Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 6, 1988

УДК 531.36 + 62—50

РЕЖИМЫ С УЧАЩАЮЩИМИСЯ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ РОБОТОМ

Борисов В. Ф., Зеликин М. И.

Строится синтез оптимальных по быстродействию траекторий для системы управления двухзвенным манипулятором (роботом). Доказывается, что для начальных условий, лежащих в некоторой открытой области фазового пространства, все оптимальные траектории имеют участок учащающихся переключений (УП), т. е. участок, на котором управление претерпевает бесконечное число переключений на конечном интервале времени.

Синтез оптимального управления на плоскости R^2, содержащий режим учащающихся переключений, впервые построен Фуллером [1]. Было доказано [2], что этот синтез структурно устойчив в том смысле, что добавление членов высшего порядка малости под знаком интеграла и в правые части системы дифференциальных связей не меняет качественной картины оптимального синтеза в окрестности начала координат.

В данной работе выясняется, что синтез в задаче оптимального по быстродействию управления движением робота является в некотором смысле прямым произведением синтеза в задаче Фуллера и синтеза в простейшей задаче быстродействия ([3], с. 38—47). Отличительная особенность данной работы — доказательство того, что поверхность переключения — кусочно-гладкое многообразие. Наличие режима УП связано только с тем, что каждая траектория пересекает эту поверхность бесконечное число раз. В известных работах кусочная гладкость кривой переключения в двумерных задачах с режимом УП была доказана лишь для задач, допускающих однопараметрическую группу симметрий [1, 4—6]. Доказательство наличия режима УП было дано в [7, 8].

1. Постановка задачи. Задача управления роботом может быть поставлена в двух вариантах [9]. На массивном вертикальном цилиндре, вращающемся вокруг своей оси, укреплено подвижное звено. В первом варианте подвижное звено имеет вид вращающейся в вертикальной плоскости штанги, во втором — горизонтальной выдвигающейся стрелы. В системе имеется два управляющих параметра: момент, действующий на вертикальный цилиндр, и сила, действующая на подвижное звено. Оба управления ограничены по модулю.

Для первого варианта уравнения движения имеют вид

$$x_1^{\boldsymbol\cdot} = x_2, \quad x_2^{\boldsymbol\cdot} = (v - x_2x_4 \sin 2x_3)/(1 + \sin^2 x_3) \tag{1.1}$$
$$x_3^{\boldsymbol\cdot} = x_4, \quad x_4^{\boldsymbol\cdot} = u + \sin x_3 + Cx_2^2 \sin 2x_3$$

Для второго варианта

$$x_1^{\boldsymbol\cdot} = x_2/(1 + x_3^2), \quad x_2^{\boldsymbol\cdot} = v, \quad x_3^{\boldsymbol\cdot} = x_4 \tag{1.2}$$
$$x_4^{\boldsymbol\cdot} = u + x_2^2x_3/(1 + x_3^2)^2$$

Управления $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ — измеримые функции, причем

$$|u| \leqslant u_0, \quad |v| \leqslant 1 \tag{1.3}$$

Траектории $X(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot), x_3(\cdot), x_4(\cdot))$—абсолютно непрер
Будет рассмотрена задача (задача А1)

$$T \to \min, \quad X(0) = X_0, \quad X(T) = 0$$

где траектории $X(t)$ удовлетворяют системе (1.2), (1.3). В результаты остаются справедливыми и для задачи, в которой траектории $X(t)$ удовлетворяют системе (1.1), (1.3).

Определение. Назовем траекторию $X(t)$ с управлением $u(t)$, $v(t)$ режимом учащающихся переключений (УП), если управление имеет бесконечное число разрывов на конечном участке времени.

Ниже будет показано, что для произвольных A, B: $B < 0$, $A > {}^1/_2 B^2$, для начальных условий $X_0 \in D_\varepsilon = \{X \mid \max(\sqrt{|x_4|}, |x_3|, |x_1 - A|, |x_2 - B|) < \varepsilon\}$ при достаточно малом ε оптимальные траектории (ОТ) задачи А1 содержат участки УП. За конечное время, непрерывно зависящее от начальных условий, ОТ с бесконечным числом переключений компоненты управления u и с постоянным $v = -1$ выходят на особое многообразие задачи А1 — поверхность $\pi = \{X \mid x_3 = x_4 = 0\}$, а затем с $u = 0$ и ровно одним переключением v попадают в начало координат. В каждую точку $(\alpha, \beta, 0, 0) \in D_\varepsilon$ приходит однопараметрическое семейство ОТ, заполняющих двумерную поверхность $\Sigma_{\alpha,\beta}$, гладкую вне $\Sigma_{\alpha,\beta} \cap \pi$. Область D_ε расслаивается на слои $\Sigma_{\alpha,\beta}$ над базой π. Точки переключений ОТ образуют трехмерную поверхность P (класса C^1 вне $P \cap \pi$), разделяющую область D_ε на две подобласти D_ε^+ и D_ε^-, в которых $u = 1$ и $u = -1$ соответственно.

2. Редукция задачи. Рассмотрим систему уравнений

$$x_1^\cdot = \sigma x_2, \quad x_2^\cdot = v, \quad x_3^\cdot = x_4 \qquad (2.1)$$
$$x_4^\cdot = u + x_2^2 x_3/(1 + x_3^2)^2$$

с управлением $\sigma \in [0, 1]$, u, v, причем выполнены условия (1.3). Обозначим M_R множество абсолютно непрерывных траекторий $X(\cdot)$, $X(0) = X_0$, удовлетворяющих системе (1.2) при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon R$ и системе (2.1) при $t > \varepsilon R$. Постоянная R будет выбрана позднее.

Рассмотрим следующую задачу (задача А2):

$$T \to \inf, \quad X(0) = X_0, \quad X(T) = 0, \quad X(\cdot) \in M_R$$

В силу теоремы Филиппова [10] задачи А1 и А2 имеют решения при произвольных начальных условиях.

Замечание 1. Оптимальное значение времени в задаче А2 не превосходит оптимального значения времени в задаче А1. Следовательно, если ОТ в задаче А2 окажется допустимой в задаче А1, то она будет одновременно ОТ в задаче А1. Ниже будет показано, что задачи А1 и А2 действительно эквивалентны.

Все дальнейшие утверждения справедливы при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ для достаточно малого $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(A, B) > 0$, что нигде специально не оговаривается.

Лемма 1. Пусть X^* — ОТ в задаче А2 с начальными условиями $X_0 \in D_\varepsilon$, а σ^*, u^*, v^* — управление на ней. Тогда $\sigma^* \equiv 1$ при $t > \varepsilon R$; $v^* \equiv -1$ при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon R$.

Доказательство. При $t > \varepsilon R$ движение в плоскости x_1, x_2 не зависит от поведения координат x_3, x_4. При $X_0 \in D_\varepsilon$ проекцию траектории $X(\cdot)$ на плоскость x_3, x_4 можно перевести в начало координат за время порядка ε. Поэтому оптимальное время T^* определяется только условиями $x_1(T^*) = x_2(T^*) = 0$.

Обозначим $x_1^*(\varepsilon R) = \alpha$, $x_2^*(\varepsilon R) = \beta$. Рассматривая только первые два уравнения системы (2.1), можно показать, что $x_2^*(t) \leqslant 0$ для любого $t \geqslant 0$, $\sigma^* \equiv 1$ и

$$T^* = \beta + 2\sqrt{\alpha + {}^1/_2\beta^2} + \varepsilon R \qquad (2.2)$$

Таким образом, задача А2 сводится к минимизации функции (2.2) на решениях системы (1.2), (1.3), определенных при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon R$.

Покажем, что если $v^* \neq -1$ на множестве положительной меры при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon R$, то траектория X^* не оптимальна. Рассмотрим траекторию X° системы (1.2) с управлением $u^\circ = u^*$, $v^\circ = -1$. Имеем

$$z(t) = \int_0^t (1 + v^*(\tau))\, d\tau \geqslant 0 \tag{2.3}$$

$$y^{\cdot\cdot} = (x_2^*)^2 x_3^* / (1 + (x_3^*)^2)^2 - (x_2^\circ)^2 x_3^\circ / (1 + (x_3^\circ)^2)^2 \tag{2.4}$$

$$(y(t) = x_3^*(t) - x_3^\circ(t), \quad z(t) = x_2^*(t) - x_2^\circ(t))$$

Перегруппируем члены в правой части (2.4), выделяя $y(t)$, $z(t)$ в качестве сомножителей и обозначая $a(X^*, X^\circ)$, $b(X^*, X^\circ)$ коэффициенты при $y(t)$, $z(t)$.

$$y^{\cdot\cdot} = ay + bz$$

Учитывая, что $y(0) = 0$, $y^\cdot(0) = 0$, получаем

$$y(\cdot)|_{[0,\, t]} = K_t^{-1}(Z(\cdot)), \quad Z(t) = \int_0^t (t - \tau)\, b(\tau)\, z(\tau)\, d\tau$$

Здесь введен оператор

$$K_t\colon C[0, t] \to C[0, t], \quad 0 < t \leqslant \varepsilon R$$

$$(K_t w)(t) = w(t) - \int_0^t (t - \tau)\, a(\tau)\, w(\tau)\, d\tau$$

который имеет ограниченный обратный.

Следовательно, найдется $C > 0$, что

$$|y(t)| < C\varepsilon \| z(\cdot) \|_{C[0,\, t]} = C\varepsilon z(t) \tag{2.5}$$

Оценим теперь

$$\Delta x_1 = x_1^*(\varepsilon R) - x_1^\circ(\varepsilon R) = \int_0^{\varepsilon R} \left(\frac{x_2^*}{1 + x_3^{*2}} - \frac{x_2^\circ}{1 + x_3^{\circ 2}} \right) dt$$

Выделяя под интегралом члены, содержащие $y(t)$, $z(t)$, с учетом (2.5) и того, что $|x_3^\circ(t)| < O(\varepsilon)$, получим

$$\Delta x_1 \geqslant (1 - O(\varepsilon)) \int_0^{\varepsilon R} z(t)\, dt$$

Теперь из (2.2), (2.3) следует неравенство $T^*(X^\circ(\cdot)) < T^*(X^*(\cdot))$, что невозможно.

Из леммы 1 и тождества

$$\left(t + x_2 + 2\sqrt{x_1 + {}^1\!/_2 x_2^2}\right)\Big|_{t=0}^{t=\varepsilon R} = I$$

$$I = \int_0^{\varepsilon R} F(X)\, dt, \quad F(X) = -x_2 x_3^2 (x_1 + {}^1\!/_2 x_2^2)^{-1/2} (1 + x_3^2)^{-1}$$

выполненного на решениях системы $x_1^\cdot = x_2/(1 + x_3^2)$, $x_2^\cdot = -1$, следует, что задача А2 эквивалентна задаче

$$I \to \inf; \quad x_1^\cdot = x_2/(1 + x_3^2), \quad x_2^\cdot = -1, \quad x_3^\cdot = x_4$$

$$x_4^\cdot = u + x_2^2 x_3/(1 + x_3^2)^2, \quad X(0) = X_0, \quad |u| \leqslant u_0$$

3. Режим учащающихся переключений. *Теорема 1.* Решения X^* задачи А2 с начальными условиями $X_0 \in D_\varepsilon$ имеют участок УП. За конечное время, меньшее εR, непрерывно зависящее от X_0, траектории X^* выходят на особый режим $x_3 = x_4 = 0$ с бесконечным числом переключений управления u. Оптимальное движение завершается участком особой траектории с $u = 0$.

Доказательство. 1°. Оценка сверху оптимального значения функционала в задаче А2. При $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon R$ для произвольной допустимой траектории задачи А2 имеет место включение $X(t) \in D_{C_1\varepsilon}$. Поэтому

$$\max_{X(\cdot)\in M_R} (x_2^2x_3/(1+x_3^2)^2\colon\ 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon R) \leqslant \gamma_0 < C_2\varepsilon$$

Пусть $x^\circ = (x_3^\circ, x_4^\circ)$ — ОТ в задаче

$$T \to \inf;\quad x_3^\cdot = x_4,\quad x_4^\cdot = u,\quad |u| \leqslant u_1 = u_0 - \gamma_0$$
$$x_i(0) = x_{i0},\quad x_i(T) = 0,\quad i = 3, 4$$

Рассмотрим множество $K(r) = \{x_3, x_4 \mid |x_3| + (2u_1)^{-1}x_4^2 \leqslant r\}$. Тогда, если $X_0 \in D_\varepsilon$, то $(x_{30}, x_{40}) \in K(\lambda\varepsilon^2)$, $\lambda = 1 + (2u_1)^{-1}$. Пусть $(x_{30}, x_{40}) \in K(r)$, $r \leqslant \lambda\varepsilon^2$. Время τ° прихода $x^\circ(\cdot)$ в точку $(0, 0)$ оценивается сверху величиной $C_3\sqrt{r}$. Кроме того, $x^\circ(t) \in K(r)$ для $t \in [0, \tau^\circ]$. Обозначим $X^\circ(\cdot)$ допустимую траекторию в задаче А2, проекция которой на пространство x_3, x_4 совпадает с $x^\circ(\cdot)$. Тогда

$$\inf_{X(\cdot)\in M_R} I \leqslant (r^2 + O(\varepsilon))\,(A + {}^1/_2B)^{-1/_2}\int\limits_0^{\tau^\circ} (-x_2^\circ)\,dt \leqslant sr^{5/_2} \tag{3.1}$$

при некотором $s > 0$, которое можно выбрать не зависящим от R.

2°. Оценка снизу оптимального значения функционала в задаче А2. В области $\Omega_1 = \{x_3, x_4 \mid |x_3| \leqslant {}^1/_2r\} \setminus K(r)$ компонента фазовой скорости $x_3^\cdot = x_4$ отделена от нуля: $|x_3^\cdot| \geqslant \sqrt{ru_1}$, поэтому время пребывания произвольной допустимой траектории в области Ω_1 оценивается так:

$$\max_{X(\cdot)\in M_R} (\tau\colon\ (x_3, x_4)(t) \in \Omega_1, t \in [0, \tau]) \leqslant \sqrt{r/u_1} < {}^5/_4\sqrt{r/u_0}$$

Пусть $X(\cdot)$ — произвольная допустимая в задаче А2 траектория, такая, что $x_3(0) = {}^1/_2r \operatorname{sgn} x_4(0)$. Тогда

$$\inf_{X(\cdot)\in M_R} (\tau > 0\colon\ (x_3, x_4)(\tau) \notin \Omega_2) \geqslant 2\sqrt{r/u_1}/(u_0 + \gamma_0) > \tag{3.2}$$
$$> {}^3/_2\sqrt{r/u_0},\quad \Omega_2 = \{x_3, x_4 \mid |x_3| \geqslant {}^1/_2r\} \setminus K(r)$$

Пусть X^* — ОТ задачи А2, $X^*(0) \in D_\varepsilon$, $(x_3^*, x_4^*)(0) \in K(r)$. Оценим время τ попадания X^* в область $K({}^1/_2r)$, т. е. предположим, что $(x_3^*, x_4^*)(t) \notin K({}^1/_2r)$ при $t \in [0, \tau]$ $(\tau \leqslant \varepsilon R)$. Пусть n — число пересечений траектории X^* с плоскостями $x_3 = {}^1/_2r \operatorname{sgn} x_4$ при $t \in [0, \tau]$. Обозначим $\mu = \{t \in [0, \tau] \mid |x_3^*(t)| \leqslant {}^1/_2r\}$, $\nu = [0, \tau] \setminus \mu$. В силу (3.2) имеем $\tau > {}^3/_2(n-1)\sqrt{r/u_0}$. Следовательно,

$$n < 1 + {}^2/_3\tau\sqrt{u_0/r},\quad \operatorname{mes}\mu < {}^5/_4n\sqrt{r/u_0} \leqslant {}^5/_4\sqrt{r/u_0} + {}^5/_6\tau,$$
$$\operatorname{mes}\nu \geqslant {}^1/_6\tau - {}^5/_4\sqrt{r/u_0}$$

В силу (3.1)

$$\int\limits_0^\tau F^*\,dt \leqslant sr^{5/_2},\quad F^* = F(X^*) \tag{3.3}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_0^\tau F^*\,dt \geqslant \int\limits_\nu F^*\,dt \geqslant Q_1r^2\operatorname{mes}\nu \geqslant Q_2r^2\tau - Q_3r^{5/_2} \tag{3.4}$$

при некоторых $Q_i > 0$, не зависящих от R. Из (3.3), (3.4) следует, что $\tau < Q\sqrt{r}$.

Итак, не позднее чем через время $Q\sqrt{r}$, значение r уменьшится в 2 раза, через время $Q\sqrt{{}^1/_2r}$ оно уменьшится еще в 2 раза и так далее. Тем самым при $r < \lambda\varepsilon^2$ время попадания ОТ X^* с начальными условиями $X_0 \in$

$\in D_\varepsilon$ на плоскость $x_3 = x_4 = 0$ оценивается сверху суммой геометрической прогрессии:

$$\tau < Q(\sqrt{r} + \sqrt{2^{-1}r} + \ldots + \sqrt{2^{-n}r} + \ldots) = \frac{Q\sqrt{r}}{1 - 2^{-1/2}} \leqslant Q^*\varepsilon$$

Выберем $R > Q^*$. Тогда $\tau < \varepsilon R$ и в силу замечания 1 ОТ в задаче А2 оказывается ОТ в задаче А1. Итак показано, что ОТ X^* задачи А1 за время, меньшее εR, непрерывно зависящее от начальных условий $X_0 \in D_\varepsilon$, попадает на плоскость π.

3°. Порядок особых ОТ. Покажем, что ОТ задачи А1 с $X_0 \in D_\varepsilon$ имеют участки УП. Для этого достаточно показать, что особые по u ОТ задачи А1, принадлежащие D_ε, имеют четный порядок (определение порядка особой траектории см. в [11]).

Рассмотрим систему уравнений принципа максимума Понтрягина [12] для задачи А1:

$$(3.5) \qquad \begin{aligned} &\psi_1^{\cdot} = 0, \quad \psi_2^{\cdot} = -\psi_1/(1 + x_3^2) - 2x_2x_3\psi_4/(1 + x_3^2)^2 \\ &\psi_3^{\cdot} = 2\psi_1x_2x_3/(1 + x_3^2)^2 - x_2^2(1 - 3x_3^2)\psi_4/(1 + x_3^2)^3 \\ &\psi_4^{\cdot} = -\psi_3, \quad x_1^{\cdot} = x_2/(1 + x_3^2), \quad x_2^{\cdot} = v^* \\ &x_3^{\cdot} = x_4, \quad x_4^{\cdot} = u^* + x_2^2x_3/(1 + x_3^2)^2 \\ &\max_{|u|\leqslant u_0} u\psi_4(t) = u^*(t)\psi_4(t), \quad \max_{|v|\leqslant 1} v\psi_2(t) = v^*(t)\psi_2(t) \end{aligned}$$

Вычислим особые по u траектории, лежащие в D_ε. Пусть $\psi_4(t) = 0$ на некотором участке (τ_0, τ_1), тогда $\psi_3(t) = 0$. Дифференцируя тождество $\psi_3 = 0$ в силу системы уравнений (3.5), получаем $x_2x_3\psi_1 = 0$. Из леммы 1 следует, что $x_2 \neq 0$ в D_ε. Если $\psi_1 = 0$, то $\psi_2 = \text{const} \neq 0$ и оптимальное управление u^* постоянно вопреки лемме 1. Поэтому $\varphi_1 \neq 0$ и тогда $x_3 = x_4 = u^* = 0$. Дифференцируя равенство $H_1 = \psi_4$ в силу системы (3.5), убеждаемся, что на участке особого управления

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^kH_1}{dt^k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3; \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{d^4H_1}{dt^4} = 2x_2\psi_1 \neq 0$$

Следовательно, порядок особой экстремали равен двум. Теперь справедливость исходного утверждения следует из того, что особая ОТ четного порядка не может сопрягаться с кусочно-гладкой неособой ОТ, если управление разрывно в точке сопряжения [11]. Теорема 1 доказана.

4. Гладкость поверхности переключения. *Теорема 2.* У задачи А1 имеется двухпараметрический набор семейств экстремалей $N_{\alpha,\beta}$ следующего вида. При фиксированных значениях α, β траектории семейства $N_{\alpha,\beta}$ проходят через точку $X_{\alpha,\beta} = (\alpha, \beta, 0, 0) \in D_\varepsilon$ и содержат участок УП. Точки переключений траекторий $N_{\alpha,\beta}$ при фиксированном $X_{\alpha,\beta}$ образуют гладкую вне π одномерную кривую. Множество P точек переключений для всех траекторий $N_{\alpha,\beta}$ при $X_{\alpha,\beta} \in D_\varepsilon$ — трехмерная поверхность, гладкая всюду, кроме, быть может, точек $P \cap \pi$.

Доказательство. Положим для краткости $u_0 = 1$. Будем искать семейство $N_{\alpha,\beta}$ траекторий системы (3.5), проходящих через точку

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = x_4 = \psi_3 = \psi_4 = 0$$
$$\psi_1 = -1, \quad \psi_2 = -\beta - \sqrt{\alpha + {}^1/_2\beta^2}$$

Рассмотрим отображение последования Φ поверхности $\Sigma = \{\xi = (\Psi, X) \mid \psi_4 = 0\}$ в себя, сопоставляющее с точкой $\xi_0 \in \Sigma$ точку $\xi_1 = \Phi\xi_0 \in \Sigma$ пересечения траектории $\xi(t, \xi_0)$, $\xi(0, \xi_0) = \xi_0$, системы (3.5) с поверхностью Σ при минимальном по модулю отрицательном t. Обозначим

$\tau(\xi_0)$ минимальный по модулю отрицательный корень уравнения $\psi_4(\tau, \xi_0) = 0$.

Вместо переменных $\xi = (\Psi, X)$ введем переменные $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ по формулам

$$
\begin{aligned}
(4.1)\qquad & x_1 = \alpha + u\lambda_1\lambda_3, \quad x_2 = \beta + u\lambda_1\lambda_4 \\
& x_3 = -u\lambda_1{}^2\lambda_2, \quad x_4 = \lambda_1, \quad \psi_2 = -\beta - \sqrt{\alpha + {}^1/_2\beta^2} + u\lambda_1\lambda_6, \\
& \psi_3 = \lambda_1{}^3\lambda_5, \quad u = \operatorname{sgn} \lambda_1
\end{aligned}
$$

Эти формулы задают один из вариантов разрешения особенности отображения Φ: вместо точки $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $\psi_2 = -\beta - \sqrt{\alpha + {}^1/_2\beta^2}$, $\psi_3 = 0$, $\psi_4 = 0$ вклеивается плоскость $\lambda_1 = 0$.

Будем искать кривую переключения на решениях семейства $N_{\alpha,\beta}$, исходя из того, что она должна быть инвариантной кривой отображения Φ. Перепишем уравнения (3.5) в виде интегральных уравнений, после чего сделаем замену (4.1). Решение уравнения $\psi_4(\tau, \xi_0) = 0$ будем искать в виде $\tau = u\lambda_1 s$. Условимся через $O_k(\varepsilon)$ обозначать функцию от Λ, такую, что $\| O_k(\varepsilon) \|_{C^k(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ (где Ω — произвольная компактная область R^6, соответствующая D_ε при замене (4.1)). Пусть $\Lambda^1 = \Phi(\Lambda)$. Тогда получаем

$$
\begin{aligned}
(4.2)\qquad & \lambda_1{}^1 = (1 + s)\lambda_1 + O_1(\varepsilon), \quad \lambda_2{}^1 = (-\lambda_2 + s + {}^1/_2 s^2) \times \\
& \times (1 + s)^{-2} + O_1(\varepsilon), \quad \lambda_3{}^1 = -(\lambda_3 + \beta s + u\lambda_1(\lambda_4 s - \\
& - {}^1/_2 s^2))(1 + s)^{-1} + O_1(\varepsilon), \quad \lambda_4{}^1 = (-\lambda_4 + s)(1 + s)^{-1} + \\
& + O_1(\varepsilon), \quad \lambda_5{}^1 = (\lambda_5 + \beta(2\lambda_2 s - s^2 - {}^1/_3 s^3) + \\
& + u\lambda_1(2\lambda_2\lambda_4 s - (\lambda_2 + \lambda_4)s^2 - {}^1/_3(2 - \lambda_4)s^3 + \\
& + {}^1/_4 s^4))(1 + s)^{-3} + O_1(\varepsilon), \quad \lambda_6{}^1 = -(\lambda_6 + s)(1 + s)^{-1} + \\
& + O_1(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Для $s = s(\Lambda)$ получаем уравнение

$$
\begin{aligned}
(4.3)\qquad & 0 = -\lambda_5 + \beta(-\lambda_2 s + {}^1/_3 s^2 + {}^1/_{12} s^3) + u\lambda_1(-\lambda_2\lambda_4 s + {}^1/_3(\lambda_2 + \\
& + \lambda_4)s^2 + {}^1/_{12}(\lambda_4 - 2)s^3 - {}^1/_{20} s^4) + O_1(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что ограничение отображения $\Phi|_{\lambda_1=0}$ имеет единственную неподвижную точку $\Lambda^\circ = \Lambda^\circ(\alpha, \beta)$ с $\lambda_2{}^\circ > 0$.

Фиксируем α, β: $|\alpha - A| < \varepsilon$, $|\beta - B| < \varepsilon$. Для любой достаточно малой окрестности U_0 точки Λ° ограничение $\Phi^2|_{U_0 \cap \{\Lambda : \lambda_1 > 0\}}$ и $\Phi^2|_{U_0 \cap \{\Lambda : \lambda_1 < 0\}}$ (где $\Phi^2(\Lambda) = \Phi(\Phi(\Lambda))$) очевидным образом продолжаются до диффеоморфизма на всю окрестность U_0. Обозначим эти продолжения $\Phi_+{}^2$ и $\Phi_-{}^2$. Непосредственно проверяется, что они имеют в неподвижной точке $\Lambda^\circ(\alpha, \beta)$ седловую структуру: у якобианов $D\Phi_\pm{}^2(\Lambda^\circ(\alpha, \beta))$ имеется по одному собственному значению, большему единицы, с собственными векторами $\varphi_\pm$, а все остальные собственные значения по модулю меньше единицы. По теореме об инвариантном многообразии для диффеоморфизма [13] отображение Φ имеет одномерное неустойчивое инвариантное многообразие $\Gamma_{\alpha,\beta}$, гладкое вне точки $\lambda_1 = 0$, касающееся собственных векторов φ_+ при $\lambda_1 > 0$ и φ_- при $\lambda_1 < 0$. Можно показать, что множество $\Gamma = \bigcup\limits_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha,\beta}$ — трехмерное многообразие вида $\Lambda = f(\lambda_1, \alpha, \beta)$ класса C^1 вне плоскости $\lambda_1 = 0$.

Обозначим $N_{\alpha,\beta}$ семейство траекторий системы (3.5) с начальными условиями, соответствующими по формулам (4.1) точкам многообразия Γ. $N_{\alpha,\beta}$ обладает требуемыми в формулировке теоремы свойствами. Теорема 2 доказана.

Лемма 2. Пусть $\lambda^*(\lambda, \alpha, \beta)$ — компонента λ_1 вектора $\Phi^{-1}(\Lambda)$, $\Lambda = f(\lambda, \alpha, \beta)$. Тогда

$$|\partial\lambda^*/\partial\lambda| < 1/4, \quad |\partial\lambda^*/\partial\alpha| = O(\varepsilon), \quad |\partial\lambda^*/\partial\beta| = O(\varepsilon)$$

Утверждение леммы получаем, дифференцируя отображение (4.2), (4.3) в точке $\Lambda^\circ(\alpha, \beta)$.

5. Доказательство оптимальности семейства экстремалей. *Теорема 3.* Траектории семейства $N_{\alpha,\beta}$ оптимальны в задаче А1.

Доказательство. Будем использовать обозначения теоремы 2. Видно, что на построенных экстремалях $H = \sqrt{\alpha + 1/2\beta^2} \neq 0$. Покажем, что поле сопряженных переменных $\Psi/H = (\psi_1/H, \ldots, \psi_4/H)$, соответствующее $N_{\alpha,\beta}$, потенциально в области D_ε.

По теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных функция Ψ/H непрерывна в D_ε. Пусть P — поверхность переключения траекторий $N_{\alpha,\beta}$. Рассмотрим произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур $\gamma^\circ \subset P \setminus \pi$. Покажем, что

$$\oint_{\gamma^0} \frac{\psi}{H} dX = 0 \tag{5.1}$$

Обозначим Φ^* отображение последования Φ^*: $P \to P$, индуцированное отображением Φ^{-1}. По теореме об интегральном инварианте Пуанкаре — Картана [14] имеем

$$\oint_{\gamma^n} \frac{\psi}{H} dX = \oint_{\gamma^\circ} \frac{\psi}{H} dX, \quad \gamma^n = \Phi^*\gamma^{n-1}$$

Выберем в качестве системы координат на P значения $(\lambda_1, \alpha, \beta)$. В этих координатах $\Phi^*(\lambda_1, \alpha, \beta) = (\lambda^*(\lambda_1, \alpha, \beta), \alpha, \beta)$.

Положим $\mathrm{pr}(\lambda_1, \alpha, \beta) = (0, \alpha, \beta)$. Очевидно, достаточно рассмотреть только те γ°, для которых $\mathrm{pr}\,\gamma^\circ$ — кусочно-гладкая кривая. По лемме 2 $\gamma^n \to \mathrm{pr}\,\gamma^\circ$ в метрике C^1 при $n \to \infty$. Ограничение $\Psi/H|_\pi$ совпадает с соответствующим полем сопряженных переменных в простейшей задаче быстродействия на плоскости π. Как известно, это поле потенциально. Следовательно, справедливо равенство (5.1). Отсюда и из непрерывности Ψ/H следует, что Ψ/H потенциально в D_ε.

Пусть теперь X^* — ОТ в задаче А1, $X^*(0) \in D_\varepsilon$, а X° — траектория семейства $N_{\alpha,\beta}$ с $X^\circ(0) = X^*(0)$. Рассмотрим контур в $D_\varepsilon \cup \pi$, составленный этими траекториями. В силу потенциальности Ψ/H имеем

$$\oint_{X^*} \frac{\psi}{H} dX = \oint_{X^\circ} \frac{\psi}{H} dX$$

Из принципа максимума Понтрягина следует, что правая часть этого соотношения равна T°, а левая не превосходит T^*, где T°, T^* — время движения соответственно по X° и X^* до начала координат. Отсюда следует, что $T^\circ \leqslant T^*$, т. е. X° — ОТ. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фуллер А. Т.* Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Тр. 1-го конгр. ИФАК. М.: 1961. Т. 2. С. 584—605.
2. *Борисов В. Ф.* Структурная устойчивость синтеза оптимальных траекторий в задаче Фуллера // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1987. № 4. С. 64—66.
3. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 407 с.
4. *Marchal C.* Chattering arcs and chattering control // J. Optimiz. Theory and Appl. 1973. V. 11. N 5. P. 441—468.

5. *Ryan E. P.* Optimal control for second order saturating system // J. Control and Optimiz. 1979. N 4. P., 549—564.
6. *Brunovsky P., Mallet-Paret J.* Switchings of optimal control and the equation $y^{(4)} + y^{\alpha} \operatorname{sgn} y = 0$, $0 < \alpha < 1$ // Časop. pestov. mat. 1985. roč. 110. N 3. P. 302—313.
7. *Берщанский Я. М.* Сопряжение особых и неособых участков оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1979. № 3. С. 5—11.
8. *Борщевский М. З., Иослович И. В.* К задаче оптимального по быстродействию торможения вращения осесимметричного твердого тела около центра масс// ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 35—42.
9. *Geering H. P., Guzzella L., Hepner S. A., Onder C. H.* Time-optimal motions of robots in assembly tasks // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. AC—31. N 6. P. 512—518.
10. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах оптимального регулирования // Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии. 1959. № 2. С. 25—32.
11. *Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G.* Singular extremals // Topics in Optimization / Ed. Leitmann G. N. Y. 1967. P. 63—103.
12. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
13. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975. 304 с.
14. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.III.1988