

УДК 532.5

АСИМПТОТИКА СТАЦИОНАРНОГО ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Чернышенко С. И.

Построена асимптотическая теория стационарного отрывного обтекания тел при больших числах Рейнольдса Re . Показано, что длина и ширина отрывной зоны (ОЗ) пропорциональны Re , а коэффициент сопротивления пропорционален Re^{-1} . Вокруг ОЗ с постоянной завихренностью расположен циклический пограничный слой. В масштабе тела течение стремится к удовлетворяющему условию Бриллюэна — Вилля течению Кирхгофа со скоростью на свободной линии тока порядка $Re^{-1/2}$.

Обзор попыток описать двумерное отрывное обтекание тела при больших Re дан в работах [1, 2]. Некоторые черты асимптотической структуры решения на основе качественных рассуждений указаны в [3, 4]. Рассчитана [5] соответствующая форма отрывной зоны. Однако полная теория в этих работах не построена. Появление численных расчетов [6, 7] стимулировало дальнейшие исследования. Предложена [8] модель с ненулевым скачком постоянной Бернулли на границе ОЗ. Ряд предположений о предельной структуре течения высказан в [9].

В полученном ниже решении течение в масштабе тела описывается как в [1, 2], но скорость имеет порядок $Re^{-1/2}$. Соответственно перенормированы характеристики течения в этой зоне. Течение в масштабе ОЗ отвечает предложениям работ [3, 4]. В отличие от [1—4] течение в масштабе тела не срывается непосредственно с течением в масштабе ОЗ: имеется несколько вложенных зон, срачиваемость которых обеспечивает самосогласованность разложения, причем существенную роль играет циклический пограничный слой на границе ОЗ.

1. Перейдем к безразмерным переменным, используя в качестве масштабов характерный размер тела и скорость на бесконечности. Пусть при $Re \rightarrow \infty$ длина и ширина ОЗ стремятся к бесконечности, оставаясь одного порядка. Тогда в пределе течение в масштабе ОЗ будет вихрепотенциальным [10]. В областях отрыва (фиг. 1) завихренность по теореме Прандтля — Бэтчелора постоянна. Вне зон течение потенциально. На границе вихревых зон может быть тангенциальный разрыв. Скачок Δ постоянной Бернулли на нем надо определять из анализа циклического пограничного слоя. Этот слой развивается вдоль разрыва от точки A к точке B , поворачивает в окрестности B и движется от B к A вдоль оси симметрии. Вблизи A он вновь разворачивается и, примкнув к набегающему потоку, вновь движется к B . Профиль скорости в пограничном слое не меняется при поворотах. Соответствующая краевая задача была поставлена в [11].

Введем в циклическом пограничном слое продольную и поперечную координаты s, n (фиг. 1). Обозначим $U(s)$ скорость вихрепотенциального течения на внутренней границе. Для функции $g = 1/2 (u^2 - U^2) - \Delta$, где u — скорость вдоль оси s в пограничном слое, в переменных Мизеса краевая задача такова:

$$(1.1) \quad \frac{\partial g}{\partial s} = \frac{u}{Re} \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}$$

$$(1.2) \quad s = 0, \psi < 0, g = 0$$

$$(1.3) \quad \psi > 0, g(0, \psi) = g(s_A, \psi)$$

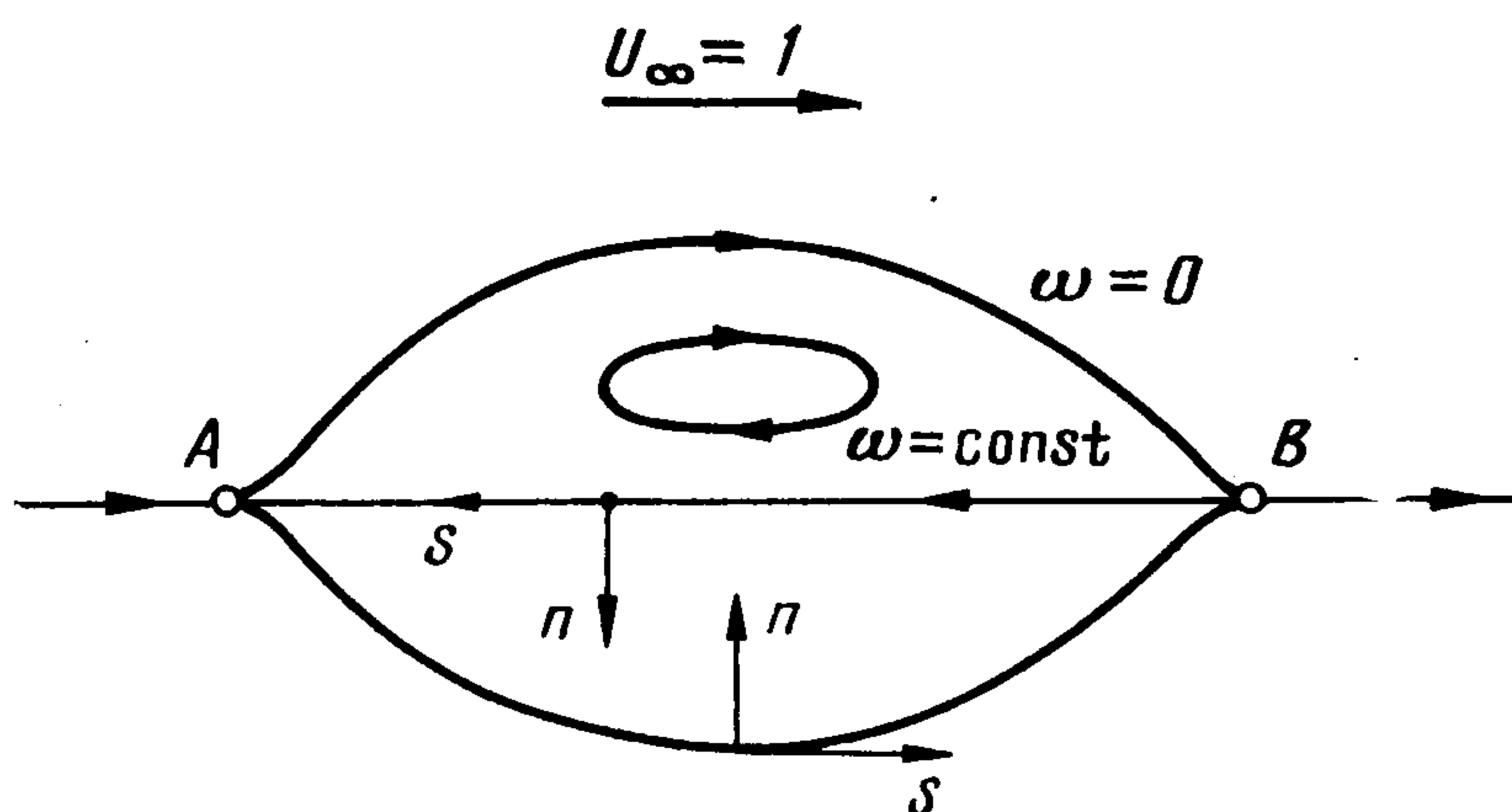
$$(1.4) \quad \psi = 0, s_B < s < s_A, \partial g / \partial \psi = 0$$

$$(1.5) \quad \psi \rightarrow +\infty, g \rightarrow -\Delta = \text{const}$$

(ψ — функция тока). Переменные нормированы на исходные масштабы, но в уравнениях сохранены только главные при $\text{Re} \rightarrow \infty$ члены. Анализ свойств краевой задачи (1.1)—(1.4) дает основание полагать [12], что ее ограниченное при $\psi \rightarrow \infty$ решение единственно, а условие (1.5) позволяет определить Δ . Ниже единственность доказана в рассматриваемом конкретном случае. Само решение очевидно: $g \equiv 0$. Следовательно, и $\Delta = 0$. Это значит, что модель [8] неверна.

Теорема. Система уравнений (1.1)—(1.4) с дополнительным условием $g \rightarrow \text{const}$ при $\psi \rightarrow +\infty$ имеет единственное решение $g = 0, \text{const} = 0$.

Доказательство. Предположим противное. Свойства функции $u(s, \psi)$, необходимые для применимости использованных в доказательстве общих теорем, вытекают из физического смысла рассматриваемой задачи. Будем



Фиг. 1

считать далее в (1.1) $u > 0$ произвольной гладкой ограниченной известной функцией. Тогда уравнение (1.1) линейно по g и без ограничения общности можно считать, что $g \rightarrow 1$ при $\psi \rightarrow +\infty$.

Докажем, что $g(s, \psi) \leq 1$. Доопределим $g(s, \psi)$ при $s_B < s < s_A$ для $\psi < 0$, положив $g(s, -\psi) = g(s, \psi)$, $u(s, -\psi) = u(s, \psi)$.

Пусть существуют s, ψ , такие, что $g(s, \psi) > 1$. Тогда $g(s, \psi)$ достигает абсолютного максимума в некоторой точке s_m, ψ_m . В силу (1.3) без ограничения общности можно считать $s_m > 0$. Тогда, выбрав достаточно малое $\delta > 0$ и достаточно большое M , получим в области $|\psi| \leq M, s_m - \delta \leq s \leq s_m$ противоречие с общим принципом максимума (теорема 1 из § 1 в [13]). Следовательно, $g \leq 1$.

Докажем, что $g(s, \psi) < 1$. Для этого повторим предыдущее рассуждение, используя то, что $g(s, \psi) \leq 1$ и усиленный принцип максимума (теорема 6 из § 1 в [13]). Предположив, что $g(s, \psi) = 1$ в некоторой точке, получим $g \equiv 1$, что противоречит краевому условию $g(0, \psi) = 0$ при $\psi < 0$.

Рассмотрим область $\psi \geq N > 0$. По доказанному $g(s, N) < 1$. Из непрерывности $g(s, N)$ следует, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что $g(s, N) < 1 - \varepsilon$. При $\psi \geq N$ в силу (1.3) функция $g(s, \psi)$ может быть периодически по s продолжена на все s . Рассмотрим при $\psi \geq N$ функцию $y(s, \psi)$, такую, что $y(s, \psi)$ удовлетворяет уравнению (1.1), $y(0, \psi) > g(0, \psi)$, $y(s, N) = 1 - \varepsilon$, $y(0, \psi) \rightarrow \text{const}$ при $\psi \rightarrow \infty$.

При $s > 0$ функция $y(s, \psi)$ мажорирует $g(s, \psi)$: $y \geq g$. Покажем, что $y(s, \psi) \rightarrow 1 - \varepsilon$ при $s \rightarrow \infty, \psi = \text{const}$. Положим $y(s, \psi) = 1 - \varepsilon + y_1(s, \psi)$ и продолжим нечетно $y_1(s, \psi)$ в область $\psi < N$: $y_1(s, \psi - N) =$

$= -y_1(s, N - \psi)$. Тогда $y_1(s, \psi)$ будет решением уравнения $y_{1s}' = u_1 y_{1\psi\psi}''$, где $u_1 = u$ при $\psi \geq N$, и u_1 — четная по $\psi - N$ функция. Тогда!

$$\frac{dI}{ds} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} y_{1\psi}' (u_1 y_{1\psi\psi}')' d\psi = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 (y_{1\psi\psi}')^2 d\psi < 0$$

$$I(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y_{1\psi}')^2 d\psi$$

Следовательно, функция $I(s) > 0$ монотонно убывает и, значит, стремится к некоторому пределу. Поэтому $y_{1\psi\psi}'' \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, а $y_1 \rightarrow k_1\psi + k_2$. Но функция $y_1(s, \psi)$ ограничена. Значит, $k_1 = 0$ и, так как $y_1(s, N) = 0$, то $y_1 \rightarrow 0$. Теперь из неравенства $g(s, \psi) \leq y(s, \psi)$ при $s \rightarrow \infty$ получим $g(s, \psi) \leq 1 - \varepsilon$. Это противоречит исходному предположению $g(s, \psi) \rightarrow 1$ при $\psi \rightarrow +\infty$.

Таким образом, получающееся в пределе вихрепотенциальное течение имеет нулевой скачок постоянной Бернулли. Такое решение не равномерно пригодно вблизи линий скачка завихренности.

Рассмотрим пограничный слой на границе ОЗ. Главный член разложения скорости в этом слое равен скорости невязкого течения $U(s)$. Главный член завихренности удовлетворяет уравнению

$$(1.6) \quad \frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{U(s)}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2}$$

Причем внутри слоя с точностью до членов высшего порядка

$$(1.7) \quad \psi = U(s) n$$

Краевые условия для уравнения (1.6):

$$(1.8) \quad \begin{aligned} s = 0, \psi < 0, \omega &= -[H] \delta(\psi - 0) \\ \psi > 0, \omega(0, \psi) &= \omega(s_A, \psi) \\ \psi = 0, s_B < s < s_A, \omega(s, 0) &= 0 \\ \psi \rightarrow \infty, \omega &\rightarrow \omega_\infty \end{aligned}$$

Здесь использовано то, что в силу эффективно невязкого характера течения при повороте пограничного слоя профиль $\omega(\psi)$ не меняется. Соприкосновение внутри области поворота набегающего потока с поворачивающим пограничным слоем приводит к появлению в этой области скачка $[H]$ постоянной Бернулли. Дельта-функция в (1.8) — распределение завихренности, соответствующее скачку скорости, так как в пограничном слое $\partial H / \partial \psi = -\omega$, где $H = u^2/2 + p$, p — давление. Задача (1.6), (1.8) в общей постановке изучена в [12]¹. Из результатов [12] следует, что ее решение существует лишь при условии

$$\omega_\infty = -2D_0 [H] \sqrt{\text{Re}/t(s_A)}$$

$$\left(t(s) = \int_0^s U(s) ds, \quad D_0 = D(b, 0), \quad b = \frac{t(s_B)}{t(s_A)} \right)$$

(функция $D(b, \xi)$ затабулирована [12]). В рассмотренной нижней половине ОЗ $\omega_\infty > 0$, а $[H] < 0$. Циркуляция скорости вихрепотенциального течения вокруг нижней половины ОЗ $t(s_A) = \omega_\infty S/2$, где S — общая

¹ Формула замены переменных в начале п. 2 в [12] должна иметь вид $\psi = 2p\sqrt{t_A}$, $t_A = t(s_A)$. В табл. 2 в [12] приведены значения $E(\tau)$, а не $100 E(\tau)$.

площадь обеих половин ОЗ. Таким образом,

$$(1.9) \quad \omega_{\infty} = -2 [H] D_0 \sqrt{2\text{Re}/\omega_{\infty} S}$$

Рассчитав циклический пограничный слой, можно использовать эффективно невязкий характер течения в области воссоединения потока и рассчитать дальний след и сопротивление тела. Заменяв зависимую переменную ω на $h = H - H_{\infty}$, где H_{∞} — постоянная Бернулли в набегающем потоке, и проинтегрировав уравнения для $h(s, \psi)$ по всему циклическому слою, можно показать, что коэффициент сопротивления (подсчитываемый по удвоенному характерному размеру) равен

$$(1.10) \quad c_D = \omega_{\infty}^2 S / \text{Re} = C / \text{Re}$$

Так как величина S пропорциональна квадрату длины, а ω_{∞} обратно пропорционально длине ОЗ, то

$$(1.11) \quad C = \omega_{\infty}^2 S = \text{const}$$

2. Хотя течение в масштабе тела не срачивается непосредственно с течением в масштабе ОЗ, перейдем сразу к его описанию, что даст возможность определить основные характеристики течения. (Последующий анализ промежуточных областей только подтверждает самосогласованность модели.) Предположим, что течение в этих областях в пределе эффективно невязкое. Это предположение подтвердится после определения масштабов скоростей. Тангенциальный разрыв, который, согласно предыдущему, имеется в начале ОЗ, должен продолжаться во все эти области вплоть до тела. Скачок постоянной Бернулли на разрыве постоянен. Поэтому течение в масштабе тела в пределе будет течением по схеме Кирхгофа с тем же скачком постоянной Бернулли — $[H]$. (Но $[H] \neq \Delta = 0$. Это параметры течений в разных характерных масштабах.) Скорость на бесконечности в масштабе тела тогда равна $V_{1\infty} = \sqrt{-2 [H]}$. Коэффициент сопротивления тела $c_D = k_D V_{1\infty}^2 = -2k_D [H]$, где k_D — коэффициент сопротивления по Кирхгофу. Сравнивая с (1.10), получим

$$(2.1) \quad - [H] = C / (2k_D \text{Re})$$

Число Рейнольдса, рассчитанное по $V_{1\infty}$ и размерам тела: $\text{Re}_1 = \text{Re} V_{1\infty} = (C \text{Re} / k_D)^{1/2} \rightarrow \infty$. Таким образом, предположение о невязком характере течения в масштабе тела в пределе подтверждено. Течение в этом масштабе подробно описано в [1], но скорость и число Рейнольдса должны быть перенормированы в соответствии с масштабами, указанными выше. Предельное течение удовлетворяет условию Бриллюэна — Вилля [1], что однозначно определяет k_D .

Из (1.9), (1.11) и (2.1) следует $\omega_{\infty} = 2CD_0^2 k_D^{-2} \text{Re}^{-1}$, $S^{1/2} = k_D^{-2} \text{Re} C^{-1/2} D_0^{-2} / 2$. Тогда длина ОЗ равна

$$(2.2) \quad L = \frac{k_D^2 \text{Re}}{2\alpha^{1/2} C^{1/2} D_0^2}, \quad \alpha = \frac{S}{L^2} = \text{const}$$

3. Как уже отмечено, полученная структура течения сходна с указанной в работах [3, 4, 14, 15]. Однако в этих работах не проведено срачивание решений в различных характерных областях и даже не ставится вопрос о возможности срачивания. Это приводит к различию в постановке задачи о пограничном слое на границе ОЗ. Принципиально различными оказываются способы определения скачка постоянной Бернулли. Выше соотношение (1.9) между $[H]$, ω_{∞} и размерами ОЗ — условие существования удовлетворяющего условиям срачивания с невязким потоком решения краевой задачи для циклического пограничного слоя. В [14, 15] подобная связь получена при помощи энергетических соображений.

Рассмотрим скорость диссипации энергии (СДЭ) более подробно. Проведем контрольную поверхность на большом расстоянии от тела. СДЭ внутри контрольного объема по формуле Бобылева (например, [16]) равна

$$\int_V \Phi dv = \frac{1}{\text{Re}} \int_V \omega^2 dv + \frac{2}{\text{Re}} \int_{\partial V} (\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds$$

(СДЭ нормирована при помощи характерных масштабов). Можно показать, что второй интеграл справа стремится к нулю при стремлении границы контрольного объема к бесконечности. Отсюда следует, что величина c_D определяется выражением (1.10). Это свидетельствует о правильности постановки задачи о циклическом слое. В то же время условие совпадения коэффициентов сопротивления, вычисленных по параметрам дальнего следа и по СДЭ, выполняется тождественно, и его нельзя использовать в качестве замыкающего соотношения.

Однако именно так сделано в работе [15], где вместо циклического пограничного слоя постулируется наличие слоя смещения двух потоков со скачком постоянной Бернулли $[H]$, находящегося под действием продольного градиента давления. Толщина потери импульса в следе при этом зависит от $[H]$. Равенство толщины потери импульса в следе толщине потери импульса, соответствующей СДЭ внутри ОЗ, служит в [15] для определения $[H]$. СДЭ вне ОЗ при этом, по мнению авторов [14], соответствует «второму диссипативному слою» и потому не учитывается.

Основной недостаток такого рассуждения — замена циклического слоя слоем смещения и учет СДЭ только внутри ОЗ при подсчете толщины потери импульса в следе.

Итак, в работах [3, 4] правильно, хотя и не строго, предсказаны порядки длины и ширины ОЗ, коэффициента сопротивления тела и предельное состояние течения в масштабе ОЗ. В этой части модель работ [3, 4, 14, 15] соответствует результатам настоящей работы. Различаются способ замыкания моделей, число характерных областей, структура пограничного слоя на границе ОЗ, количественные результаты. В отличие от [3, 4, 14, 15] в данной работе показана самосогласованность построенной асимптотики.

4. Постоянные C , α и b определяются решением задачи о вихрепотенциальном течении без скачка постоянной Бернулли [5].

Более полные данные приведены в работе [17]. Отмеченное в этих работах расхождение результатов при скачке постоянной Бернулли $\Delta \rightarrow 0$ и $\Delta = 0$ не было подтверждено в более поздней работе [18], данные которой для $\Delta = 0$ совпадают с результатами предшествующих работ при $\Delta \rightarrow 0$.

В результате обработки данных [5, 17, 18] получается $\alpha \approx 0,443$, $C = \omega_\infty^2 S \approx 74,9$, $b \approx 0,545$. Отношение полуширины W отрывной зоны к ее длине равно 0,300. Интерполяция данных [12] и заново проведенный расчет дают совпадающий в пределах принятой точности (1%) результат $D_0 \approx 0,235$. Для кругового цилиндра $k_D \approx 0,50$. Итак, для кругового цилиндра

$$(4.1) \quad c_D = 74,9 \text{ Re}^{-1}$$

$$(4.2) \quad L = 0,393 \text{ Re}$$

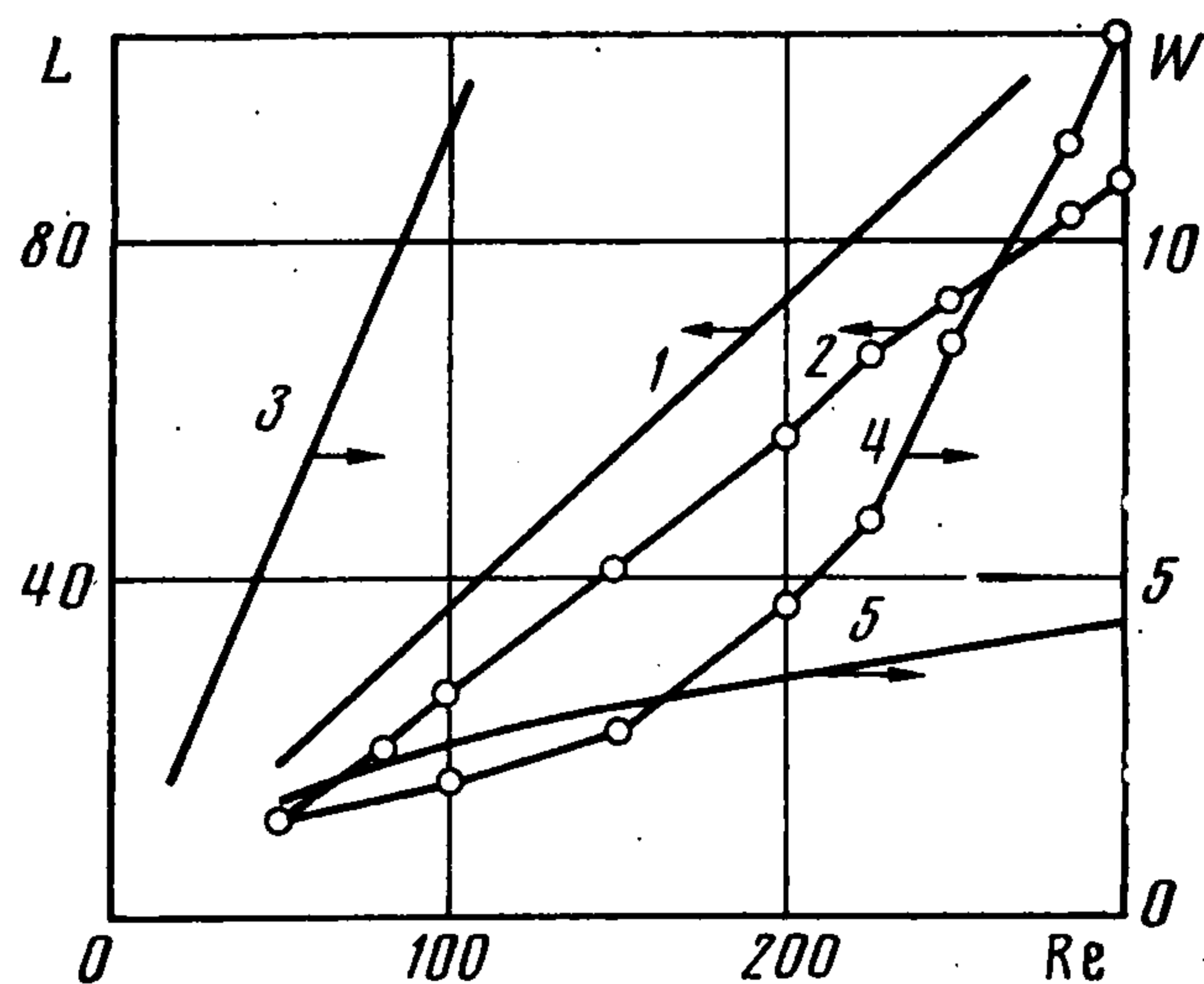
$$(4.3) \quad \omega_\infty = 33,1 \text{ Re}^{-1}$$

$$(4.4) \quad [H] = -74,9 \text{ Re}^{-1}$$

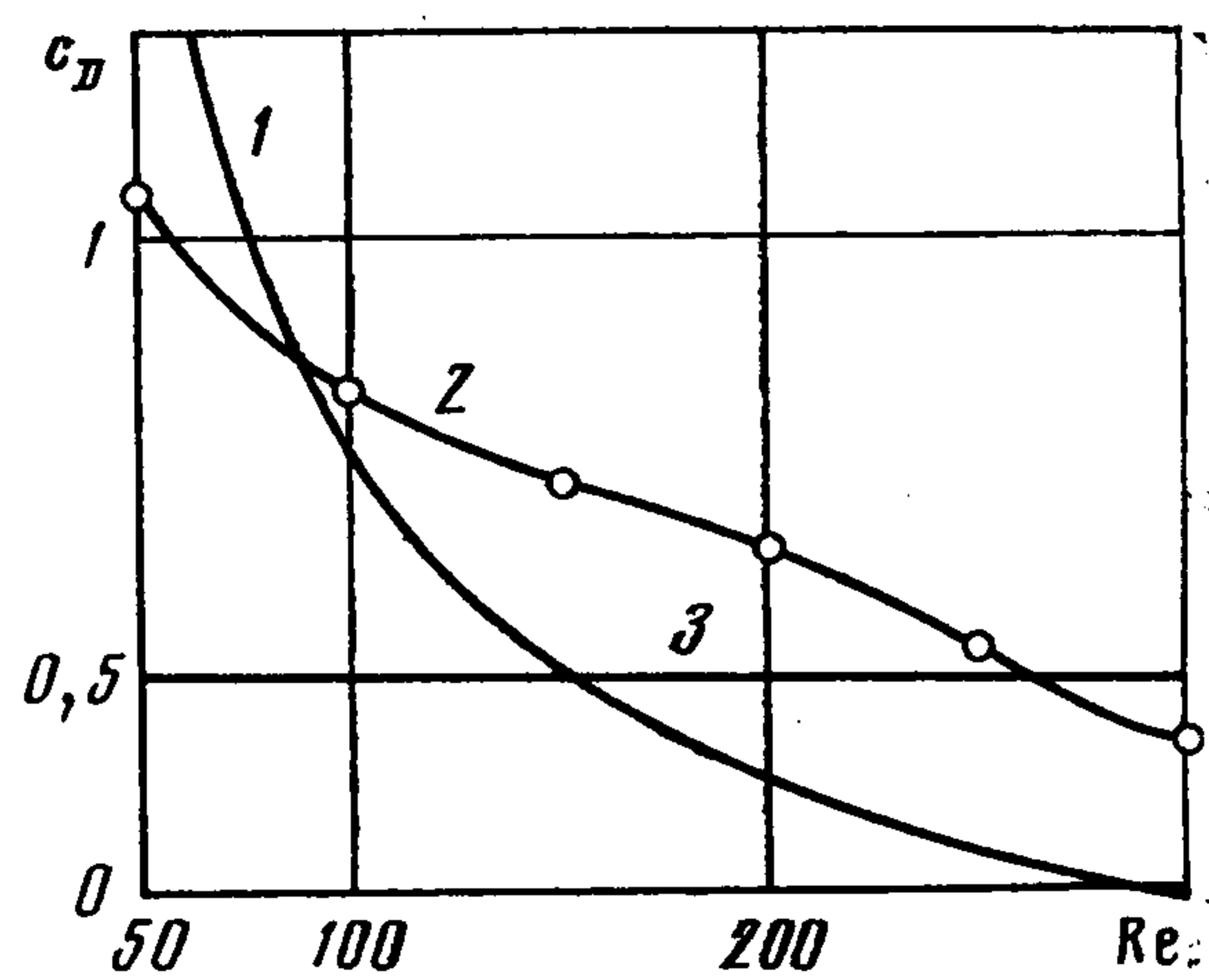
$$(4.5) \quad W = 0,118 \text{ Re}$$

Здесь в качестве масштаба длины использован радиус, а величина c_D рассчитана по диаметру цилиндра.

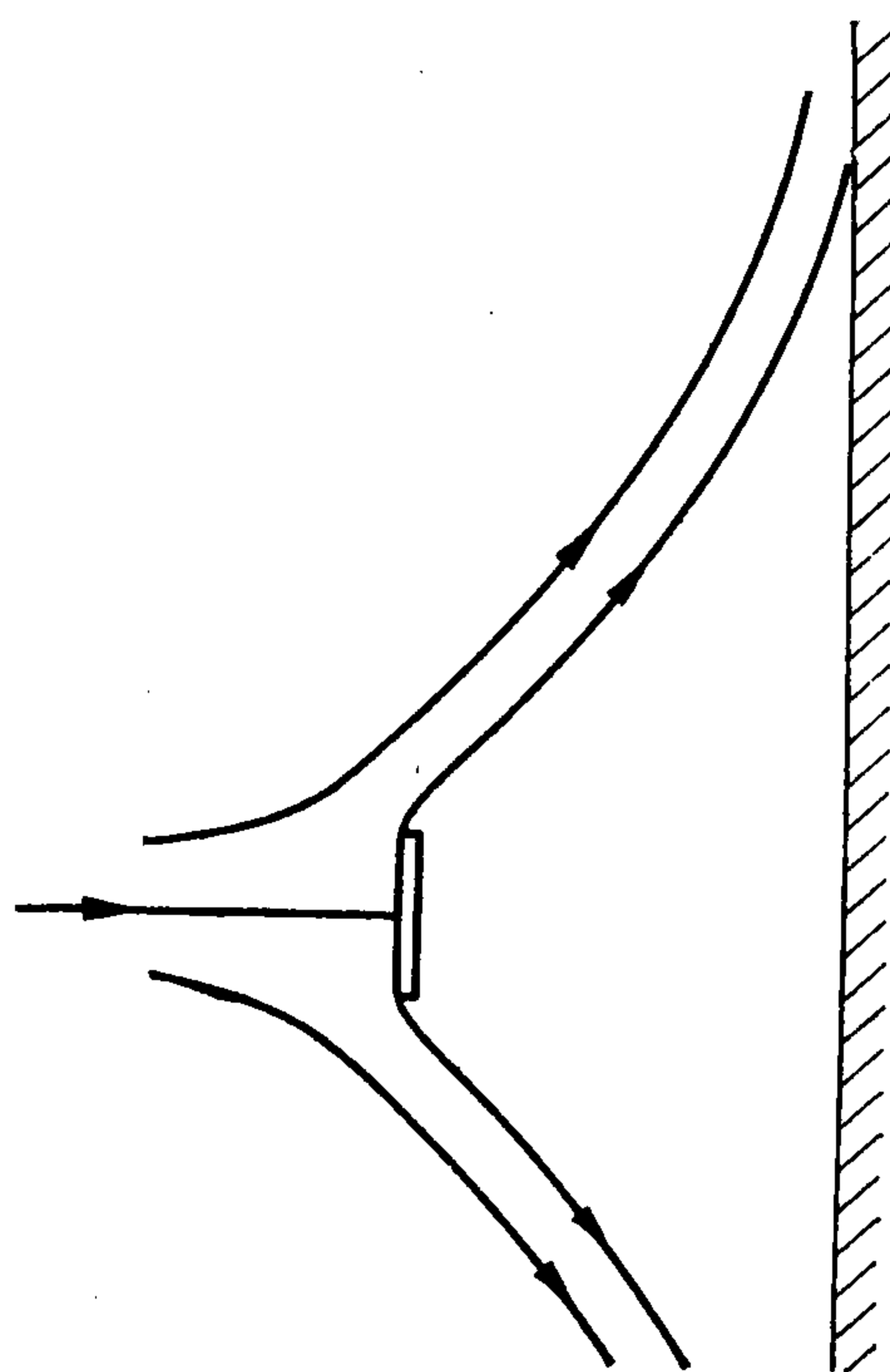
Один из основных эффектов, описываемых теорией, — торможение потока в масштабе тела под влиянием ОЗ. Но, согласно (4.4), при $\text{Re} \approx 150$ скорость на бесконечности в масштабе тела равна единице, т. е. этот эф-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

фенект полностью исчезает. Поэтому трудно ожидать количественного соответствия теории и результатов численных расчетов при достигнутых в [7] числах Рейнольдса ($Re \leq 300$). Однако, хотя характер зависимости многих параметров течения от числа Рейнольдса, согласно расчету, изменяется при $Re \approx 150$, длина ОЗ продолжает линейно расти с той же скоростью.

На фиг. 2 прямая 1 соответствует (4.2), ломаная 2 — численный расчет длины ОЗ [7], прямая 3 — формула (4.5), ломаная 4 — численный расчет полуширины ОЗ [7], кривая 5 — модель [2] ($W = 0,25 Re^{1/2}$). Длина отрывной зоны по модели [2] в принятых здесь обозначениях дается формулой $L = 0,39Re$, что совпадает с (4.2) в пределах точности расчета. Видно, что при $Re < 150$ полуширина отрывной зоны соответствует предсказаниям [2] и лишь при $Re > 150$ начинается выход на асимптотику. Переход от поведения, соответствующего модели [2], к описанной здесь асимптотике характерен и для других величин. По модели [2] при $Re \rightarrow \infty c_D \rightarrow 0,50$. Численные результаты (фиг. 3, кривая 1 — (4.1), 2 — [7], 3 — [2]) демонстрируют тенденцию к снижению c_D ниже 0,50 после $Re \approx 250$. Результатам настоящей работы соответствует и снижение величины максимума завихренности на поверхности тела при увеличении Re от 250 до 300 и другие черты течения на верхнем пределе достигнутых в численных расчетах чисел Рейнольдса.

5. Рассмотрим области поворота пограничного слоя. Так как масштаб ОЗ пропорционален Re , толщина пограничного слоя имеет порядок единицы. Вблизи точек А и В (фиг. 1) уравнения пограничного слоя теряют силу. При приближении к точке А или В толщина пограничного слоя ве-

дет себя как $U(s)^{-1}$ (см. (1.7)). Поэтому характерный масштаб области разворота $l_4 \sim U^{-1}(l_4)$. Из результатов [19] следует, что $U(s) \sim (s/Re) \ln(s/Re)$. (Число Re появилось здесь потому, что размер ОЗ пропорционален Re). Следовательно, $l_4 \sim \sqrt{Re/\ln Re}$. Масштаб скорости в этой области $U_4 \sim l_4^{-1} \sim \sqrt{\ln Re/Re}$ и характерное число Рейнольдса $Re_4 = U_4 l_4 Re = Re$. Из этих оценок следует, что течение в рассматриваемой области эффективно невязкое.

Более того, так как $[H]/U_4^2 \sim 1/\ln Re$ и $\omega_4 l_4/U_4 \sim 1/\ln Re$, то в главном члене течение в этой области потенциальное. Следующий член разложения всего в $\ln Re$ раз меньше главного и должен учитывать как наличие завихренности, так и скачок постоянной Бернулли. Главный член, потенциальное течение с критической точкой, имеет комплексный потенциал $w_4 = C_1 (z/l_4)^2$, $C_1 = \text{const}$. Здесь $z = x + iy$, x, y — декартовы координаты. Внешнее течение имеет асимптотику [19]

$$z/Re \rightarrow 0, \quad \omega_5 \sim C_2 (z/Re)^2 \ln(z/Re) Re$$

Область перекрытия этих разложений довольно мала. Подобные ситуации подробно обсуждены в [20]. В полной аналогии с [20] w_4 сращивается с w_5 при $C_1 = -C_2/2$ в промежуточном пределе $z \sim Re^{1/2}$.

Для анализа в целом существенно следующее: непротиворечивое описание зоны разворота существует и течение в ней эффективно невязкое. Отметим еще, что в области воссоединения отсутствует скачок постоянной Бернулли. Поэтому в задней части ОЗ не возникает характерного «носика», что хорошо прослеживается в результатах [7].

6. Построенное выше разложение не равномерно пригодно вблизи точки A , в которой квадрат скорости течения по порядку величины сравним с $[H]$, что должно привести к возникновению своеобразного носика. Характерный размер соответствующей области l_3 и масштаб скорости U_3 связаны соотношением $U_3 \sim U_4 (l_3/l_4)^2 \sim (-[H])^{1/2} \sim Re^{-1/2}$, откуда

$$l_3 \sim l_4 (\ln Re)^{-1/2} \sim Re^{1/2} (\ln Re)^{-1}$$

Так как в этой области $Re_3 = Re U_3 l_3 = Re (\ln Re)^{-1} \rightarrow \infty$, то течение здесь эффективно невязкое. Масштаб функции тока $\Psi_3 \sim (\ln Re)^{-3/4}$. В силу условия $\omega = 0$ в циклическом слое на оси симметрии $\omega(\psi) \sim \text{const} \psi Re^{-1}$ при $\psi \rightarrow 0$. Поэтому масштаб вихря в рассматриваемой области $\Omega_3 \sim \Psi_3 Re^{-1} = Re^{-1} (\ln Re)^{-1}$. Поскольку $\Omega_3 l_3 = Re^{1/2} (\ln Re)^{-2} \ll Re^{1/2} \sim U_3$, течение в главном приближении в этой области тоже потенциальное. Так как это течение содержит линию скачка постоянной Бернулли, оно представляет собой столкновение двух потенциальных потоков с разными постоянными Бернулли. Поскольку при $z/l_3 \rightarrow \infty$ потенциал этого течения стремится к $\text{const} (z/l_3)^2$, возможность его сращивания с внешней областью очевидна.

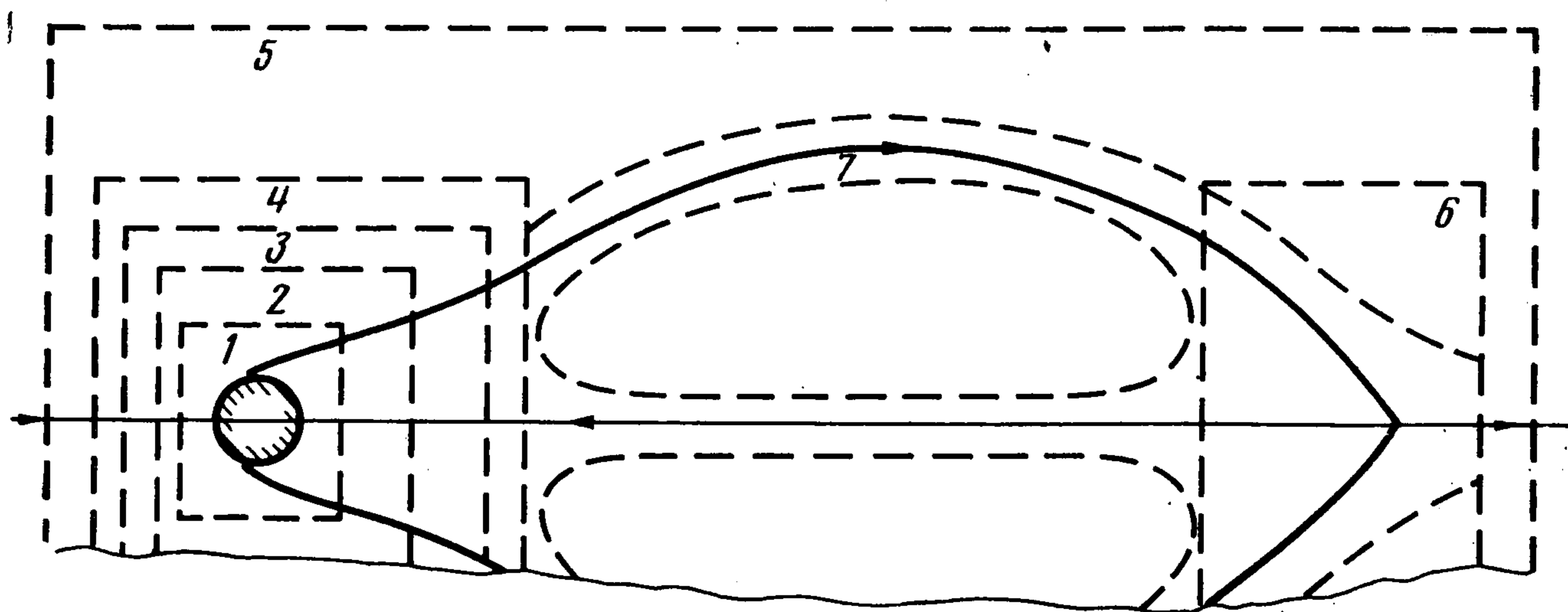
7. Течение в масштабах носика и тела нельзя срастить, так как в масштабе тела ОЗ расширяется пропорционально $x^{1/2}$, а в течение типа течения Чаплыгина [21], имеющем место в масштабе носика, как $x^{3/2}$. Поэтому для завершения доказательства непротиворечивости разложения надо показать существование промежуточной зоны, которую можно срастить с течениями Кирхгофа и Чаплыгина. Масштаб скорости во всех трех зонах одинаков и определяется величиной $[H]$. Следовательно, течение в главном приближении эффективно невязкое.

Рассмотрим потенциальное обтекание с отрывом пластинки, параллельной стенке (фиг. 4). Устремим к нулю отношение длины пластинки к расстоянию от пластинки до стенки. Течение в масштабе пластинки устремится к течению Кирхгофа, а в масштабе расстояния до стенки — к течению Чаплыгина. Комплексная скорость рассматриваемого течения равна

$$\frac{dw}{dz} = \left(1 - \left(\frac{1}{2} + i \left(h^2 - \left(\frac{1}{w} - \left(h^2 + \frac{1}{4} \right)^{1/2} \right)^2 \right)^{1/2} \right)^{-1} \right)^{1/2}$$

Две линии тока этого течения на фиг. 4 получены численно.

Расстояние от пластинки до стенки имеет порядок параметра $h \rightarrow \infty$, длина пластинки $\sim h^{-3}$, а размер переходной зоны, в существовании которой можно убедиться непосредственно, $\sim h^{-1}$. Так как нет принципиальной разницы между стыковкой течений в масштабах тела и носика и стыковкой областей только что рассмотренного течения, то существование



Фиг. 5

промежуточной области доказано. Ее продольный размер имеет порядок $l_3^{1/2}$. Ширина ОЗ — порядок $l_3^{1/4}$. Доказательство непротиворечивости построенной теории завершено.

8. Структура течения в целом изображена на фиг. 5. Здесь 1 — область течения Кирхгофа, 2 — промежуточная область (п. 7), 3 — область столкновения потенциальных потоков (п. 6), 4 и 6 — области разворота циклического слоя (п. 5), 5 — область вихрепотенциального течения, 7 — циклический пограничный слой.

Отметим, что сращивание в главном члене течений в масштабе тела, промежуточной области, области поворота потока и области потенциального течения не позволяет связать размеры тела и ОЗ, так как течение в промежуточной области можно построить при любом соотношении размеров тела и масштаба носика, лишь бы последний был много больше размеров тела. Для замыкания системы соотношений выше использовано условие равенства коэффициента сопротивления, рассчитанного по параметрам течения в масштабе тела и по параметрам дальнего следа (формула (2.1)). Это условие не может быть получено из сращивания различных областей: сращивание возможно и при его нарушении. Таким образом, модель, которую можно получить рассматривая только главные члены, оказывается содержащей произвольный параметр. Стандартный способ определения этого параметра заключается в построении высших членов разложения решения: условие их существования должно дать возможность устранить произвол в выборе главного члена.

Во многих случаях подобные трудности удается обойти, установив некоторое свойство решения и потребовав, чтобы оно сохранилось при переходе к пределу. Именно так доказывается, например, известная теорема

Прандтля — Бэтчелора о постоянстве завихренности в области замкнутых линий тока. При выводе (2.1) в качестве такого свойства решения использовано условие равенства коэффициентов сопротивления, вычисленных разными способами. Таким образом, с формальной точки зрения (2.1) следует рассматривать как условие разрешимости задачи о высших приближениях.

Известно, что коэффициент сопротивления пластинки, установленной параллельно направлению потока, обусловлен силой трения и имеет порядок $Re^{-1/2}$, т. е. больше, чем пластинки, перпендикулярной потоку. Рассмотрим силу трения при симметричном обтекании клина. При уменьшении угла раствора клина коэффициент сопротивления по Кирхгофу k_D уменьшается. При этом в соответствии с (2.4) уменьшаются и размеры отрывной зоны, а в соответствии с (2.1) скорость в масштабе тела, а вместе с ней и сила трения, растут. Поэтому результаты изложенной выше теории нельзя считать противоречащими известным результатам для пластинки, параллельной потоку. Построение единой теории, описывающей переход от одного типа течения к другому, представляет собой весьма сложную задачу.

Автор благодарит Г. Ю. Степанова и Г. Г. Черного за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smith F. T.* Laminar flow of an incompressible fluid past a bluff body: the separation, reattachment, eddy properties and drag // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 92. Pt. 1. P. 171—205.
2. *Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Королев Г. Л.* Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука, 1987. 255 с.
3. *Таганов Г. И.* К теории стационарных отрывных зон // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1968. № 5. С. 3—19.
4. *Таганов Г. И.* О предельных течениях вязкой жидкости со стационарными срывными зонами при $Re \rightarrow \infty$ // *Учен. зап. ЦАГИ.* 1970. Т. 1. № 3. С. 1—14.
5. *Садовский В. С.* Область постоянной завихренности в плоском потенциальном потоке // *Учен. зап. ЦАГИ.* 1970. Т. 1. № 4. С. 1—9.
6. *Förnberg B.* A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 98. Pt. 4. P. 819—855.
7. *Förnberg B.* Steady viscous flow past a circular cylinder up to Reynolds number 600 // *J. Comput. Phys.* 1985. V. 61. № 2. P. 297—320.
8. *Smith F. T.* A structure for laminar flow past a bluff body at high Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 155. P. 175—191.
9. *Peregrine D. H.* A note on the steady high—Reynolds—number flow about a circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 157. P. 493—500.
10. *Садовский В. С.* О вихревых зонах в потенциальном потоке со скачком постоянной Бернулли на границе // *ПММ.* 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 773—779.
11. *Нейланд В. Я., Сычев В. В.* К теории течений в стационарных срывных зонах // *Учен. зап. ЦАГИ.* 1970. Т. 1. № 1. С. 14—23.
12. *Чернышенко С. И.* О приближенном способе определения завихренности в зоне отрыва при вязкости, стремящейся к нулю // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1982. № 1. С. 10—15.
13. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // *Успехи мат. наук.* 1962. Т. 17. Вып. 3. С. 3—146.
14. *Таганов Г. И.* Вязкая диссипация и законы сопротивления тел при $1 < Re < \infty$ // *Численные методы механики сплошной среды.* Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973. Т. 4. № 4. С. 125—138.
15. *Буковшин В. Г., Таганов Г. И.* Численные результаты асимптотической теории обтекания тел со стационарными срывными зонами при больших числах Рейнольдса // *Численные методы механики сплошной среды.* Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. Т. 7. С. 13—26.
16. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 256 с.
17. *Садовский В. С.* Исследование решений уравнений Эйлера, содержащих области с постоянной завихренностью // *Тр. ЦАГИ.* 1973. Вып. 1474. 14 с.
18. *Садовский В. С., Кожуро Л. А.* О двух однопараметрических семействах вихревых течений невязкой жидкости // *Численные методы механики сплошной среды.* Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. Т. 8. № 7. С. 126—140.
19. *Садовский В. С.* О некоторых свойствах потенциального и вихревого течений, граничащих на замкнутой жидкой линии тока // *Уч. зап. ЦАГИ.* 1971. Т. 2. № 1. С. 113—116.
20. *Лагерстром П. А., Кастен Р. Г.* Основные представления метода сингулярных возмущений // *Механика. Период. сб. перев. иностр. статей.* 1973. Т. 2. С. 50—109.
21. *Чаплыгин С. А.* К вопросу о струях в несжимаемой жидкости. *Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания.* 1899. Т. 10. В. 1. С. 35—40.