Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 6, 1988

УДК 532.529

ВЛИЯНИЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО МАССОВОГО ПОТОКА С ПОВЕРХНОСТИ ЧАСТИЦЫ НА СИЛУ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Головин А. М., Роговой А. Ф.

Рассматривается стационарное поле скоростей движения газовой среды, вызванное однородным радиальным вдувом с поверхности сферической частицы вблизи стенки, в стоксовом приближении. В бисферических координатах представлено выражение для функции тока. Получена формула для силы, действующей на сферическую частицу при произвольном массовом потоке с ее поверхности, обобщающая ранее известные результаты [1, 2]. Для случая сферически-симметричного вдува с поверхности частицы получено выражение для силы, действующей на частицу, и исследованы асимптотические формулы на малых и больших расстояниях от стенки.

Рассматривается аналогичная задача о силах взаимодействия двух сферических частиц одинакового радиуса с однородным вдувом одинаковой интенсивности с их поверхностей, что эквивалентно задаче о взаимодействии сферической частицы со свободной поверхностью. Получено общее выражение для силы взаимодействия и ее асимптотики на малых и больших расстояниях.

1. Постановка задачи. Испарение сферической частицы вблизы твердой или свободной поверхности, вызываемое различными процессами, происходящими в газовой среде, на поверхности и внутри частицы, в некоторых случаях может считаться близким к сферически-симметричному.

Рассмотрим, например, частицу с внутренним тепловыделением, расположенную вблизи стенки с однородной температурой T_w, равной температуре газовой среды вдали от частицы. Предположим, что тепловой поток с поверхности частицы обусловлен молекулярной теплопроводностью и излучением, причем будем считать, что длина пробега излучения существенно превышает расстояние h от центра частицы до стенки. Пусть теплопроводность газа, окружающего частицу, пренебрежимо мала по сравнению с теплопроводностью частицы, а потому перепады температуры внутри частицы считаются малыми по сравнению с перепадами температуры в газовой среде.

В квазистационарном приближении скорость массового потока с поверхности частицы будет определяться балансом потоков энергии с ее поверхности:

$$\rho L w = \varkappa \partial T/\partial n + \rho L w_0, \quad \rho L w_0 = {}^1/_3 \rho' k a + \varepsilon\sigma (T_w{}^4 - T_a{}^4)$$

Здесь ρ, ρ' — плотности газовой среды и частицы соответственно, L — удельная теплота испарения, $\varkappa$ — коэффициент молекулярной теплопроводности, $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к элементу поверхности частицы, k — интенсивность внутреннего тепловыделения, a — радиус частицы, T_a — температура ее поверхности, σ — постоянная Стефана — Больцмана, ε — эффективная степень черноты поверхности частицы.

Отсюда видно, что расчет массового потока с поверхности частицы требует решения соответствующей тепловой задачи, кроме случаев достаточно интенсивного внутреннего тепловыделения или значительного радиационного потока на поверхность частицы, когда можно принять $w \approx w_0$, что выполняется при условии

$$\rho L w_0 \gg (\varkappa/d) \mid T_w - T_a \mid$$

Здесь d — характерный масштаб изменения температуры в окрестности частицы: $d = a$, если $h \gg a$, и $d = h - a$, если $h - a \ll a$.

Аналогичные оценки могут быть получены и для частицы с внутренним тепловыделением вблизи свободной поверхности.

В цилиндрической системе координат с осью z, проходящей через центр ($z = h$) сферической частицы перпендикулярно стенке ($z = 0$), стационарное осесимметричное течение при пространственно однородном вдуве с поверхности частицы в стоксовом приближении описывается уравнением и соответствующими граничными условиями

(1.1) $$D^4\psi = 0 \quad \left(D^2 = r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$r^2 + (z-h)^2 = a^2, \quad \mathbf{v} = w_0\mathbf{n}; \quad z = 0, \quad \mathbf{v} = 0$$

$$r^2 + z^2 \to \infty, \quad \mathbf{v} = 0$$

$$\left(v_r = -\frac{a^2 w_0}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{a^2 w_0}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

Введем бисферические координаты ξ, η, φ, связанные с цилиндрическими r, z, φ соотношениями

$$\frac{z}{a} = \frac{c\,\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi - \mu}, \quad \frac{r}{a} = \frac{c\sin\eta}{\mathrm{ch}\,\xi - \mu}, \quad \mu = \cos\eta$$

Здесь φ — азимутальный угол, единый для цилиндрической и бисферической систем координат, c — параметр системы координат, определяемый отношением расстояния h от центра частицы до стенки к радиусу a частицы

$$c = \mathrm{sh}\,\xi_0, \quad h/a = \mathrm{ch}\,\xi_0$$

где $\xi = \xi_0$ ($\xi_0 > 0$) — уравнение поверхности частицы в бисферической системе координат.

Краевая задача (1.1) для определения функции тока в бисферических координатах принимает вид

(1.2) $$D^4\psi = 0$$

$$\left(D^2 = \frac{\mathrm{ch}\,\xi - \mu}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\mathrm{ch}\,\xi - \mu)\frac{\partial}{\partial\xi} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}(\mathrm{ch}\,\xi - \mu)\frac{\partial}{\partial\mu}\right]\right)$$

$$\psi(\xi_0, \mu) = -\frac{(\mathrm{ch}\,\xi_0 - 1)(1+\mu)}{\mathrm{ch}\,\xi_0 - \mu}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\xi}(\xi_0, \mu) = 0$$

$$\psi(0, \mu) = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}(0, \mu) = 0; \quad \xi \to 0, \quad \mu \to 1, \quad \psi = 0$$

Общее решение уравнения (1.2) следующее:

(1.3) $$\psi(\xi, \mu) = \frac{1}{(\mathrm{ch}\,\xi - \mu)^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi)V_n(\mu)$$

$$U_n(\xi) = A_n\,\mathrm{ch}\left(n - \frac{1}{2}\right)\xi + B_n\,\mathrm{sh}\left(n - \frac{1}{2}\right)\xi +$$
$$+ C_n\,\mathrm{ch}\left(n + \frac{3}{2}\right)\xi + D_n\,\mathrm{sh}\left(n + \frac{3}{2}\right)\xi$$

$$V_n(\mu) = P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu) - 2\delta_{n0}, \quad \delta_{n0} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Здесь A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий, $P_n(\mu)$ — полином Лежандра.

От известного решения уравнения Стокса в бисферических координатах [1, 2] функция (1.3) отличается нулевым членом, определяемым таким образом, чтобы функция тока удовлетворяла условию $\psi = 0$ при $\eta = \pi$, что позволяет упростить задачу выбором $\psi = 0$ при $\xi = 0$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при таком определении $V_0(\mu)$

функция $\psi(\xi, \mu)$ остается решением уравнения (1.2) при произвольных постоянных A_0, B_0, C_0, D_0.

В стоксовом приближении выражение для единственной отличной от нуля компоненты силы, действующей на частицу, имеет вид [1, 2]

$$F_z = F = -\pi\rho\nu a w_0 \int r^3 \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{D^2\psi}{r^2}\right) ds \tag{1.4}$$

Здесь ds — элемент длины контура меридионального сечения сферической частицы. Интегрирование по ds ведется в направлении $[\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{n}]$, где $\mathbf{e}_\varphi$ — единичный вектор, выбираемый таким же образом, как и в случае цилиндрической системы координат. Отличие в знаке в (1.4) по сравнению с [1, 2] — результат иного знака в выборе функции ψ в формулах, определяющих компоненты скорости по функции тока.

При переходе к бисферическим координатам из выражения (1.4) получим

$$K = \frac{F}{\pi\rho\nu a w_0} = \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{(\operatorname{ch}\xi_0 - \mu)^3} \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}[(\operatorname{ch}\xi - \mu)^2 D^2\psi]\right\}_{\xi_0} \tag{1.5}$$

Подстановка общего выражения для функции тока (1.3) в (1.5) приводит к следующему результату:

$$K = -\frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{sh}\xi_0}\left[A_0\left(\frac{3}{\operatorname{ch}\xi_0 - 1} - 1\right) + (3D_0 - B_0)\operatorname{cth}\frac{\xi_0}{2} + \right.$$
$$\left. + 3C_0 \frac{\operatorname{ch}\xi_0}{\operatorname{ch}\xi_0 - 1} + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(A_n + B_n + C_n + D_n)\right] \tag{1.6}$$

Формула (1.6) представляет собой обобщение известного выражения для силы, действующей на частицу в вязкой жидкости [1, 2], на случай произвольного массового потока с ее поверхности, что приводит к появлению дополнительных членов, содержащих A_0, B_0, C_0 и D_0.

2. Вычисление коэффициентов в задаче о взаимодействии частицы с плоской поверхностью. Функция тока (1.3) должна удовлетворять граничным условиям прилипания (1.2) на плоской стенке. Отсюда следует, что

$$A_n = -C_n, \quad B_n = -\frac{2n+3}{2n-1} D_n, \quad n \geqslant 0 \tag{2.1}$$

Для определения остальных коэффициентов воспользуемся предположением (1.2) об однородном радиальном вдуве с поверхности сферической частицы. В этом случае имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi_0) V_n(\mu) = -(\operatorname{ch}\xi_0 - 1)(1+\mu)\sqrt{\operatorname{ch}\xi_0 - \mu}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dU_n}{d\xi}(\xi_0) V_n(\mu) = -\frac{3\operatorname{sh}\xi_0(\operatorname{ch}\xi_0 - 1)(1+\mu)}{2\sqrt{\operatorname{ch}\xi_0 - \mu}}$$

Дифференцирование этих соотношений по переменной μ с учетом равенства

$$dV_n/d\mu = -(2n+1)P_n$$

и последующее разложение правых частей получающихся уравнений в ряды по ортогональным полиномам Лежандра приводит для каждого $n \geqslant 0$ к линейной алгебраической системе из двух уравнений для определения коэффициентов A_n, B_n, решение которых имеет вид

(2.2) $$A_n = G_n/\Delta_n, \quad B_n = H_n/\Delta_n, \quad E = \exp(-\xi_0)$$

$$G_n = -Q(p_n + q_n E^{2n}), \quad Q = {}^1/_4\sqrt{2}(2n+1)(\operatorname{ch}\xi_0 - 1)$$

$$H_n = Q(f_n + g_n E^{2n}), \quad \Delta_n = \frac{(2n+1)^2}{2n+3}[4\operatorname{ch}(2n+1)\xi_0 -$$

$$-(2n+1)^2 \operatorname{ch} 2\xi_0 + (2n-1)(2n+3)]$$

$$p_n = \frac{6(2n+1)}{2n+3} + (4n+1)E - \frac{8n^2+2n-3}{2n+3}\frac{1}{E} +$$

$$+ \frac{4n(n+1)}{2n+3}\left(E^2 - \frac{1}{E^2}\right)$$

$$q_n = (n+1)\left(2 + \frac{1}{E}\right) + \frac{3(2n+1)}{2n+3}E - \frac{n(2n-1)}{2n+3}(2+E)E^2$$

$$f_n = 2 + (4n+1)E - (4n+3)\frac{1}{E} +$$

$$+ 4n(n+1)\left(\frac{1}{2n+3}E^2 - \frac{1}{2n-1}\frac{1}{E^2}\right)$$

$$g_n = (n+1)\left(2 + \frac{1}{E}\right) + \frac{4n^2+4n+9}{(2n-1)(2n+3)}E - n(2+E)E^2$$

Для нулевых коэффициентов отсюда следует

$$A_0 = C_0 = 0, \quad B_0 = 3D_0 = 3/\sqrt{2}$$

Для суммы коэффициентов, входящей в формулу (1.6), при $n \geqslant 1$ с учетом (2.1) и (2.2) получим

$$A_n + B_n + C_n + D_n = 4B_n/(2n+3)$$

Эта сумма позволяет вычислить безразмерную силу взаимодействия частицы со стенкой

(2.3) $$K = -\frac{8}{\operatorname{sh}\xi_0}\left(1 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2n+3}B_n\right)$$

Исследование поведения этого выражения на малых и больших расстояниях от стенки по сравнению с радиусом частицы приводит к следующим асимптотическим выражениям:

(2.4) $$\xi_0 \ll 1, \quad K = K_0 = \frac{12}{\xi_0^2} = \frac{6}{h/a - 1}$$

$$\xi_0 \gg 1, \quad K = K_\infty = 18E^2\left(1 + \frac{9}{4}E\right) = \frac{9a^2}{2h^2}\left(1 + \frac{9a}{8h}\right)$$

Результаты численных расчетов значений величины действующей на частицу безразмерной силы K, определяемой формулой (2.3) и соответствующими асимптотическими формулами (2.4), в зависимости от ξ_0 или h/a приведены ниже:

$\xi_0 = 0,1$	0,5	1	1,5	2	2,5
$h/a = 1,005$	1,128	1,543	2,352	3,762	6,132
$K = 1170$	36,6	5,76	1,47	0,444	0,145
$K_0 = 1200$	48	$K_\infty = 4,45$	1,35	0,430	0,144

Отсюда видно, что асимптотические формулы (2.4) пригодны даже в области умеренных значений ξ_0. При $h/a - 1 \leqslant 10^{-3}$ или $h/a > 10$ погрешность асимптотических формул не превышает 1%.

3. Взаимодействие двух сферических частиц. В случае двух одинаковых сферических частиц радиуса a, центры которых расположены на расстоянии $2h$ одна от другой, массовые потоки с их поверхностей приводят к взаимодействию частиц. Если вдув с их поверхностей одинаковой интенсивности, то это исследование сводится к расчету поля скоростей, создаваемых частицей вблизи свободной поверхности ($z = 0$). Соответствующая краевая задача будет отличаться от (1.1) только одним граничным условием

(3.1) $$z = 0, \quad v_z = 0, \quad \partial v_r/\partial z = 0$$

Введем функцию тока ψ так же, как и в предыдущем случае. Функция тока будет определяться решением задачи (1.2), если заменить условие на стенке при $\xi = 0$ условием на свободной поверхности, следующим из (3.1)

$$\psi(0, \mu) = \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}(0, \mu) = 0$$

Это изменение в граничных условиях приведет к тому, что в общем решении (1.3) для любого $n \geqslant 0$ будут выполняться соотношения

(3.2) $$A_n = C_n = 0$$

Остальные коэффициенты B_n и D_n определяются, аналогично предыдущему, из граничных условий на поверхности сферической частицы в результате решения при любом $n \geqslant 0$ системы двух линейных алгебраических уравнений. Таким образом можно получить

(3.3) $$B_n = M_n/d_n, \quad D_n = N_n/d_n$$

$$M_n = -Q\,(\alpha_n - \beta_n E^{2n}), \quad N_n = {}^1/_2\, Q\,(\gamma_n - \delta_n E^{2n})$$

$$d_n = (2n+1)^2\,[\operatorname{sh}(2n+1)\,\xi_0 - (2n+1)\operatorname{sh}\xi_0 \operatorname{ch}\xi_0]$$

$$\alpha_n = 2n + (4n+3)\frac{1}{E} + \frac{4n(n+1)}{2n-1}\frac{1}{E^2}$$

$$\beta_n = \frac{2n^2 - n - 3}{2n-1}E + n(2+E)E^2$$

$$\gamma_n = 4(n+1) + 2(4n+1)E + \frac{8n(n+1)}{2n+3}E^2$$

$$\delta_n = 4(n+1) + 2(n+1)\frac{1}{E} + \frac{2n(2n+5)}{2n+3}E$$

В частном случае при $n = 0$ имеем $B_0 = 3/\sqrt{2}$, $D_0 = 1\,\sqrt{2}$.

Подстановка (3.2), (3.3) в формулу (1.6) приводит к выражению

(3.4) $$K = -\frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{sh}\xi_0}\left[2\sqrt{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(B_n + D_n)\right]$$

Вычисление входящих в эту сумму слагаемых позволяет получить

$$B_n + D_n = Q\,(f_n - g_n E^{2n})/d_n$$

где f_n и g_n определяются формулами (2.2) предыдущей задачи.

Асимптотические формулы для силы взаимодействия двух частиц имеют вид

(3.5) $$\xi_0 \ll 1, \quad K = K_0 = \frac{3}{\xi_0^2} = \frac{3}{2(h/a - 1)}$$

$$\xi_0 \gg 1, \quad K = K_\infty = 6E^2\left(1 + \frac{3}{2}E\right) = \frac{3a^2}{2h^2}\left(1 + \frac{3a}{4h}\right)$$

Результаты расчетов безразмерной силы взаимодействия частиц, выполненных в соответствии с (3.4), а также по асимптотическим формулам (3.5), приведены ниже:

$\xi_0 = 0{,}1$	0,5	1	1,5	2
$K = 295$	9,1	1,52	0,417	0,134
$K_0 = 300$	12	$K_\infty = 1{,}26$	0,399	0,132

4. Обсуждение результатов. Из формул (2.3) и (3.4) следует, что взаимодействие частицы со стенкой или двух частиц между собой характеризуется силами отталкивания при сферически-симметричном потоке с поверхностей частиц. Если массовый поток идет на поверхность частиц (конденсация), то очевидно, что будут действовать силы притяжения. Приближенное значение первого члена асимптотического разложения (2.4) силы, действующей на частицу, на больших расстояниях частицы от стенки может быть получено, если воспользоваться записью общего решения уравнения Стокса в сферических координатах с началом в центре частицы и в ее зеркальном относительно стенки изображении, ограничившись учетом членов, содержащих три первых полинома Гегенбауэра. Ведущий член асимптотики (3.5) для силы взаимодействия двух частиц на больших расстояниях очевиден, так как представляет собой формулу Стокса, в которой скорость натекающего на частицу потока есть скорость, создаваемая второй частицей на расстоянии $2h$.

Для асимптотики на малых расстояниях ($h/a - 1 \ll 1$) ведущие члены в формулах (2.4) и (3.5) могут быть получены в приближении гидродинамической теории смазки. Первые члены соответствующих двух- и трехчленных асимптотических выражений для силы, действующей на сферическую частицу, движущуюся перпендикулярно плоской стенке или свободной поверхности [3,4], согласуются с формулами (2.4) и (3.5) в силу эквивалентности этих задач в приближении гидродинамической теории смазки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stimson M., Jeffery G. B.* The motion of two spheres in a viscous fluid // Proc. Roy. Soc. A. 1926. V. 111. № 757. P. 110—116.
2. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
3. *Cooley M. D. A., O'Neill M. E.* On the slow motion generated in a viscous fluid by the approach of a sphere to a plane wall or stationary sphere // Mathematika. 1969. V. 16. Pt. 1. P. 37—49.
4. *Зинченко А. З.* К расчету гидродинамического взаимодействия капель при малых числах Рейнольдса // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 955—959.

Москва

Поступила в редакцию
17.VIII.1988