

УДК 533.6.011

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ИНВАРИАНТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ РАСТЕКАНИЕ ГАЗА ДО ВАКУУМА

Хабиров С. В.

Рассматривается инвариантное решение уравнений газовой динамики, построенное на одномерной подгруппе (по классификации [1]), допускаемой лишь для политропного газа со специальным показателем адиабаты. Газ растекается до вакуума за бесконечное время. Строятся новые решения, описывающие одномерные течения из источника в вакуум и фокусировку газа внутри сферы или цилиндра с ударными волнами. Рассматривается растекание сгустка газа с произвольной границей и при наличии контактного разрыва.

Одномерные течения подробно рассматривались [2, 3] в основном для подгруппы с растяжениями.

1. Уравнения для инвариантного решения. Уравнения газовой динамики для политропного газа с уравнением состояния

$$p = A(S) \rho^\gamma, \quad A(S) = \exp[(S - S_0)^{1/2} n R]$$

и специальным показателем адиабаты $\gamma = (n + 2)/n$ в пространстве x_1, x_2, \dots, x_n имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{dp}{dt} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ — скорость, ρ — плотность, p — давление, S — энтропия, R — газовая постоянная. Вместо последнего уравнения можно взять $dS/dt = 0$.

Система (1.1) допускает $(\frac{1}{2}n(n+3) + 5)$ -параметрическую группу точечных преобразований ([4], с. 146). При этом имеется специальный оператор, который допускается лишь для показателя $\gamma = (n + 2)/n$. При $n = 2$ перечислены все неподобные подгруппы [1]. Далее рассматриваются инвариантные решения, построенные на семействе одномерных подгрупп этой классификации, содержащих специальный оператор, но для любого натурального n . Подгруппа задается оператором

$$H_\alpha = (1 + \alpha t + t^2) \frac{\partial}{\partial t} + (t + \alpha) x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + (x_i - t u_i) \frac{\partial}{\partial u_i} - \\ - n t \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - (n + 2) t p \frac{\partial}{\partial p}$$

где параметр подгрупп $0 \leq \alpha < 2$.

Инвариантное решение, построенное на подгруппе H_α , записывается в виде (c — скорость звука)

$$(1.2) \quad \mathbf{u} = e^{\theta(t)} \frac{\bar{\mathbf{u}} + t \bar{\mathbf{r}}}{(1 + \alpha t + t^2)^{1/2}}, \quad \rho = e^{n\theta(t)} \frac{\bar{\rho}}{(1 + \alpha t + t^2)^{n/2}} \\ p = e^{(n+2)\theta(t)} \frac{\bar{p}}{(1 + \alpha t + t^2)^{n/2+1}}, \quad \bar{S} = S, \quad c^2 = e^{2\theta(t)} \frac{\bar{c}^2}{1 + \alpha t + t^2} \\ \bar{p} = A(\bar{S}) \bar{\rho}^{(n+2)/n}, \quad c^2 = \frac{n+2}{n} \frac{p}{\rho}, \quad \bar{c}^2 = \frac{n+2}{n} \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \\ \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} e^{\theta(t)} (1 + \alpha t + t^2)^{1/2}, \quad \theta(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{4 - \alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{2t + \alpha}{\sqrt{4 - \alpha^2}}$$

Функции $\bar{\rho}$, \bar{p} , \bar{c} , \bar{S} , $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ зависят от $\bar{\mathbf{r}} = (x_1, \dots, x_n)$.

Пусть $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\rho}$, \bar{p} , \bar{c} конечны для любого момента времени. Тогда при $t \rightarrow \infty$ параметры газа \mathbf{u} , ρ , p , c стремятся к значениям, соответствующим состоянию вакуума и торможению во всех точках пространства. При $t = 0$ получается

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}e^{-\theta_0}, \quad \mathbf{u}(0, \mathbf{r}) = e^{\theta_0} \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}e^{-\theta_0}) \\ \rho(0, \mathbf{r}) &= e^{n\theta_0} \bar{\rho}(\mathbf{r}e^{-\theta_0}), \quad p(0, \mathbf{r}) = e^{(n+2)\theta_0} \bar{p}(\mathbf{r}e^{-\theta_0}) \\ \theta_0 &= \frac{\alpha}{\sqrt{4-\alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\sqrt{4-\alpha^2}} \end{aligned}$$

Значит, величины $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\rho}$, \bar{p} фактически являются начальными значениями параметров специального газа.

Подстановка (1.2) в (1.1) дает систему H_α -инвариантного решения, похожую на систему установившегося движения газа в центрально-симметричном поле притяжения, пропорциональном радиусу

$$(1.3) \quad \begin{aligned} (\bar{\mathbf{u}} - \alpha \bar{\mathbf{r}}) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \bar{\rho}^{-1} \nabla \bar{p} + \bar{\mathbf{r}} &= 0 \\ (\bar{\mathbf{u}} - \alpha \bar{\mathbf{r}}) \cdot \nabla \bar{\rho} + \bar{\rho} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} &= 0 \\ (\bar{\mathbf{u}} - \alpha \bar{\mathbf{r}}) \cdot \nabla \bar{p} + ((n+2)/n) \bar{p} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} &= 0 \quad \text{или} \quad (\bar{\mathbf{u}} - \alpha \bar{\mathbf{r}}) \cdot \nabla S = 0 \end{aligned}$$

Линия L с касательным направлением $\bar{\mathbf{u}} - \alpha \bar{\mathbf{r}}$ в каждой точке называется линией тока. Вдоль нее справедлив интеграл энтропии $\bar{S} = S_0(L)$.

При $\alpha = 0$ или для течений, в которых $\bar{\rho} = -\bar{r}^{-2} \bar{\mathbf{r}} \cdot \nabla \bar{p}$, $\bar{r} = |\bar{\mathbf{r}}|$ справедлив интеграл Бернулли

$$(1.4) \quad \bar{q}^2 + n\bar{c}^2 + \bar{r}^2 = D^2(L), \quad \bar{q} = |\bar{\mathbf{u}}|$$

В этом случае течение происходит в шаре $\bar{r} \leq D$, на границе которого достигается вакуум и торможение. Для фиксированного \bar{r} определяется критическая скорость $\bar{c}_*^2 = (D^2 - \bar{r}^2)/(n+1)$.

Интеграл Бернулли справедлив в случае $\bar{q} = \alpha \bar{r} \cos \beta$, где β — угол между векторами $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{r}}$, а также для потенциальных течений.]

Проверено, что если течение изэнтропично, то оно изэнергетично, т. е. константа в интеграле Бернулли не зависит от линии тока.

Характеристики системы (1.3) разыскиваются в виде $h(\bar{\mathbf{r}}) = 0$. Если \mathbf{n} — единичная нормаль, то одна характеристика совпадает с линией тока $(\bar{\mathbf{u}} - \alpha \bar{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{n} = 0$, а две другие имеют вид $(\bar{\mathbf{u}} - \alpha \bar{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{n} = \pm \bar{c}$ и при $\alpha = 0$ возможны лишь при $\bar{q} > \bar{c}$.

Пусть поверхность сильного разрыва $F(\mathbf{r}, t) = 0$ H_α -инвариантна. Тогда она имеет вид $F(\bar{\mathbf{r}}) = 0$. Скорость поверхности в направлении нормали \mathbf{n} такова:

$$(1.5) \quad D_n = -\frac{F_t}{\mathbf{n} \cdot \nabla F} = \bar{D}_n \frac{(t+\alpha)e^\theta}{(1+\alpha t+t^2)^{1/2}}, \quad \bar{D}_n = \bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}$$

Контактный разрыв характеризуется равенствами $u_n = D_n$, $[p] = 0$, $[u_n] = 0$ (квадратные скобки означают скачок величины, стоящей в скобках). Эти равенства записываются в H_α -инвариантах

$$(1.6) \quad \bar{u}_n = \alpha \bar{D}_n, \quad [\bar{p}] = 0, \quad [\bar{u}_n] = 0$$

Условия на ударной волне (УВ) задаются равенствами

$$\begin{aligned} [u_\sigma] &= 0, \quad [\rho v] = 0, \quad [p + \rho v^2] = 0, \quad [(n+2)p/\rho + v^2] = 0, \\ v &= u_n - D_n \end{aligned}$$

где u_σ — проекция вектора \mathbf{u} на касательную плоскость к поверхности разрыва.

Из этих условий, записанных в H_α -инвариантах, следует соотношения

$$(1.7) \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{n+1} \left(\bar{v}_1 + n \frac{\bar{c}_1^2}{\bar{v}_1} \right), \\ \bar{c}_2^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \left(\bar{v}_1 + n \frac{\bar{c}_1^2}{\bar{v}_1} \right) \left((n+2) \bar{v}_1 - \frac{\bar{c}_1^2}{\bar{v}_1} \right) \quad \bar{v} = \bar{u}_n - D_n$$

где индексы 1 и 2 означают состояния газа по разные стороны УВ.

2. Групповое свойство инвариантного движения. Система (1.3) допускает $[1/2n(n-1)]$ -мерную группу вращений Z_i и два оператора растяжений

$$X = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} + 2\bar{p} \frac{\partial}{\partial \bar{p}}, \quad Y = \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} + \bar{p} \frac{\partial}{\partial \bar{p}}$$

Оператор Y образует центр всей алгебры, поэтому он может быть добавлен с произвольным коэффициентом к любому оператору любой подалгебры. С учетом сделанного замечания систему неподобных подгрупп при $n > 1$ запишем в виде [1, 5]

$$\langle Z + \beta X \rangle, \langle X \rangle; \langle X, Z \rangle; \langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle; \langle Z_1, Z_2, Z_3, X \rangle$$

На каждой из этих подгрупп можно рассматривать инвариантные решения. Например, вычисление инвариантов подгруппы $Z + \beta X + \gamma Y$ при $n = 3$ приводит к следующему виду инвариантного решения:

$$(2.1) \quad u_1 = e^{\beta\varphi} (U \cos \varphi - V \sin \varphi), \quad u_2 = e^{\beta\varphi} (U \sin \varphi + V \cos \varphi) \\ u_3 = e^{\beta\varphi} W, \quad \rho = e^{\gamma\varphi} R, \quad p = e^{(\gamma+2\beta)\varphi} P$$

где U, V, W, R, P зависят от $\bar{s} = s e^{-\beta\varphi}$, $\bar{z} = x_3 e^{-\beta\varphi}$; $x_1 = s \cos \varphi$, $x_2 = s \sin \varphi$. Подстановка в (1.3) приводит к системе для определения функций U, V, W, R, P .]

Система (1.3) имеет симметричное относительно начала координат решение вида

$$\bar{u} = \bar{r}^{-1} \bar{q}(\bar{r}) \bar{r}, \quad \bar{\rho}(\bar{r}), \quad \bar{p}(\bar{r}), \quad \bar{c}^2 = ((n+2)/n) \bar{p}/\bar{\rho}$$

которое является особым инвариантным решением, построенным на подгруппе вращений, и входит в класс одномерных движений газа со сферическими ($n = 3$), цилиндрическими ($n = 2$) и плоскими ($n = 1$) волнами. Функции \bar{q}, \bar{c} удовлетворяют системе

$$(2.2) \quad \bar{q}'(\bar{q} - \alpha \bar{r}) + n \bar{c} \bar{c}' + \bar{r} = 0 \\ n \bar{c}'(\bar{q} - \alpha \bar{r}) + \bar{c}(\bar{q}' + (n-1) \bar{q}/\bar{r}) = 0$$

При $\alpha = 0$ имеется два интеграла, полностью описывающие движение

$$(2.3) \quad \bar{q}^2 + n \bar{c}^2 + \bar{r}^2 = D^2, \quad \bar{q} \bar{c}^n \bar{r}^{n-1} = E$$

При $\alpha \neq 0$ система (2.2) может быть записана в параметрическом виде

$$(2.4) \quad d\bar{q}/dl = (n-1) \bar{q} \bar{c}^2 - \bar{r}^2 (\bar{q} - \alpha \bar{r}) \\ d\bar{c}/dl = n^{-1} \bar{c} [\bar{r}^2 - (n-1) \bar{q} (\bar{q} - \alpha \bar{r})] \\ d\bar{r}/dl = \bar{r} [(\bar{q} - \alpha \bar{r})^2 - \bar{c}^2]$$

Замена $\bar{q} = \bar{r} (Q(s) + \alpha)$, $\bar{c} = \bar{r} C(s)$, $s = \ln \bar{r}$ приводит к автономной системе двух уравнений

$$(2.5) \quad \frac{dQ}{ds} = \frac{-Q + (Q + \alpha)(nC^2 - Q^2)}{Q^2 - C^2}, \\ n \frac{dC}{ds} = C \frac{1 + n(C^2 - Q^2) - (n-1)Q(Q + \alpha)}{Q^2 - C^2}$$

Разделив второе из них на первое, получим

$$(2.6) \quad \frac{dC}{dQ} = \frac{1}{n} C \frac{1 + n(C^2 - Q^2) - (n-1)Q(Q + \alpha)}{-Q + (Q + \alpha)(nC^2 - Q^2)}$$

В дальнейшем исследуются подробно решения системы (2.2) и выясняется, каким задачам газовой динамики они соответствуют.

3. Одномерные движения при $\alpha = 0$. При $n = 1$ из (2.3) следует $\bar{q} = E\bar{c}^{-1}$, $\lambda = \bar{c}^2$

$$(3.1) \quad F(\lambda) = \lambda + E^2\lambda^{-1} = D^2 - \bar{r}^2 = G(\bar{r}) > 0$$

Графики функций $F(\lambda)$, $G(\bar{r})$ качественно описывают движение газа. Пусть максимум $G(\bar{r})$ больше минимума $F(\lambda)$, т. е. $D^2 > 2|E|$. Тогда минимум $G(\bar{r})$ определяет область течения $0 \leq \bar{r} \leq r_1 = (D^2 - 2|E|)^{1/2}$. В точке минимума $\lambda = |E|$ выполняется равенство $|q| = \bar{c} = |E|^{1/2}$ и на границе области течения $\bar{r} = r_1$ достигается скорость звука. Функция $F(\lambda)$ определена на множестве $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, где $\lambda_{2,1} = 1/2[D^2 \pm (D^4 - 4E^2)^{1/2}]$. Значениям λ в интервале $|E| < \lambda < \lambda_2$ отвечают дозвуковые скорости $|\bar{q}| < |E|^{1/2} < \bar{c}$, а в интервале $\lambda_1 < \lambda < |E|$ — сверхзвуковые скорости $|\bar{q}| > |E|^{1/2} > \bar{c}$. Итак, двум ветвям функции $\lambda(F)$ соответствуют два течения: одно дозвуковое, другое сверхзвуковое, причем в точке $\bar{r} = 0$ имеется источник ($\bar{q} > 0$, $E > 0$) или сток ($\bar{q} < 0$, $E < 0$), а в точке $\bar{r} = r_1$ еще один звуковой сток или источник.

Решение при $E = 0$ называется торможением

$$(3.2) \quad \bar{q}_0 = 0, \quad \bar{c}_0^2 = D_0^2 - \bar{r}^2$$

Оно определено в области $0 \leq \bar{r} \leq D_0$. При $\bar{r} = D_0$ достигается состояние вакуума.

Теорема 1. Решение (3.1) с условием

$$(3.3) \quad D^2 > 4|E| > 0$$

сопрягается с решением (3.2) через УВ с заданным направлением ее скорости, если выполнены неравенства $\sqrt{2}D_0 > D > D_0/\sqrt{2}$. Существует, вообще говоря, два возможных ударных перехода.

Доказательство. Скорость УВ равна $\pm\bar{r}$. Условия (1.7) на ударном переходе принимают вид

$$\bar{q} = \pm\left(\bar{r} - \frac{D_0^2}{2\bar{r}}\right), \quad \bar{c}^2 = D_0^2\left(1 - \frac{D_0^2}{4\bar{r}^2}\right)$$

Из (3.1) находится место расположения УВ $\bar{r} = r_* = D/\sqrt{2}$. Значит,

$$\bar{q} = \frac{D^2 - D_0^2}{\sqrt{2}D}, \quad \bar{c}^2 = D_0^2\left(1 - \frac{D_0^2}{2D^2}\right) > 0$$

Равенство $\bar{q}\bar{c} = E$ равносильно уравнению

$$(3.4) \quad f(\kappa) = \kappa(2 - \kappa)(1 - \kappa)^2 = \delta, \quad \kappa = D_0^2D^{-2}, \quad \delta = 4E^2D^{-4}$$

которого надо искать в интервале $0 < \kappa < 2$. Функция $f(\kappa)$ имеет минимум, равный нулю в точке $\kappa = 1$, и два максимума, равных $1/4$ в точках $\kappa_{\pm} = 1 \pm 1/\sqrt{2}$. Отсюда следует неравенство (3.3), которое гарантирует нахождение УВ в области течения $r_* < r_1$.

При $\bar{q} > 0$, если скорость УВ равна \bar{r} (или $-\bar{r}$), то по теореме Цемплена [3] торможение находится перед (или за) фронтом УВ, и точечный источник соединен с вакуумом.

При $\bar{q} < 0$ торможение находится за (перед) фронтом УВ, и происходит фокусировка газа внутри области $\bar{r} < r_1$.

На каждом из интервалов $0 < \kappa < 1$, $1 < \kappa < 2$ есть два корня уравнения (3.4) при условии (3.3), что соответствует двум возможным ударным переходам при заданном направлении скорости УВ. При $\kappa < 1$ выбирается:

единственное решение при помощи неравенства $r_* < D_0$. Тогда корень уравнения (3.4) находится в интервале $\kappa_- < 1/2 < \kappa < 1$.

При $n = 2$ из (2.3) следует

$$(3.5) \quad \bar{q} = E\bar{r}^{-1}\bar{c}^{-2}, \quad \lambda = \bar{c}^2\bar{r}^{2/3} \\ F(\lambda) = 2\lambda + E^2\lambda^{-2} = \bar{r}^{2/3}(D^2 - \bar{r}^2) = G(\bar{r})$$

Пусть минимум функции $F(\lambda)$ меньше максимума $G(\bar{r})$, т. е.

$$(3.6) \quad |E| < (1/2D)^4$$

Тогда область течения определяется по минимуму функции $F(\lambda)$: $r_1 < \bar{r} < r_2$, где r_i корни уравнения $3^3E^2 = \bar{r}^2(D^2 - \bar{r}^2)^3$. На границах этой области достигается скорость звука $|\bar{q}_i| = \bar{c}_i = |E|^{1/3} \bar{r}_i^{-1/3}$. Следовательно, $\bar{r} = r_i$ определяют границы звуковых неточечных источников или стоков. Максимум функции $G(\bar{r})$ задает область определения функции $F(\lambda)$: $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, где $\lambda_i > 0$ — корни уравнения $3(1/2D)^{3/2} = 2\lambda + E^2\lambda^{-2}$. В области $\lambda_1 < \lambda < E^{2/3}$ течение дозвуковое, а в области $E^{2/3} < \lambda < \lambda_2$ — сверхзвуковое.

Решение при $E = 0$ называется торможением

$$(3.7) \quad \bar{q}_0 = 0, \quad \bar{c}_0^2 = 1/2(D_0^2 - \bar{r}^2)$$

Оно определено в интервале $0 \leq \bar{r} \leq D_0$ и при $\bar{r} = D_0$ достигает вакуума.

Так же как в случае $n = 1$ доказывается следующая

Теорема 2. Решение (3.5) с условием (3.6) сопрягается с решением (3.7) через УВ с заданным направлением ее скорости, если выполнены неравенства $3D/\sqrt{5} > D_0 > \sqrt{3/7}D$. При этом, если $\sqrt{3/7}D < D_0 < D$, то существует единственная точка ударного перехода, если же $D < D_0 < 3D/\sqrt{5}$, то возможны два ударных перехода.

Построенные в теореме 2 решения описывают течение газа из неточечного источника в вакуум или фокусировку газа на оси цилиндра.

При $n = 3$ из (2.3) следует

$$(3.8) \quad \bar{q} = E\bar{r}^{-2}\bar{c}^{-3}, \quad \lambda = \bar{c}^2\bar{r} \\ F(\lambda) = 3\lambda + E^2\lambda^{-3} = \bar{r}(D^2 - \bar{r}^2) = G(\bar{r}) > 0$$

Функция $y = F(\lambda)$ имеет асимптоты $\lambda = 0$, $y = 3\lambda$ и минимум, равный $4|E|^{1/2}$ в точке $\lambda = |E|^{1/2}$. Функция $y = G(\bar{r})$ при $0 < \bar{r} < D$ имеет единственный максимум, равный $2D^3/3^{3/2}$ в точке $\bar{r} = D/\sqrt{3}$. Пусть минимум $F(\lambda)$ меньше максимума $G(\bar{r})$, т. е.

$$(3.9) \quad |e| = |E|^{1/2}/D^3 < (2 \cdot 3^{3/2})^{-1}$$

Область течения определяется по минимуму функции $F(\lambda)$: $r_1 < \bar{r} < r_2$, где r_i — корни уравнения $4|E|^{1/2} = \bar{r}(D^2 - \bar{r}^2)$. На границах этой области достигается скорость звука $|\bar{q}_i| = \bar{c}_i = |E|^{1/4}r_i^{-1/2}$. Значит, $\bar{r} = r_i$ — границы звуковых неточечных источников или стоков.

Каждому \bar{r} из области течения соответствуют два значения λ в соответствии с двумя ветвями функции $\lambda(F)$. Обе ветви определены на множестве $4|E|^{1/2} \leq F \leq 2 \cdot 3^{-3/2}D^2$, причем $\lambda_1 \leq \lambda \leq |E|^{1/2}$ — область значений для первой ветви, $|E|^{1/2} \leq \lambda \leq \lambda_2$ — для второй ветви, где $\lambda_i > 0$ — корни уравнения $E^2\lambda^{-2} + 3\lambda = 2 \cdot 3^{-3/2}D^3$. Если $\lambda > |E|^{1/2}$, то $\bar{q}^2 < |E|^{1/2} \bar{r}^{-1} < \bar{c}^2$ и реализуется дозвуковое течение. Если $\lambda < |E|^{1/2}$, то $\bar{q}^2 > |E|^{1/2} \bar{r}^{-1} > \bar{c}^2$ и реализуется сверхзвуковое течение. В точке $\bar{r} = D/\sqrt{3}$ достигается экстремальная скорость.

Решение при $E = 0$ называется торможением

$$(3.10) \quad \bar{q}_0 = 0, \quad \bar{c}_0^2 = 1/3 (D_0^2 - \bar{r}^2)$$

Оно определено в интервале $0 \leq \bar{r} \leq D_0$ и при $\bar{r} = D_0$ достигает вакуума.

Теорема 3. Решение (3.8) с условием $-3^{-3/4} < e < 1/2 3^{-3/2}$ сопрягается с решением (3.10) через УВ с заданным направлением ее скорости, если выполнены неравенства $\sqrt{2/5} D < D_0 < 2\sqrt{2/5} D$. Возможны, вообще говоря, два ударных перехода.

Доказательство. Скорость УВ равна $\pm \bar{r}$. Из условий (1.7) на ударном переходе следует

$$(3.11) \quad \bar{q} = \pm \left(\bar{r} - \frac{1}{4} D_0^2 \bar{r}^{-1} \right), \quad \bar{c}^2 = \frac{1}{48} D_0^2 (16 - D_0^2 \bar{r}^{-2})$$

Подстановка этих равенств в (3.8) дает

$$(3.12) \quad (D_0/D)^2 = 2(1 - \kappa), \quad \kappa = 2(\bar{r}/D)^2$$

Второе равенство (2.3) становится уравнением для определения места расположения УВ $\kappa_* = 2(r_*/D)^2$:

$$(3.13) \quad f(\kappa) = (2\kappa - 1)[(1 - \kappa)(5\kappa - 1)]^{3/2} = k\kappa, \quad k = \pm 12^{3/2} e^2$$

В силу (3.9) $|k| < k_0 = 2 \cdot 3^{-3/2}$. Функция $f(\kappa)$ в силу (3.11), (3.12) определена на интервале $1/5 < \kappa < 1$, имеет отрицательный минимум и положительный максимум в точках

$$\kappa_{\pm} = \frac{1}{16} \left(9 \pm \sqrt{\frac{53}{5}} \right), \quad f(\kappa_+) = 0,29, \quad f(\kappa_-) = -0,1$$

и три нуля в точках $1/5, 1/2, 1$. Две касательные к графику функции $f(\kappa)$ в точках $\kappa_0 = 1/3 < \kappa_-$, $\kappa_0' = (3 + \sqrt{19})/10$ проходят через начало координат и имеют угловые коэффициенты $f'(\kappa_0) = -8 \cdot 3^{-3} > k_0$, $f'(\kappa_0') = 0,42 > k_0$. Значит, ударный переход возможен лишь для k , удовлетворяющих неравенствам: $-8 \cdot 3^{-3} < k < 2 \cdot 3^{-3/2}$. Отсюда следует неравенства для e , приведенные в формулировке теоремы. Для таких k имеются два корня уравнения (3.13), которым соответствуют два возможных ударных перехода.

УВ должна находиться в области течения (3.10) $r_* < D_0$. Отсюда следует, что $\kappa_+ < \kappa_* < 4/5$, и возможен единственный ударный переход, если $0 < k < 5/4 f(4/5) < k_0$, при этом $1/2 < \kappa_* < a < 4/5$, где $5/4 a f(4/5) = f(a)$. УВ должна находиться в области течения (2.3): $r_1 < r_* < r_2$ или $\kappa_1 < \kappa_* < \kappa_2$, где $\kappa_i = 2(r_i/D)^2$ удовлетворяют уравнению

$$|k| \kappa = (3^{3/2}/16) \kappa^2 (2 - \kappa)^2 = g(\kappa)$$

Значит, должно выполняться неравенство $g(\kappa) > |f(\kappa)|$, что подтверждается вычислениями.

По теореме Цемплена при $\kappa_* < 1/2$ ($\kappa_* > 1/2$) состояние (2.3) находится перед (за) фронтом УВ. Если скорость УВ равна r_* , $\kappa_* > 1/2$ ($-r_*$, $\kappa_* < 1/2$), то $\bar{q} > 0$ ($\bar{q} < 0$) и источник газа с границей $\bar{r} = r_1$ сопрягается через УВ $\bar{r} = r_*$ с вакуумом $\bar{r} = r_0$. Если скорость УВ равна $-r_*$, $\kappa_* > 1/2$ (r_* , $\kappa_* < 1/2$), то $\bar{q} < 0$ ($\bar{q} > 0$) и происходит фокусировка газа внутри сферы $\bar{r} = r_2$.

4. Одномерные движения при $\alpha \neq 0$. Исследуем поведение интегральных кривых уравнения (2.6) в полуплоскости $C > 0$ [6].

При $n = 1$ имеются две особые точки: одна в начале координат (седло), другая в бесконечно удаленной точке. Кривая, входящая в седло,

имеет асимптотическое поведение $Q = 1/3\alpha C^2 + O(C^4)$ при $C \rightarrow 0$. Другой конец этой кривой входит в бесконечно удаленную особую точку. Таким образом, кривая, соединяющая особенности, разделяет остальные интегральные замкнутые кривые, начинающиеся и кончающиеся в бесконечно удаленной точке.

Система (2.4) при $n = 1$ интегрируется. После замены $v = \bar{q} - \alpha\bar{r} + \bar{c}$, $w = \bar{q} - \alpha\bar{r} - \bar{c}$ переменные v, w разделяются:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} v^2 + \alpha v\bar{r} + \bar{r}^2 &= V^2 \exp \left[\frac{\alpha}{\Delta} \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{\Delta\bar{r}} + \frac{\alpha}{2\Delta} \right) \right] \\ w^2 + \alpha w\bar{r} + \bar{r}^2 &= W^2 \exp \left[\frac{\alpha}{\Delta} \operatorname{arctg} \left(\frac{w}{\Delta\bar{r}} + \frac{\alpha}{2\Delta} \right) \right]; \quad \Delta^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{4} \end{aligned}$$

В полярных координатах

$$\Delta\bar{r} = \omega \cos \varphi, \quad v + 1/2\alpha\bar{r} = \omega \sin \varphi, \quad w + 1/2\alpha\bar{r} = \omega \sin \varphi$$

получаются логарифмические спирали

$$\omega = V \exp \frac{\alpha\varphi}{2\Delta}, \quad \omega = W \exp \frac{\alpha\varphi}{2\Delta}$$

Кривой на плоскости (Q, C) , входящей в начало координат, соответствует решение системы (2.4), граничащее с вакуумом при $r = r_0$, $\bar{q} = \alpha r_0$, $\bar{c} = 0$. При этом $v = w = 0$ и из (4.1) следует

$$V = W = r_0 e^\beta, \quad \beta = -\frac{\alpha}{2\Delta} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2\Delta}$$

При $\bar{r} = 0$ это решение имеет вид

$$(4.2) \quad \bar{q} = r_0 e^\beta \operatorname{sh} \frac{\alpha\pi}{4\Delta} = q_0, \quad \bar{c} = c_0 = r_0 e^\beta \operatorname{ch} \frac{\alpha\pi}{4\Delta}$$

что соответствует точечному источнику.

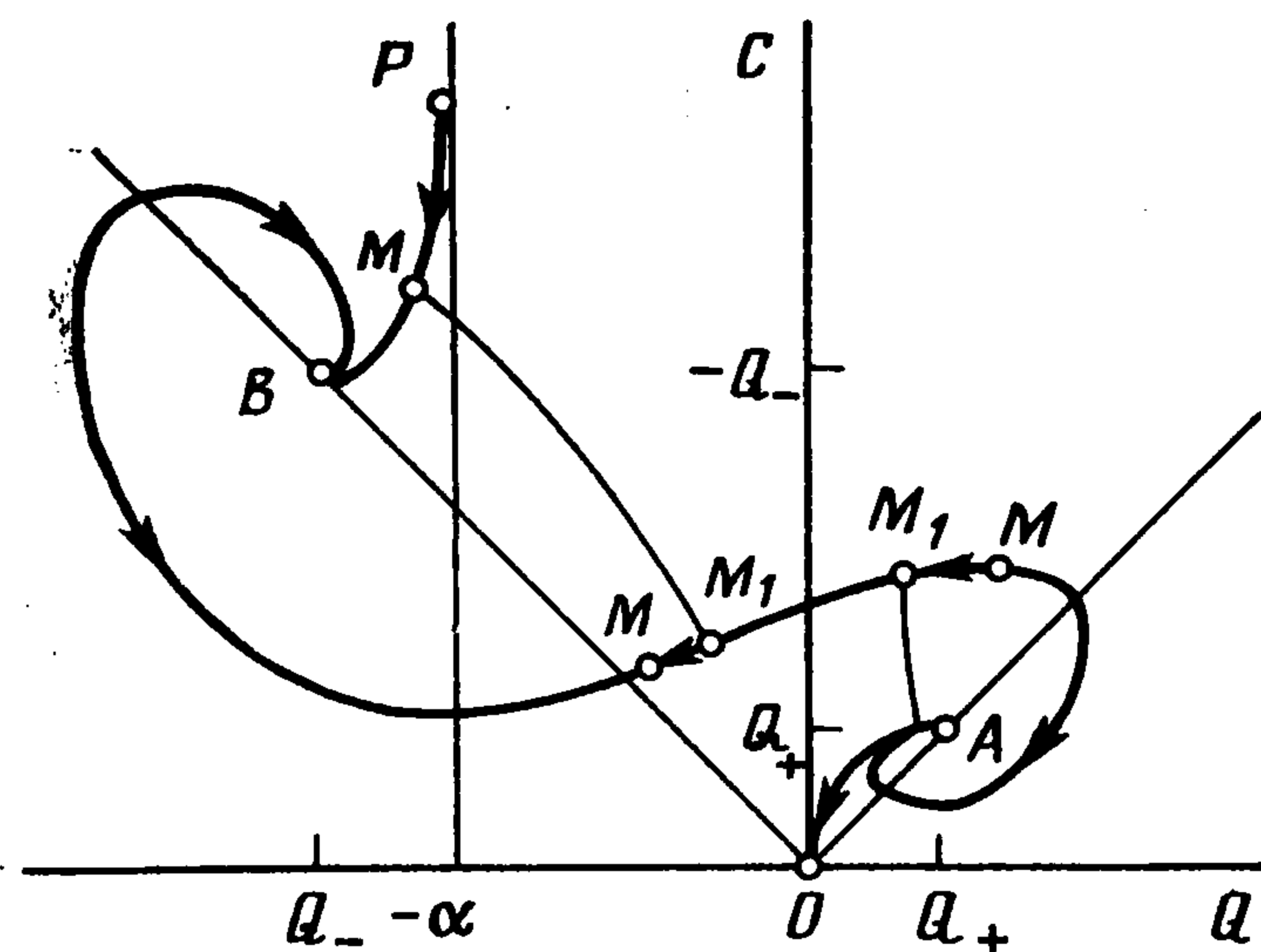
Таким образом, кривой, соединяющей особенности, соответствует непрерывное течение из точечного источника в вакуум. Другим интегральным кривым уравнения (2.6) соответствуют решения (2.4), зависящие от двух параметров. Они могут быть построены при помощи различных ветвей функций v, w из (4.1) и описывают течения, начинающиеся из точечных источников и кончающиеся стоками.

Теорема 4. При $n = 1$ существует течение из точечного источника с произвольными параметрами в вакуум, быть может, через УВ.

Доказательство. Если параметры источника q_0, c_0 совпадают с (4.2), то течение непрерывно. В общем случае произвольных параметров q_1, c_1 найдутся решения (4.1) $L(c_1, q_1)$, такие, что $\bar{q} = q_1, \bar{c} = c_1$ при $\bar{r} = 0$. Эти кривые не заканчиваются состоянием вакуума.

Рассмотрим решения $L(r_0, c_0, q_0)$, граничащие при $\bar{r} = r_0$ с вакуумом. Они зависят от одного параметра r_0 в силу (4.2). Сопрягаем $L(r_0, c_0, q_0)$ с $L(c_1, q_1)$ при $\bar{r} = r_*$ при помощи условий ударного перехода (1.7). Равенства (1.7) становятся системой двух уравнений для определения двух неизвестных r_0, r_* .

При $n \neq 1$ имеются четыре особые точки уравнения (2.6) в полуплоскости $C > 0$: два седла в начале координат и в бесконечно удаленной точке и два фокуса в точках $C_\pm = \pm Q_\pm, Q_\pm = -1/2\alpha \pm (1/4\alpha^2 + 1/(n-1))^{1/2}$. Две интегральные кривые выходят из седел и идут в свои фокусы: одна кривая (L_+) из $O = (0, 0)$ в $F_+ = (Q_+, Q_+)$, другая (L_-) — из $P(-\alpha, \infty)$.



в $F_- = (Q_-, -Q_-)$ (фигура). Остальные интегральные кривые соединяют фокусы, заполняя всю полуплоскость.

Переменная $s = \ln \bar{r}$ в силу (2.5) возрастает вдоль L_- при движении от точки P до точки B пересечения L_- с прямой $C = -Q$, убывает вдоль L_+ при движении от точки O до точки A пересечения L_+ с прямой $C = Q$. И вообще s меняет направление возрастания при движении вдоль любой

интегральной кривой, если она пересекает кривую $C = |Q|$. Значит, решения системы (2.2) непрерывно не продолжаются за кривую $C = |Q|$.

Кривая L_+ , входя в седло O , имеет асимптотическое поведение $Q = \alpha n^2 (n+2)^{-1} C^2 + O(C^4)$ при $C \rightarrow 0$. По главной части этой асимптотики строится решение системы (2.4)

$$\bar{q} = \alpha \bar{r} \left(\frac{3n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+2} \frac{\bar{r}}{r_0} \right), \quad \bar{r} < r_0$$

$$\bar{c} \rightarrow 0, \quad d\bar{c}/d\bar{r} \rightarrow -\infty, \quad \bar{r} \rightarrow r_0$$

Следовательно, особой точке O соответствует состояние вакуума.

Кривая L_- , выходящая из седла P , имеет асимптотическое поведение $Q = -\alpha (1 + (n+2)^{-1} C^{-2}) + O(C^{-4})$ при $C \rightarrow \infty$. Из (2.4) следует, что $\bar{q} \rightarrow 0 - 0$, $\bar{c} \rightarrow c_0$, $d\bar{c}/d\bar{r} \rightarrow 0 - 0$ при $\bar{r} \rightarrow 0 + 0$. Следовательно, особой точке P соответствует торможение.

Кривые, идущие в фокусы F_{\pm} , имеют при $\theta \rightarrow \pm \infty$ асимптотическое поведение

$$C = Q_{\pm} + \frac{n-1}{2n} \left[\frac{1}{2} Q_{\pm} d \cos \theta \pm \left(\alpha Q_{\pm} \frac{n-3}{2} + \frac{2}{n-1} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \theta \right] e^{\mp \delta(\theta - \theta_0)}$$

$$Q = \pm Q_{\pm} + e^{\mp \delta(\theta - \theta_0)} \sin \theta; \quad \delta = \alpha (n-1)/d,$$

$$d = [32 - \alpha^2 (n-3)^2]^{1/2}.$$

Из (2.4) следует, что $\ln(r_{\pm\infty}/\bar{r}) = N_{\pm} e^{\mp \delta \theta} \sin(\theta - \theta_{\pm})$ с некоторыми постоянными $r_{\pm\infty}$, N_{\pm} , θ_{\pm} . Значит, $\bar{r} \rightarrow r_{\pm\infty} > 0$, $\bar{q} \rightarrow r_{\pm\infty} (Q_{\pm} + \alpha)$, $c \rightarrow \pm r_{\pm\infty} Q_{\pm}$ при $\theta \rightarrow \pm \infty$.

Решение $\bar{q}(\bar{r})$, $\bar{c}(\bar{r})$ системы (2.4) вблизи фокусов F_{\pm} является многозначным. Однозначные ветви строятся по частям кривых L_{\pm} до их пересечения с кривой $C = |Q|$, именно, по кривым OA , PB . Границы r_{\pm} области задания однозначных ветвей функций $\bar{q}(\bar{r})$, $\bar{c}(\bar{r})$ определяются интегрированием первого уравнения (2.5) вдоль кривых OA и PB . Таким образом, кривой OA соответствует непрерывное течение из неточечного источника $\bar{r} = r_+$ в вакуум $\bar{r} = r_0$; кривой PB соответствует непрерывное течение внутрь сферы ($n=3$) или цилиндра ($n=2$) с фокусировкой в центре сферы или на оси цилиндра.

Теорема 5. При $n > 1$ существует течение из неточечного источника с произвольными параметрами в вакуум, быть может, через УВ; существует течение внутрь сферы (цилиндра) с произвольными входными параметрами с фокусировкой в центре (на оси), быть может, через УВ.

Доказательство. Если входные параметры таковы, что в переменных Q, C точка данных лежит на кривой OA (PB), то осуществляется непрерыв-

ное течение. Пусть это не выполняется. Скорость УВ равна $\pm \bar{r}$. Уравнения ударных переходов (1.7) в переменных Q, C имеют вид:

$$(4.3) \quad (n+1)U = W_0, \quad (n+1)U = W; \quad U = Q + \alpha - (\pm 1) \\ U_0 = Q_0 + \alpha - (\pm 1), \quad W = nC^2U^{-1} + U, \quad W_0 = nC_0^2U_0^{-1} + U_0$$

Если параметры источника $M = (P, Q)$ лежат на интегральной кривой L уравнения (2.6), не выходящей из седла, то по ней определяется кривая $W = F(U)$. Тогда (4.3) определяет кривую ударных переходов $(n+1)U_0 = F(W_0/(n+1))$. Точки пересечения $M_0 = (P_0, Q_0)$, $M_1 = (P_1, Q_1)$ кривой ударных переходов с кривыми OA (PB) и L определяют течение с УВ. Для нахождения места расположения УВ и точки вакуума (параметра фокусировки) надо интегрировать одно из уравнений (2.5) вдоль кривой L от M до M_1 и вдоль кривой L_+ от O до M_0 (L_- от P до M_0).

Замечания. 1°. Течения, исследуемые в пп. 3, 4, происходят в ограниченном объеме при фиксированном t в отличие от обычных стационарных решений [3], простирающихся до бесконечности, где достигается вакуум. В одномерном случае ($n = 1$) возможно только постоянное стационарное решение.

2°. Решение системы (2.2) имеет физический смысл при любом натуральном n . Центально-симметричное решение в пространстве размерности n рассматривается на трехмерном подпространстве $\bar{x}_i = 0, i \neq 1, 2, 3$. В силу симметрии $\bar{u}_i = 0$, а из (1.2) следует, что $u_i = 0$, и получается решение системы (1.1) в трехмерном случае с $\gamma = (n+2)/n$, где n — любое натуральное число.

5. Функционально-инвариантные решения. Решения (2.1) системы (1.3) при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ и $U = W = 0$ функционально-инвариантны, т. е. зависят от произвольных функций. Действительно, система (1.3) принимает вид

$$(5.1) \quad P_{\bar{s}} = R(V^2\bar{s}^{-1} - \bar{s}), \quad P_{\bar{z}} = -\bar{z}R$$

Если энтропия постоянна, т. е. $S = S_0$, $P = A(S_0)R^{(n+2)/n}$, $A > 0$, то $V_{\bar{z}} = 0$, $\bar{R} = -\mu + \varphi(\lambda)$, $V^2 = \lambda(\varphi' + 1)$, где $\bar{R} = (n+2)AR^{(n+2)/n}$, $\mu = \bar{z}^2$, $\lambda = \bar{s}^2$, $\varphi(\lambda)$ — произвольная функция, но такая, что в области течения $\varphi \geq 0$, $\varphi' \geq -1$. Граница с вакуумом задается уравнением $\mu = \varphi(\lambda)$.

Если энтропия непостоянна, то $R = -2P_{\mu}$, $V^2 = \lambda(1 - P_{\mu}^{-1}P_{\lambda})$, где $P(\lambda, \mu)$ — произвольная функция, но такая, что в области течения $P_{\lambda} \leq P_{\mu} < 0$. Уравнение $P_{\mu} = 0$ определяет границу с вакуумом.

Поверхность контактного разрыва определяется из равенства $[P] = 0$. Остальные условия (1.6) выполнены в силу равенства $u_n = 0$. Таким образом, любые два решения (5.1) с пересекающимися областями течения сопрягаются по поверхности одинакового давления через контактный разрыв.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов Н. Х. Классификация инвариантных решений уравнений двумерного нестационарного движения газа // ПМТФ. 1966. № 4. С. 19—22.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965. 386 с.
3. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
5. Лапко Б. В. Построение оптимальных систем подгрупп группы Ли преобразований, допускаемых уравнениями газовой динамики // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1973. Вып. 14. С. 112—119.
6. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.