2.4) и (2.5)):

$$(4.4)\qquad \xi=1,\quad c_n^{(i)}=0;\quad t=0,\quad c_n^{(i)}=0\quad (n=1,2,\ldots)$$

Внешнее разложение определяется из уравнения

$$(4.5)\qquad a^2\frac{\partial c}{\partial t}+a\frac{da}{dt}\left(\frac{P^{3/2}-y^3}{y^2}\right)\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial c}{\partial y}\right)$$

$$y\to\infty,\quad c_n^{(i)}\to 0\qquad (n=1,2,\ldots)$$

которое получено из (2.3) заменой (4.1).

Из условия сращивания главных членов внешнего (4.3) и внутреннего (4.2) разложений с учетом (2.5), (4.1) находим явный вид коэффициента $\varepsilon_1^{(e)}=P^{1/2}$, а также начальное и граничные условия для $c_1^{(e)}$:

$$(4.6)\qquad t=0,\quad c_1^{(e)}=1/y;\quad y\to 0,\quad c_1^{(e)}\to 1/y;\quad y\to\infty,\quad c_1^{(e)}\to 0$$

Подставляя (4.3) в (4.5) имеем уравнение для $c_1^{(e)}$:

$$(4.7)\qquad a^2\frac{\partial c_1^{(e)}}{\partial t}-ya\frac{da}{dt}\frac{\partial c_1^{(e)}}{\partial y}=\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial c_1^{(e)}}{\partial y}\right)$$

Переходя в (4.6), (4.7) от переменных y, t, $c_1^{(e)}$ к новым переменным z, t, u, где

$$(4.8)\qquad z=a(t)y,\quad u=zc_1^{(e)}$$

получим задачу для обычного параболического уравнения

$$\partial u/\partial t=\partial^2 u/\partial\ ^2;\quad t=0,\quad u=1;\quad z=0,\quad u=a(t)$$

решение которой хорошо известно. Поэтому главный член внешнего разложения определяется выражением

$$(4.9)\qquad c_1^{(e)}=\frac{1}{z}\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{a(t')}{(t-t')^{3/2}}\exp\left[-\frac{z^2}{4(t-t')}\right]dt'$$

При $y\to 0$ из формулы (4.9) с учетом (4.8) имеем

$$(4.10)\qquad y\to 0,\quad c_1^{(e)}=\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{da}{dt'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}+\frac{1}{2}ya\frac{da}{dt}+o(y)$$

Внесем (4.10) в (4.3) и перейдем к внутренней переменной $\xi=P^{-1/2}y$. Из условия сращивания находим коэффициенты ряда (4.2):

$$(4.11)\qquad \varepsilon_1^{(i)}=P^{1/2},\quad \varepsilon_2^{(i)}=P$$

Подставим разложение (4.2), (4.11) в уравнение (2.3) и выделим члены при одинаковых степенях P. В результате получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial c_1^{(i)}}{\partial\xi}\right)=0;\quad \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial c_2^{(i)}}{\partial\xi}\right)=a\frac{da}{dt}\frac{\xi^3-1}{\xi^2}$$

общие решения которых, удовлетворяющие граничным условиям (4.4), даются выражениями

$$c_1^{(i)} = E(t)\left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \tag{4.12}$$

$$c_2^{(i)} = F(t)\left(\frac{1}{\xi} - 1\right) + \frac{1}{2} a \frac{da}{dt}\left(\xi - \frac{1}{\xi^2}\right) \tag{4.13}$$

Из сращивания рядов (4.2) и (4.3) с учетом (4.10) и (4.12) находим

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{da}{dt'} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \tag{4.14}$$

Используя формулу (4.12), можно установить, что $\varepsilon_2^{(e)} = P$. Это позволяет стандартным образом сформулировать задачу для функции $c_2^{(e)}$, которая отличается от задачи (4.7), (4.6), только начальным ($t = 0$, $c_2^{(e)} = 0$) и граничным ($y \to 0$, $c_2^{(e)} \to E(t)/y$) условиями. Решение задачи для функции $c_2^{(e)}$ имеет вид

$$c_2^{(e)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a(t')E(t')}{(t-t')^{3/2}} \exp\left[-\frac{a^2(t)y^2}{4(t-t')}\right] dt'$$

Разложим это выражение при $y \to 0$ и перейдем к внутренней переменной. В результате сращивания получим граничное условие при $\xi \to \infty$ для $c_2^{(i)}$, которое дает возможность найти, что

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d}{dt'}[a(t')E(t')] \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \tag{4.15}$$

Подставляя выражения (4.12)—(4.15) в формулу (2.6), находим зависимость числа Шервуда от времени

$$\mathrm{Sh} = 1 + P^{1/2}E(t) + P[F(t) - {}^3/_2 a\,da/dt] + o(P) \tag{4.16}$$

В качестве примера рассмотрим синусоидальный закон колебаний пузыря

$$a(t) = 1 + \alpha \sin t, \quad \alpha = O(1) \tag{4.17}$$

Внося (4.17) в подынтегральное выражение (4.14), получим

$$E(t) = \alpha\sqrt{2}\,[C(\sqrt{t})\cos t + S(\sqrt{t})\sin t] \tag{4.18}$$

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos\zeta^2\, d\zeta, \quad S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin\zeta^2\, d\zeta$$

$$(C(\infty) = S(\infty) = {}^1/_2)$$

Из формул (4.16), (4.18) имеем периодическую зависимость числа Шервуда от времени при $t \to \infty$:

$$\mathrm{Sh} = 1 + P^{1/2}\sin(t + {}^1/_4\pi) + O(P);$$

т. е. в этом приближении диффузионный поток на пузырь имеет сдвиг по фазе, равный $\pi/4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Перник А. Д.* Проблемы кавитации. Л.: Судостроение, 1966. 439 с.
2. *Plesset M. S., Prosperetti A.* Bubble dynamics and cavitation // Annual Review of Fluid Mechanics. Palo Alto, California: Annual Revs Inc., 1977. V. 9. P. 145—185.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.

4. *Акуличев В. А.* Кавитация в криогенных и кипящих жидкостях. М.: Наука, 1978. 279 с.
5. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
6. *Воротникова М. И., Солоухин Р. И.* Расчет пульсаций газовых пузырьков в несжимаемой жидкости под действием периодически изменяющегося давления // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 1. С. 34—39.
7. *Хабеев Н. С.* Резонансные свойства паровых пузырьков // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 4. С. 696—703.
8. *Гегузин Я. Е.* Пузыри. М.: Наука, 1985. 173 с.
9. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
10. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
11. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.XI.1987
