

УДК 531.36 + 62—50

ЗАДАЧА О БЫСТРЕЙШЕМ ПОВОРОТЕ МАНИПУЛЯТОРА

Осипов С. Н., Формальский А. М.

Рассматриваются два вида манипуляторов, совершающих пространственные движения. Изучается задача об управлении, при котором разворот манипулятора осуществляется за минимально возможное время.

Повернуть твердое тело вокруг какой-то оси можно тем быстрее, чем меньше его момент инерции относительно этой оси. При управлении манипуляторами возникает задача поворота вокруг оси системы твердых тел. Кроме угла поворота, такая система имеет еще одну управляемую координату, изменяя которую можно менять момент инерции системы относительно оси вращения. В предположении о возможности мгновенного «замораживания» момента инерции системы (о допустимости импульсных управляющих воздействий) в [1,2] (см. также¹) найдены оптимальные по быстродействию режимы управления. В этих режимах поворот манипулятора на целом интервале времени происходит с минимальным моментом инерции относительно оси вращения. Задача разворота манипулятора при наличии ограничений на управление (импульсные управляющие воздействия не допускаются) рассматривается в [3]. На основании численных исследований сделан неверный вывод о том, что в оптимальном движении при конечном числе переключений управления момент инерции также минимален на целом промежутке времени.]

Ниже для некоторого множества краевых конфигураций построено удовлетворяющее принципу максимума Понтрягина управление манипуляторами двух видов при ограниченных управляющих воздействиях. При этом управлении звено манипулятора в процессе разворота совершает колебания около положения, отвечающего минимальному моменту инерции системы относительно оси вращения. Показано, что рассмотренное в [3] движение, содержащее особый режим движения с минимальным моментом инерции, не является оптимальным. Движение, удовлетворяющее принципу максимума, сравнивается с ним. Особый режим в оптимальном движении может быть [4] лишь при бесконечном числе переключений управления.

1. Математическая модель манипулятора с выдвигающейся стрелой. Рассмотрим (фиг. 1) манипулятор, обладающий тремя степенями подвижности (1 — неподвижное основание, 2 — вал, 3 — направляющая, жестко закрепленная на валу, 4 — стрела). Вал может перемещаться в вертикальном направлении и поворачиваться вокруг вертикальной оси. Стрела может перемещаться горизонтально вдоль направляющей. Все элементы конструкции считаются абсолютно твердыми телами. Уравнение, описывающее вертикальное перемещение манипулятора, отщепляется от остальных. Поэтому будем рассматривать только уравнения, описывающие вращение манипулятора и выдвижение стрелы

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (I + mr^2) \varphi'' + 2mrr' \varphi' &= M \\ mr'' - mr\varphi'^2 &= F \end{aligned}$$

Здесь φ — угол поворота вала, r — вынос стрелы, т. е. расстояние от оси поворота до центра масс стрелы (точки 0), m — масса стрелы, I — сумма момента инерции вала с направляющей относительно оси вращения и момента инерции стрелы относительно вертикали, проходящей через

¹ Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н., Каплунов А. А. Оптимизация режимов управления манипуляционными роботами: Препринт № 218. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1983. 72 с.

ее центр масс. Управляющими воздействиями являются момент M относительно оси вращения вала и сила F , осуществляющая выдвижение стрелы. На них наложены ограничения

$$(1.2) \quad |M(t)| \leq M_0, \quad |F(t)| \leq F_0 \quad (M_0, F_0 = \text{const})$$

Пусть в начальный момент времени система покоится в заданном положении

$$(1.3) \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = 0$$

Поставим задачу отыскания управляющих функций $M(t)$, $F(t)$, обеспечивающих перевод манипулятора за минимально возможное время T в заданное конечное состояние

$$(1.4) \quad \varphi(T) = \varphi_T, \quad \dot{\varphi}(T) = 0, \\ r(T) = r_T, \quad \dot{r}(T) = 0$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$(1.5) \quad r' = r(m/I)^{1/2}, \quad \varphi' = \varphi, \\ t' = t(M_0/I)^{1/2} \\ M' = M/M_0, \\ F' = (F/M_0)(I/m)^{1/2}$$

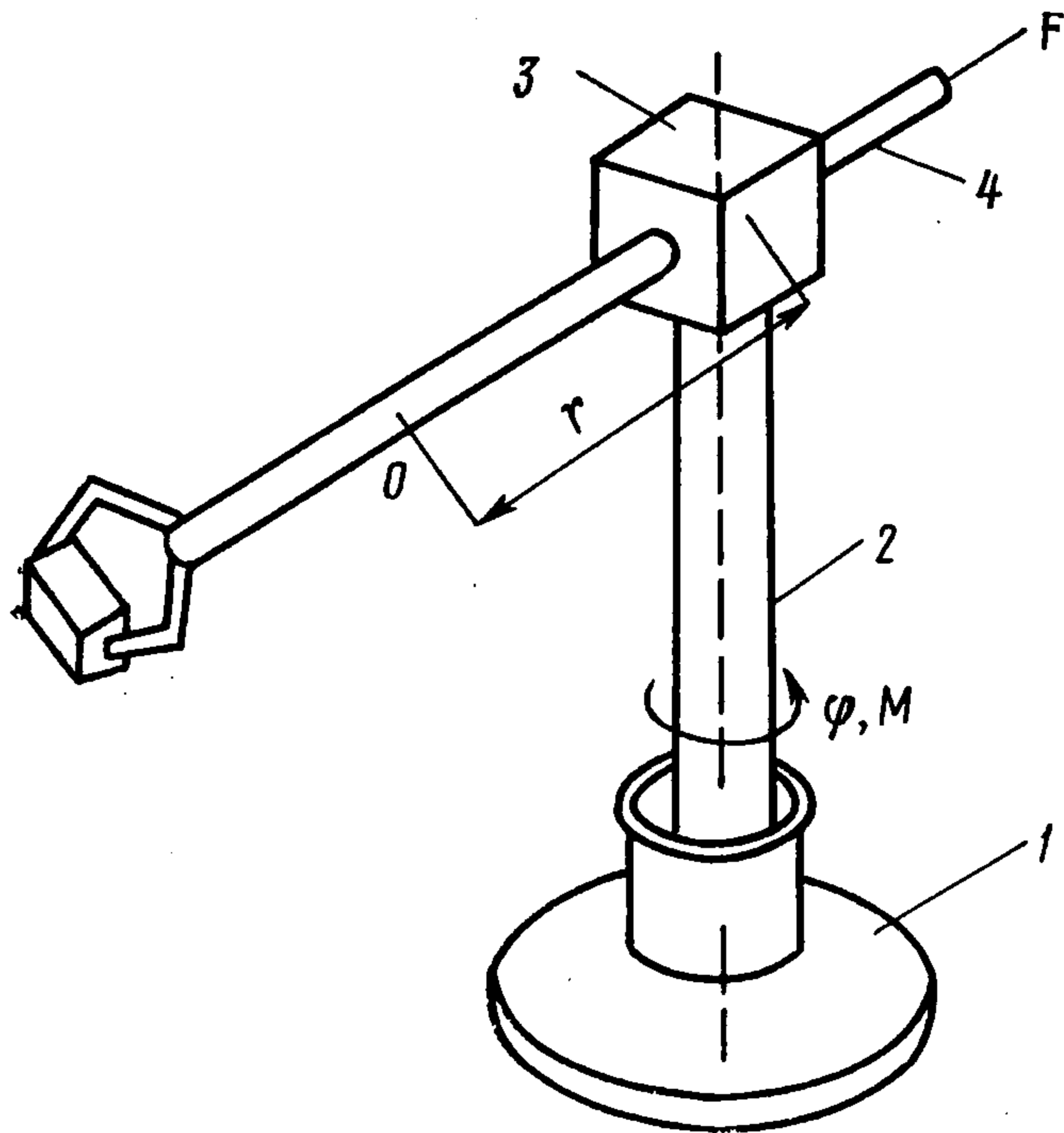
Штрихи в дальнейшем опускаются.

Введем также обозначение

$$(1.6) \quad F_1 = (F_0/M_0)(I/m)^{1/2}$$

Соотношения (1.2) при учете (1.5), (1.6) принимают вид

$$|M(t)| \leq 1, \quad |F(t)| \leq F_1$$



Фиг. 1

Перейдем к новым переменным

$$(1.7) \quad y_1 = \varphi, \quad y_2 = \dot{\varphi}(I + mr^2), \quad y_3 = r, \quad y_4 = \dot{r}$$

Точками здесь обозначается дифференцирование по безразмерному времени, y_2 — момент количества движения системы относительно вертикальной оси.

Уравнения движения (1.1) в форме Коши имеют вид (см. сноску на с. 929)

$$(1.8) \quad y_1' = y_2/(1 + y_3^2), \quad y_2' = M \\ y_3' = y_4, \quad y_4' = y_3 y_2^2/(1 + y_3^2) + F$$

Краевые условия (1.3), (1.4) в переменных (1.7) принимают вид

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = r_0, \quad y_4(0) = 0 \\ y_1(T) = \varphi_T, \quad y_2(T) = 0, \quad y_3(T) = r_T, \quad y_4(T) = 0$$

Рассмотрим случай, когда начальное и конечное положения стрелы совпадают, т. е.

$$(1.9) \quad y_3(0) = y_3(T) \quad (r_0 = r_T)$$

При условии (1.9) краевые конфигурации манипулятора симметричны одна другой относительно плоскости $y_1 = \varphi_T/2$.

Функция Понтрягина [5] имеет вид

$$H = M\psi_2 + F\psi_4 + \frac{y_2\psi_1}{1 + y_3^2} + y_4\psi_3 + \frac{y_3 y_2^2 \psi_4}{(1 + y_3^2)^2}$$

Выпишем систему уравнений для сопряженных переменных

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \psi_1 \dot{} &= 0, \quad \psi_2 \dot{} = \frac{-\psi_1}{1+y_3^2} - \frac{2y_2y_3\psi_4}{(1+y_3^2)^2} \\ \psi_3 \dot{} &= \frac{2y_2y_3\psi_1}{(1+y_3^2)^2} + \frac{y_2^2\psi_4(3y_3^2-1)}{(1+y_3^2)^3}, \quad \psi_4 \dot{} = -\psi_3 \end{aligned}$$

Оптимальное управление должно удовлетворять условиям

$$(1.11) \quad M(t) = \text{sign } \psi_2(t), \quad F(t) = F_1 \text{sign } \psi_4(t)$$

Если $y_i(t)$, $\psi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — решение системы (1.8), (1.10) при каких-то функциях $M(t)$, $F(t)$, то $-y_1(T-t)$, $y_2(T-t)$, $y_3(T-t)$, $-y_4(T-t)$, $\psi_1(T-t)$, $-\psi_2(T-t)$, $-\psi_3(T-t)$, $\psi_4(T-t)$ — также решение этой системы при функциях $-M(T-t)$, $F(T-t)$.

При условии (1.9) будем в дальнейшем искать решение задачи, обладающее свойством симметрии

$$(1.12) \quad \begin{aligned} y_1(t) &= \varphi_T - y_1(T-t), \quad y_2(t) = y_2(T-t) \\ y_3(t) &= y_3(T-t), \quad y_4(t) = -y_4(T-t) \\ M(t) &= -M(T-t), \quad F(t) = F(T-t) \\ \psi_1(t) &= \psi_1(T-t), \quad \psi_2(t) = -\psi_2(T-t) \\ \psi_3(t) &= -\psi_3(T-t), \quad \psi_4(t) = \psi_4(T-t) \end{aligned}$$

Заметим, что взаимной по отношению к сформулированной задаче быстрогодействия является задача максимизации угла поворота $y_1(T)$ при заданном времени T .

2. Упрощенные уравнения движения. Рассмотрим случай, когда в последнем уравнении (1.8) можно пренебречь нелинейным членом, описывающим центробежную силу. Это можно сделать, когда вал вращается медленно и управляющая сила F значительно превышает по абсолютной величине центробежную. Уравнения (1.8) в этом случае принимают вид (см. сноску на с. 929)

$$(2.1) \quad y_1 \dot{} = y_2/(1+y_3^2), \quad y_2 \dot{} = M, \quad y_3 \dot{} = y_4, \quad y_4 \dot{} = F$$

Уравнения для сопряженных переменных становятся такими:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \psi_1 \dot{} &= 0, \quad \psi_2 \dot{} = -\psi_1/(1+y_3^2) \\ \psi_3 \dot{} &= 2y_2y_3\psi_1/(1+y_3^2)^2, \quad \psi_4 \dot{} = -\psi_3 \end{aligned}$$

Последние два уравнения системы (2.1) отщепляются. Благодаря этому исследовать систему (2.1) легче, нежели полную систему (1.8).

Для упрощенных уравнений (2.1) оптимальное управление также описывается формулами (1.11). Из уравнений (2.1), (2.2), (1.11) следует, что при $y_2(0) = y_2(T)$ оптимальное управление $M(t)$ имеет ровно одно переключение, которое происходит в момент $T/2$. Вид управления $F(t)$ зависит от соотношения между параметрами F_1 , φ_T , r_0 .

Момент инерции системы относительно оси вращения вала минимален, когда центр масс стрелы O располагается на этой оси. Движение манипулятора на конечном промежутке времени, при котором центр масс стрелы остается на этой оси вращения, назовем особым (фиг. 2). Соответствующее управление $F(t) = 0$ на этом промежутке также назовем особым. При движении, изображенном на фиг. 2, центр масс стрелы за минимально возможное время t_1 , совмещается с осью вращения вала ($y_3(t_1) = y_4(t_1) = 0$). Из уравнений (2.1) следует, что управление $F(t)$, осуществляющее такое перемещение стрелы, имеет одно переключение в момент

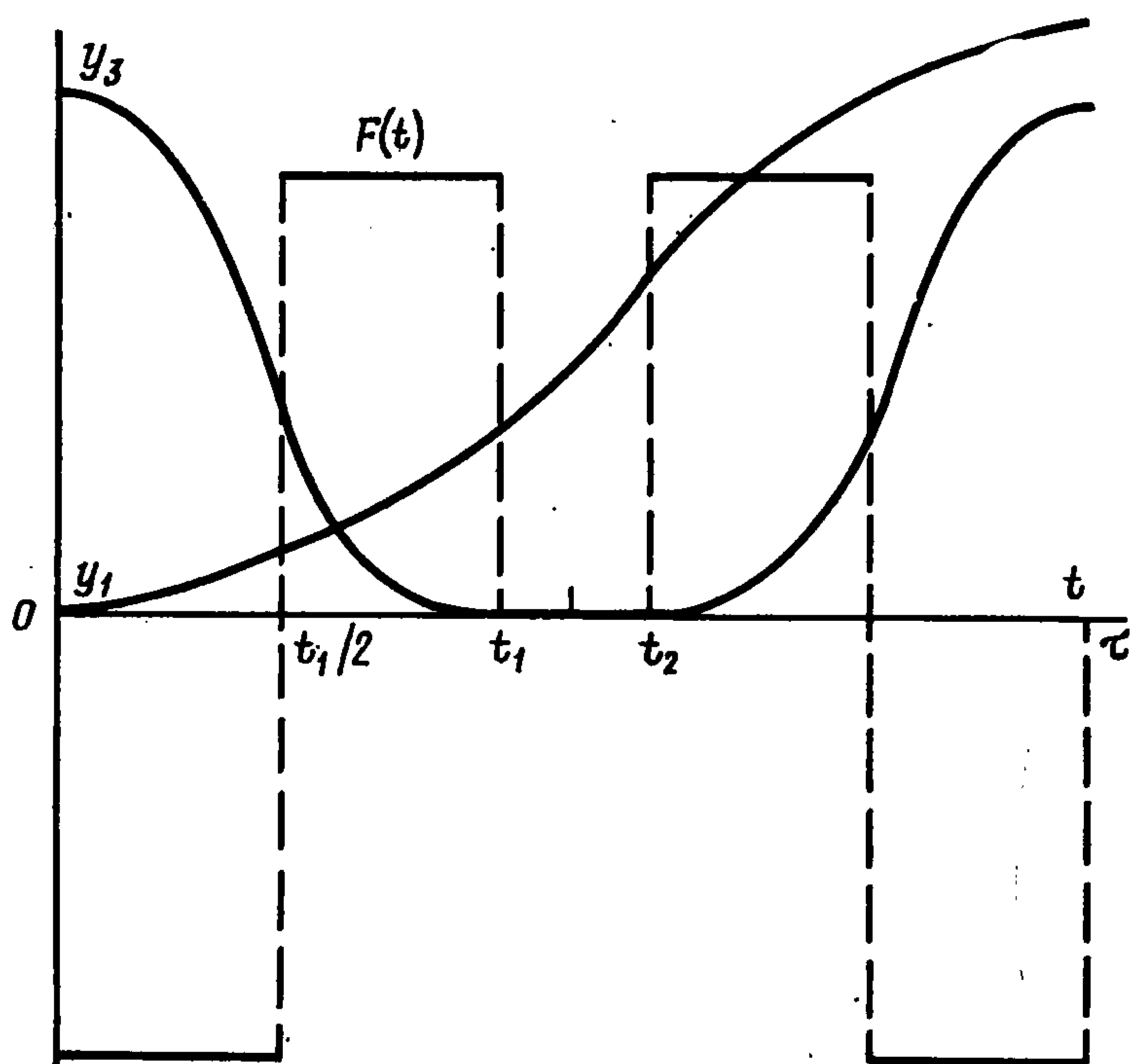
$t_1/2$ (фиг. 2). После такого перемещения поворот вала происходит при неподвижной стреле до момента времени t_2 (особое движение). При $t_2 \leq t \leq \tau$ движение симметрично движению при $0 \leq t \leq t_1$ (см. (1.12)). Управление $M(t)$ имеет одно переключение в момент $\tau/2$.

Необходимым и достаточным условием возможности особого режима является такое соотношение между параметрами F_1 и r_0 , при котором центр масс стрелы в процессе разворота манипулятора на угол φ_T может достичь оси вращения вала при нулевой скорости. Это соотношение получается в результате интегрирования системы (2.1) и имеет вид

$$(2.3) \quad 2\alpha < \varphi_T F_1, \quad \alpha = \arctg r_0 - 2 \arctg \frac{1}{2} r_0 + \sqrt{r_0} \times \\ \times \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + (1 + \sqrt{r_0})^2}{1 + (1 - \sqrt{r_0})^2} + \arctg(\sqrt{r_0} - 1) + \arctg(\sqrt{r_0} + 1) \right]$$

Время движения, показанного на фиг. 2, определяется формулой $\tau = 2 [\varphi_T + 4r_0/F_1 - 2\alpha/F_1]^{1/2}$

В работе [3] для системы уравнений (1.8) сделано неверное утверждение об оптимальности по быстродействию движения, аналогичного изображенному на фиг. 2. Пока-



Фиг. 2

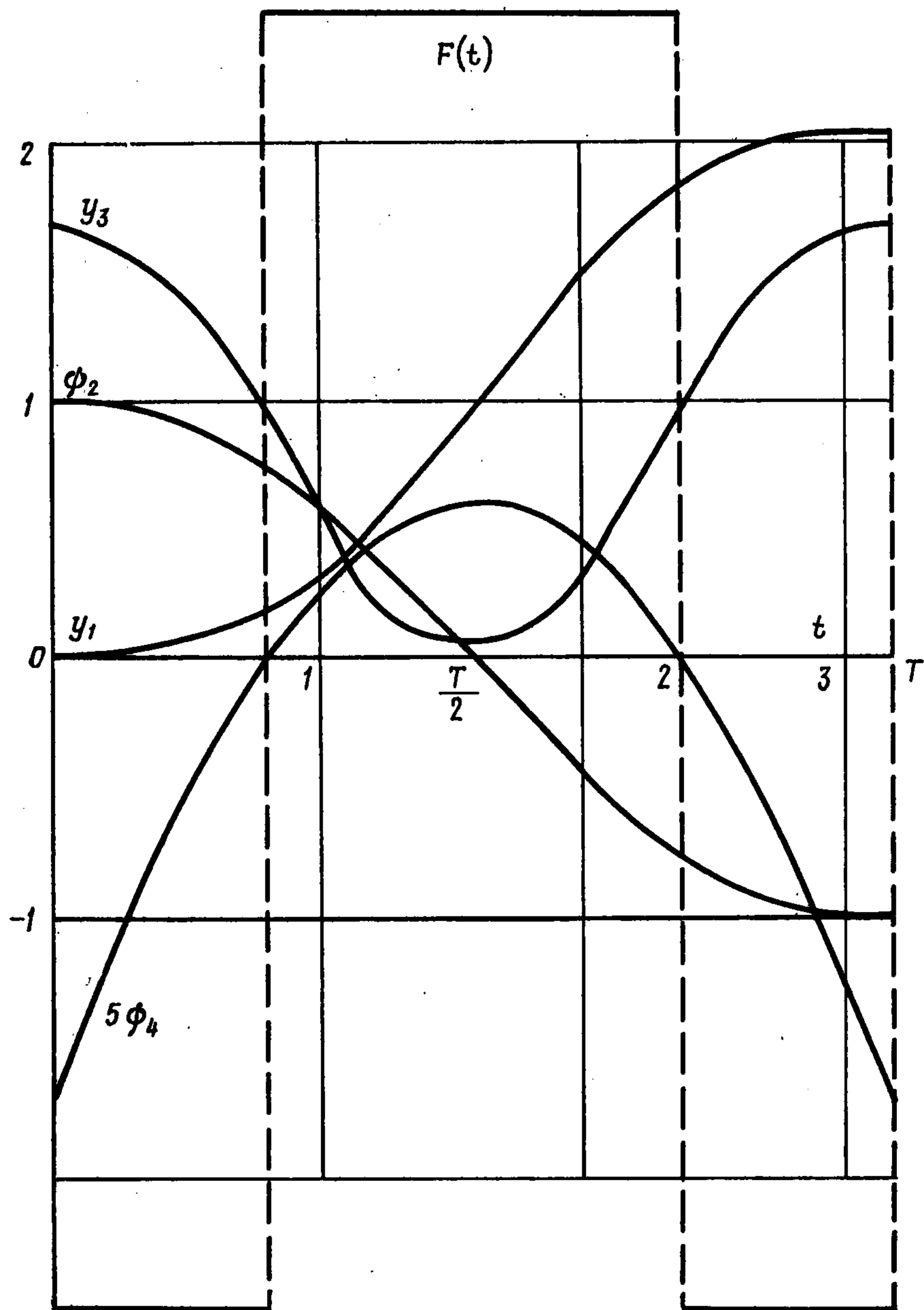
жем сначала, что такое движение не удовлетворяет принципу максимума для упрощенной системы (2.1) и, следовательно, не является для нее оптимальным. (В п. 3 доказывается, что такое движение не является оптимальным и для исходной системы (1.8).)

Допустим, что оно удовлетворяет принципу максимума. Управление $M(t)$ имеет одно переключение, следовательно, если оно удовлетворяет первому из условий (1.11), то $\psi_1 = \text{const} > 0$, $y_2(t) > 0$ при $0 \leq t \leq \tau$.

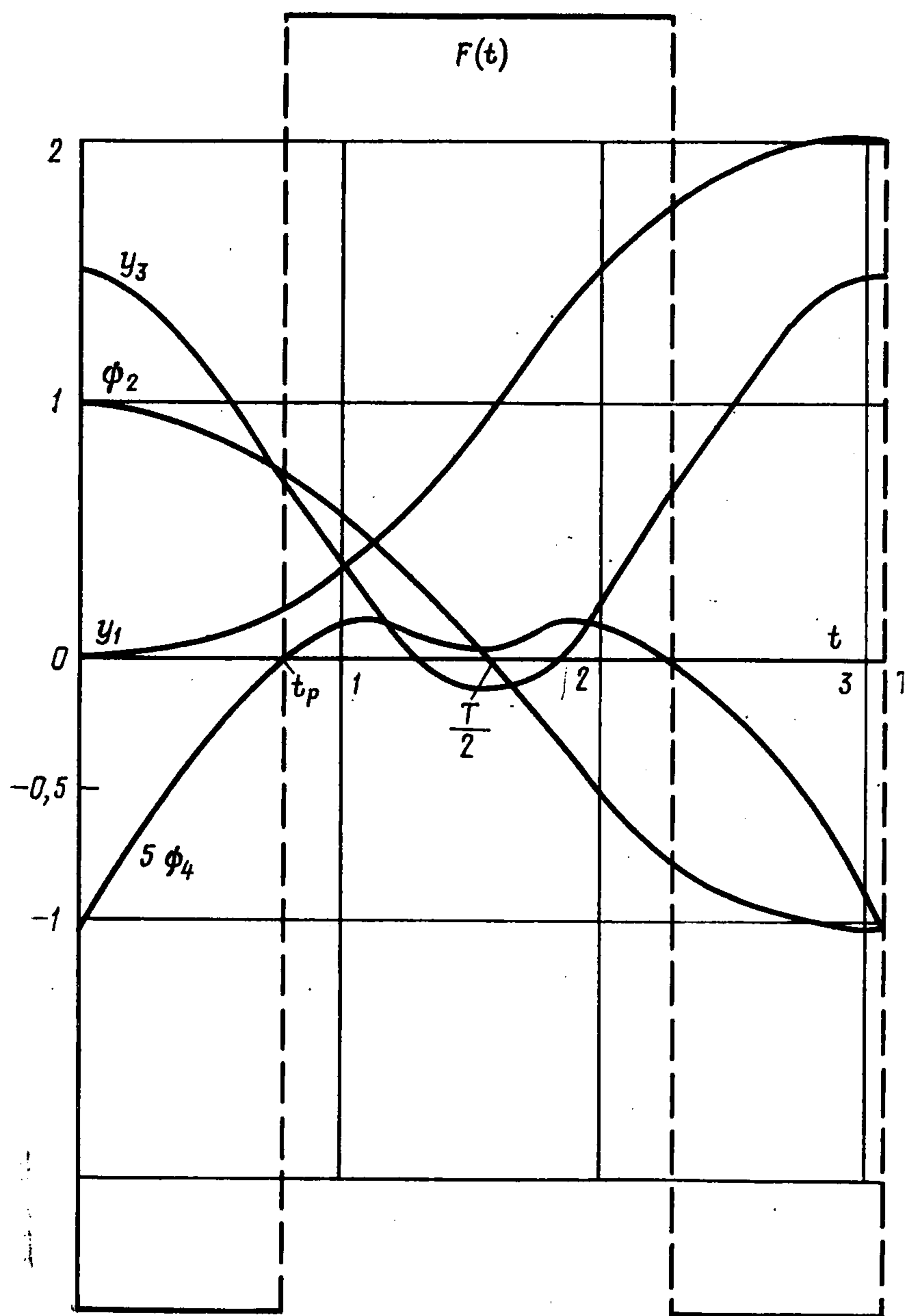
В рассматриваемом движении величина $y_3 = 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2$ и $y_3 > 0$ при $t \in [t_1, t_2]$. Следовательно, $\psi_3'(t) \equiv 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2$ и $\psi_3'(t) > 0$ при $t \in [t_1, t_2]$. Решения уравнений (2.2) обладают свойством симметрии (1.12), поскольку таким свойством обладает рассматриваемое движение. А тогда при $t_1 \leq t \leq t_2$ функция $\psi_3(t) \equiv 0$, при $0 \leq t < t_1$ функция $\psi_3(t)$ строго монотонно возрастает и отрицательна, а при $t_2 < t \leq \tau$ она строго монотонно возрастает и положительна.

Из последнего уравнения системы (2.2) следует, что функция $\psi_4(t)$, будучи симметричной относительно прямой $t = \tau/2$, либо нигде не обращается в нуль, либо обращается в нуль только при $t_1 \leq t \leq t_2$ (тождественно), либо имеет только два изолированных нуля. Ни в одном из этих трех мыслимых случаев управление $F(t)$, показанное на фиг. 2, не удовлетворяет второму из условий (1.11), а значит, принципу максимума.

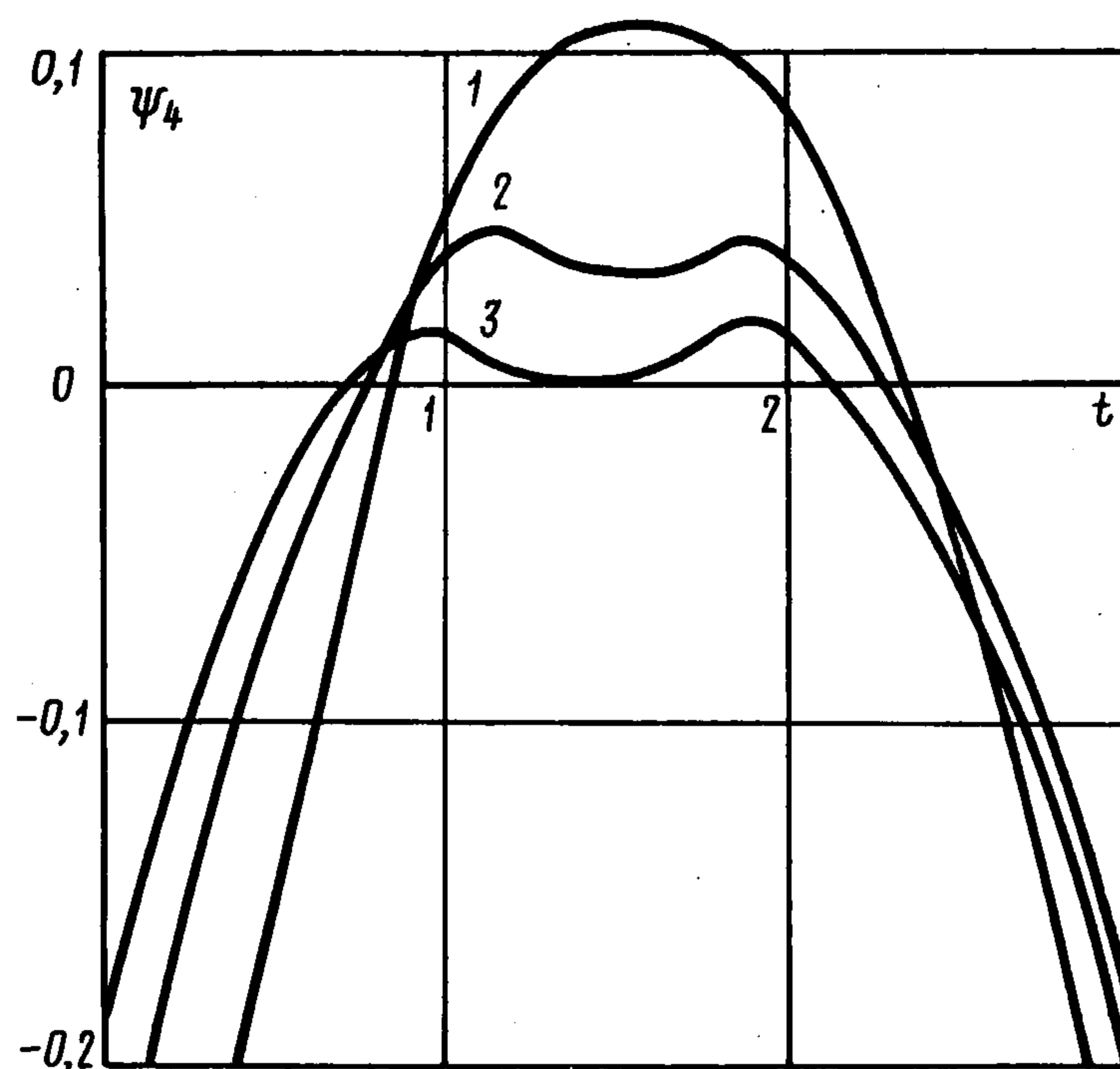
При некоторых значениях параметра $F_1 \in [0,5; 12]$, $\varphi_T = 2$ и ряде значений r_0 численно построено управление $F(t)$, $M(t)$ и соответствующее ему движение, удовлетворяющие принципу максимума. Алгоритм построе-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ния такого движения состоит в следующем. Вначале строится симметричное относительно прямой $t = T/2$ допустимое управление $F(t)$ с тремя интервалами постоянства и $M(t)$ (фиг. 3, 4), переводящее манипулятор из начального положения в конечное. Затем при помощи условий $\psi_2(T/2) = 0$, $\psi_3(T/2) = 0$, $\psi_4(t_p) = 0$, где t_p — момент первого переключения управления, отыскиваются численно начальные значения сопряженных переменных. Путем совместного интегрирования систем (2.1), (2.2) убеждаемся в том, что построенное управление удовлетворяет принципу максимума.

Опишем результаты численного исследования для случая, когда $F_1 = 2,5$.

При $r_0 > 1,553$ условие (2.3) не выполняется и движение, показанное на фиг. 2, невозможно. Движение, удовлетворяющее принципу максимума при таких значениях r_0 , управление $F(t)$ и сопряженные переменные $\psi_2(t)$, $\psi_4(t)$ изображены на фиг. 3 ($r_0 = 1,63$). Центр масс стрелы в этом движении не достигает оси вращения вала.

При $r_0 \approx 1,553$ соотношение (2.3) превращается в равенство. В движении, удовлетворяющем принципу максимума, $r(T/2) = 0$, производные $\psi_4'(T/2) = \psi_4''(T/2) = \psi_4'''(T/2) = 0$.

При дальнейшем уменьшении r_0 в соответствующем движении происходит колебание центра масс стрелы относительно вертикали. В графике функции $\psi_4(t)$ при $t = T/2$ появляется «ямка». При $r_0 = 1,41$ соответствующее движение и управление $F(t)$ показаны на фиг. 4; время $T = 3,091$; движение, включающее особый участок, происходит за время $\tau = 3,096$. Первое переключение показанного на фиг. 4 управления $F(t)$ происходит позже первого переключения изображенного на фиг. 2 управления с особым участком ($t_p > t_1/2$). При дальнейшем уменьшении величины r_0 ямка в графике функции $\psi_4(t)$ увеличивается и при значении $r_0 \approx 1,389$ дно ямки касается оси абсцисс ($\psi_4(T/2) = 0$). Изменение характера функции $\psi_4(t)$ с уменьшением величины r_0 видно на фиг. 5, на которой построены кривые при $r_0 = 1,63$; $1,47$; $1,389$. Поведение функции $\psi_4(t)$ подсказывает, что при $r_0 < 1,389$ должны появиться дополнительные переключения управления $F(t)$ (численные исследования при $r_0 < 1,389$ не проводились).

Некоторые из полученных численных результатов представлены в таблице. В первых четырех строках таблицы содержатся результаты расчетов для упрощенной системы, в двух последних — результаты расчетов для полной системы, описанные в п. 3. В этой таблице r_{01} — верхняя граница значений r_0 , при которых возможен особый режим, r_{02} — нижняя граница значений r_0 , при которых оптимальное управление содержит три интервала постоянства, r_0' — значение r_0 , при котором разность $\tau - T$

F_1	r_{01}	r_{02}	r_0'	T	$(\tau - T) \cdot 10^3$
1	0,521	0,482	0,487	2,8778	0,6
2,5	1,553	1,389	1,41	3,091	5
6,7	6,85	5,77	5,85	3,807	28
11,7	17,49	14,56	14,69	4,529	43
1	0,525	0,478	0,488	2,87880	0,58
2,5	1,61	1,388	1,45	3,10744	3,5

для заданного F_1 максимальна, τ и T — время особого движения и оптимальное время при $r_0 = r_0'$. Из таблицы видно, что с ростом F_1 разность $\tau - T$ растет. При $F_1 = 11,7$ она составляет около 1% от времени τ .

Для упрощенной системы уравнений задача максимизации угла поворота, взаимная по отношению к рассматриваемой задаче быстрогодействия, состоит в максимизации интеграла (при фиксированном T)

$$\int_0^T \frac{f(\xi) d\xi}{1 + y_3^2(\xi)}, \quad f(t) = \begin{cases} t & , 0 \leq t \leq T/2 \\ T - t & , T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

где $y_3(t)$ — решение уравнения $y_3'' = F$, при $|F(t)| \leq F_1$ и граничных условиях $y_3(0) = y_3(T) = r_0$, $y_3'(0) = y_3'(T) = 0$.

Сформулированная задача напоминает задачу Фуллера [6,7], в которой при достаточно малых значениях r_0 оптимальное движение содержит особый режим, «окруженный» с обеих сторон «четтеринг»-режимами. В каждом из этих четтеринг-режимов управление имеет бесконечное число моментов переключения, накапливающихся к точке сгущения. В [4] доказано, что в задаче быстрогодействия при достаточно малых значениях r_0 также имеет место подобная ситуация.

3. Полные уравнения. Рассмотрим исходную систему уравнений (1.8) и движение, аналогичное показанному на фиг. 2. При этом движении управление $M(t)$ переключается один раз в момент $\tau/2$. Центр масс стрелы за минимально возможное время t_1 совмещается с осью вращения вала. Такое движение не может быть оптимальным по времени (в работе [3] утверждается обратное), так как не выполняется необходимое условие оптимальности сопряжения особого и неособого участков управления $F(t)$ в точках его разрыва t_1, t_2 ([8], с. 239; [9], с. 234; [10, 11]). Это условие выражается следующим образом. Для оптимальности сопряжения необходимо, чтобы свое первое отрицательное значение в точке сопряжения особого и неособого управлений величина

$$L = (-1)^k \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H}{\partial F} \right)$$

принимала при нечетном значении индекса k . Аналитическое вычисление соответствующих производных показывает, что на отрезке $[t_1, t_2]$, $L = 0$ при $k = 1$ и $L = -2y_2\psi_1$ при $k = 2$. Поскольку $y_2(t) > 0$ и $\psi_1 = \text{const} > 0$ при $0 \leq t \leq \tau$, то $L < 0$ при $k = 2$.

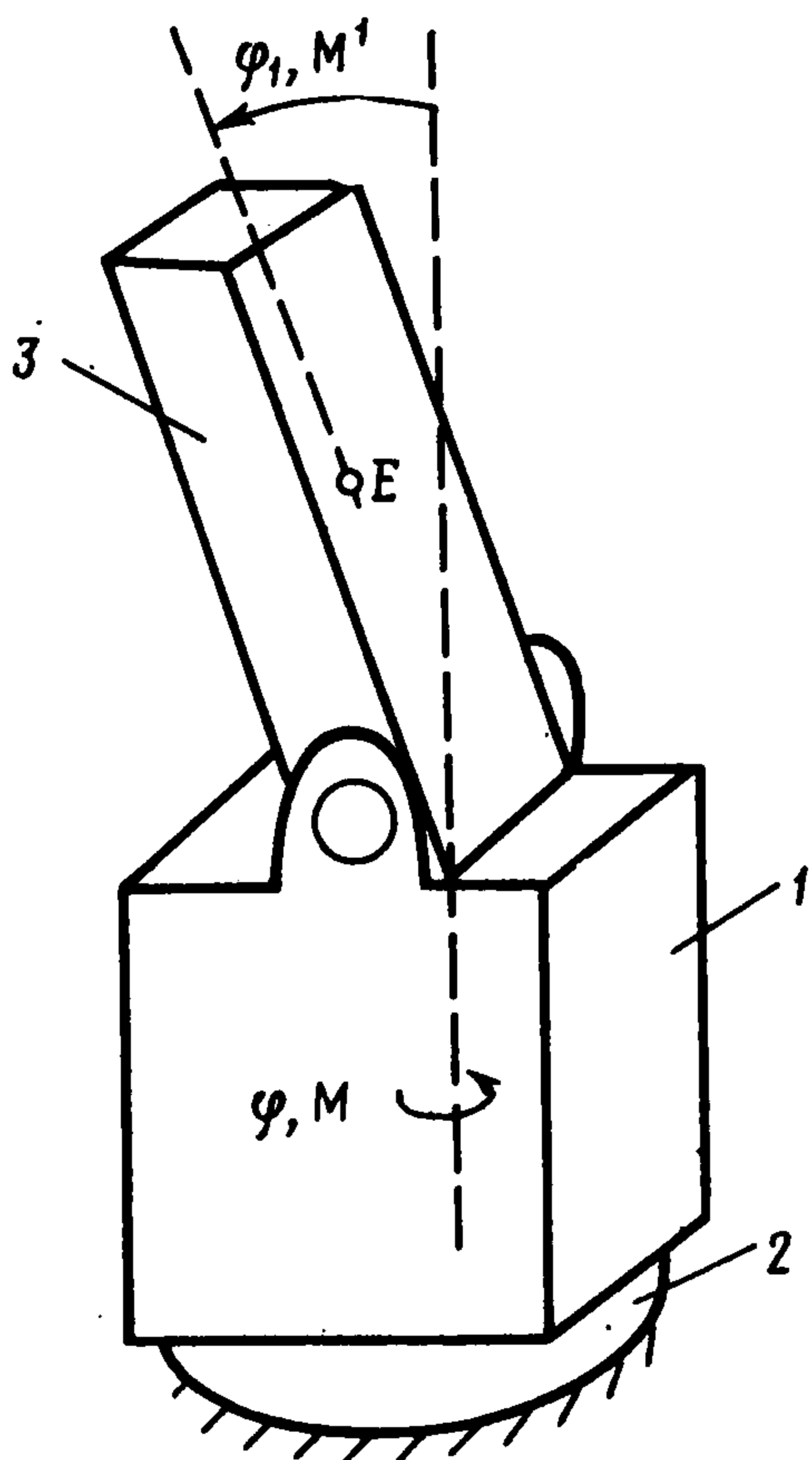
Заметим, что необходимое условие оптимальности сопряжения не выполняется и для упрощенной системы (2.1), (2.2). Если $M(t)$ имеет одно переключение, то управление $F(t)$, имеющее любое конечное число переключений и содержащее особый участок, также не может быть оптимальным.

В результате численных исследований системы (1.8), которые проводились для значений $F_1 = 1; 2,5; \varphi_T = 2$, построено управление и соответствующее ему движение, удовлетворяющее принципу максимума. Если $F_1 = 2,5$ и значения $r_0 > 1,61$, то управление $F(t)$ переключается два раза, а центр масс стрелы в соответствующем дви-

жении не доходит до оси вращения. Подобные движения построены в работе [3]. При $r_0 \approx 1,61$ в соответствующем движении центр масс стрелы касается оси вращения вала. При $1,388 < r_0 < 1,61$ управление $F(t)$ переключается по-прежнему два раза, а центр масс совершает колебания около оси вращения вала, но не располагается на ней в течение конечного времени, как утверждается в [3]. Функции $y_i(t)$, $\psi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $M(t)$, $F(t)$ качественно ведут себя так же, как и для системы уравнений (2.1), (2.2) (фиг. 3—5).

Так же как и для упрощенных уравнений, изменение функции $\psi_4(t)$ при уменьшении r_0 предсказывает появление новых переключений управления $F(t)$ (фиг. 5).

Некоторые из полученных численных результатов приведены в последних двух строках таблицы. Из таблицы видно, что результаты расчетов для упрощенной и полной систем близки. При выбранных параметрах манипулятора относительный выигрыш во времени движения с колебаниями



Фиг. 6

по сравнению с движением, содержащим особый участок, мал.

Тот факт, что при колебательном движении стрелы (фиг. 4) разворот манипулятора происходит быстрее, чем при движении с особым участком (фиг. 2), можно объяснить, по-видимому следующим образом. Когда центр масс стрелы за минимальное время совмещается с осью вращения вала, то сначала происходит разгон стрелы, а затем торможение. Во время разгона момент инерции уменьшается максимально быстро, а во время торможения уменьшение момента инерции происходит медленнее. При движении с колебаниями момент инерции также сначала уменьшается максимально быстро, но торможение наступает позже, чем при выходе на особый режим. При движении с колебаниями момент инерции как бы меньше

«в среднем», чем при движении с особым участком, и колебательное движение предпочтительнее в смысле быстродействия, нежели движение с особым режимом.

4. Манипулятор с вращающимся звеном. Рассмотрим (фиг. 6) манипулятор, состоящий из подвижного основания 1, шарнирно закрепленного на неподвижной станине 2, и звена 3. Основание и звено соединены цилиндрическим шарниром, ось которого горизонтальна. Манипулятор имеет две степени свободы, отвечающие повороту основания вокруг вертикальной оси и вращению звена вокруг горизонтальной оси. Введем обобщенные координаты: φ — угол поворота основания, φ_1 — отсчитываемый от вертикали угол поворота звена (фиг. 6). Управление системой осуществляется посредством моментов сил M и M^1 , приложенных к осям вращения основания и звена.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы имеют вид ²

$$\begin{aligned} & [J + B + (m\rho^2 + C - B) \sin^2 \varphi_1] \ddot{\varphi} + (m\rho^2 + C - \\ & - B) \sin 2\varphi_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi} = M \\ & (m\rho^2 + A) \ddot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} (m\rho^2 + C - B) \sin 2\varphi_1 \dot{\varphi}^2 = M^1 + mg\rho \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

² Осипов С. Н. К задаче об управлении разворотом манипулятора. М.: 1987. 17 с. Деп. в ВИНТИ 31.12.86, № 489 — В 87.

Здесь J — момент инерции основания относительно вертикальной оси, m — масса звена, ρ — расстояние от оси вращения звена до его центра масс E ; A, B, C — моменты инерции звена в главных центральных осях инерции, причем A — момент инерции относительно прямой, параллельной оси вращения звена и проходящей через точку E , а B — момент инерции относительно продольной оси звена; g — ускорение свободного падения.

На управляющие моменты наложим ограничения

$$|M(t)| \leq M_0, \quad |M^1(t)| \leq M_0^1$$

В начальный момент времени система находится в заданной конфигурации

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = \varphi_{10}, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0$$

Требуется найти управляющие функции, обеспечивающие перевод манипулятора за минимально возможное время T в заданную конечную конфигурацию

$$\varphi(T) = \varphi_T, \quad \dot{\varphi}(T) = 0, \quad \varphi_1(T) = \varphi_{1T}, \quad \dot{\varphi}_1(T) = 0$$

Дополнительно положим, что $\varphi_1(0) = \varphi_1(T)$. Это условие аналогично условию (1.9), при нем отыскивается решение, удовлетворяющее условиям симметрии (1.12).

Для манипулятора с вращающимся звеном проведены исследования, аналогичные описанному выше для манипулятора с выдвигающейся стрелой. Сделана замена переменных, аналогичная (1.5), (1.7). Исследованы упрощенные уравнения, полученные из исходных после пренебрежения моментом центробежной силы. Особым движением для этой модели является поворот основания с вертикально расположенным звеном. Аналитически показано, что движение с одним переключением управляющего момента $M(t)$ и с конечным числом переключений момента $M^1(t)$, содержащее особый участок, не может быть оптимальным как для упрощенной, так и для полной системы уравнений. Численно как для исходной, так и для упрощенной системы при некоторых значениях безразмерных параметров построено управление и движение, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. При этом движении звено совершает колебания относительно вертикали, момент $M(t)$ переключается один раз.

Сопоставление полученных результатов для двух видов манипуляторов показывает, что их оптимальные движения имеют один и тот же характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В., Мамалыга В. М. Оптимальное управление в нелинейной механической системе с переменной инерционной характеристикой // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 2. С. 6—12.
2. Воробьев Е. И., Щеголева А. Н. Оптимизация по быстродействию пневматического манипулятора выбором моментов переключения приводов // Машиноведение. 1978. № 3. С. 24—26.
3. Geering H. P., Guzzella L., Hepner S., Onder C. H. Time-optimal motions of robots in assembly tasks // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. AC-31. No. 6. P. 512—518.
4. Борисов В. Ф., Зеликин М. И. Режимы с учащающимися переключениями в задаче управления роботом // ПММ. 1989. Т. 52. Вып. 6. С. 939—946.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
6. Fuller A. T. Study of an optimal nonlinear control system // J. Electron. Control. 1963. V. 15. No. 1. P. 63—71.
7. Marchal C. Chattering arcs and chattering controls // J. Optimiz. Theory and Appl. 1973. V. 11. No. 5. P. 441—468.

8. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М.: Наука. 1973. 256 с.
9. Johnson C. D. Singular solutions in problems of optimal control // Advances in control systems: Theory and Applications / Ed. by Leondes C. T., N. Y.; L.: Acad. Press. 1965. V. 2. P. 209—267.
10. Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G. Singular extremals // Topics in Optimization / Ed. by Leitmann G. N. Y., L.: Acad. Press. 1967. P. 63—101.
11. McDanell J. P., Powers W. F. Necessary conditions for joining optimal singular and nonsingular subarcs // SIAM J. Control. 1971. V. 9. No. 2. P. 161—173.

Москва

Поступила в редакцию
4.II.1988