Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 6, 1988

УДК 531.36 + 62—50

НЕПРЕРЫВНОЕ МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ МНОГОСВЯЗНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Брусин В. А., Максимов Ю. М.

Рассматривается метод модального управления, при котором спектр замкнутой системы непрерывно деформируется таким образом, чтобы спектр разомкнутого объекта переходил в желаемый спектр. Синтезирован алгоритм непрерывного модального управления. Получены условия спектральной управляемости данного метода. Применяемый подход к задаче модального управления идейно близок к подходу, предложенному в работе [1]. В отличие от [1] здесь рассматривается иной класс управлений. Кроме того, использование аппарата функций Ляпунова, заданных на однопараметрическом семействе деформируемого спектра, обеспечивает минимизацию в евклидовой метрике невязки желаемого спектра и спектра замкнутой системы в случае, если в замкнутой системе желаемый спектр не может быть получен.

1. Постановка задачи. Пусть имеем линейный управляемый объект

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \tag{1.1}$$
$$x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad y \in R^l$$

где x — вектор состояния, u — вектор управлений, y — вектор наблюдаемых переменных, A, B, C — постоянные матрицы соответствующих размерностей, R^n — линейное n-мерное пространство над полем действительных чисел. Будем в дальнейшем предполагать спектр объекта (1.1) простым, не содержащим кратных полюсов. Класс управлений определим в виде

$$u_\alpha(t) = \left(\int_0^\alpha G(\xi)\,d\xi\right) y(t), \quad G \in R^{m\times l} \tag{1.2}$$

где G — матричная функция скалярной переменной ξ, $\alpha \geqslant 0$ — некоторый параметр. Динамика замкнутой системы определяется матрицей

$$A(\alpha) = A + B\left(\int_0^\alpha G(\xi)\,d\xi\right) C \tag{1.3}$$

спектр которой — функция параметра α. При $\alpha = 0$ имеем разомкнутую систему, спектр которой обозначим $\Lambda(0)$. С изменением α генерируется класс линейных систем. При этом каждый элемент этого класса (отдельная линейная система, имеющая спектр $\Lambda(\alpha) = \{p_1(\alpha), p_2(\alpha), \ldots, p_n(\alpha)\}$) определяется конкретным значением параметра α.

Пусть задан спектр $\sigma = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$, в который желательно перевести спектр $\Lambda(0)$. Определим евклидову меру рассогласования спектров $\Lambda(\alpha)$ и σ

$$V(\alpha) = \sum_{i=1}^n (p_i(\alpha) - \eta_i)(p_i(\alpha) - \eta_i)^* \tag{1.4}$$

(звездочка означает комплексно-сопряженную величину). Требуется построить матричную функцию $G(\xi)$ таким образом, чтобы при некотором $\bar\alpha$ выполнилось условие: $V(\bar\alpha) = \min_\alpha V(\alpha)$. В частности, может иметь место равенство: $V(\bar{\alpha}) = 0$. В этом случае будем говорить, что спектр σ достижим из спектра $\Lambda(0)$.

2. Уравнения для спектра. Синтез матричной функции $G(\xi)$. Рассмотрим матрицу $A(\alpha)$, имеющую спектр $\Lambda(\alpha)$. Пусть $l_k(\alpha)$ и $e_k(\alpha)$ — левый и правый собственные вектора матрицы $A(\alpha)$, соответствующие собственному значению $p_k(\alpha)$. Их динамика при изменении параметра α определяется условиями следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть матрица $A(\alpha)$, определяемая равенством (1.3), проста. Тогда изменение ее спектра, а также систем правых и левых собственных векторов подчинено уравнениям вида

$$
\begin{aligned}
(2.1)\qquad & dp_k(\alpha)/d\alpha = l_k^T(\alpha)\,U(\alpha)\,e_k(\alpha), \quad p_k(0) = p_k^\circ\\
& de_k(\alpha)/d\alpha = F_k(\alpha)\,U(\alpha)\,e_k(\alpha), \quad e_k(0) = e_k^\circ\\
& dl_k^T(\alpha)/d\alpha = l_k^T(\alpha)\,U(\alpha)\,F_k(\alpha), \quad l_k(0) = l_k^\circ\\
& U(\alpha) = BG(\alpha)C \in R^{n\times n}, \quad F_k(\alpha) =\\
& = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (p_k(\alpha) - p_i(\alpha))^{-1} Z_i(\alpha) \in E^{n\times n}\\
& Z_i(\alpha) = e_i(\alpha)\, l_i^T(\alpha) \in E^{n\times n}
\end{aligned}
$$

где T — знак транспонирования, p_k°, e_k°, l_k° — k-е собственное число, правый и левый собственные вектора ему соответствующие матрицы разомкнутого объекта $A = A(0)$, матрица $Z_i(\alpha)$ — спектральный проектор соответствующий собственному числу $p_i(\alpha)$, E^n — линейное n-мерное пространство над полем комплексных чисел.

Доказательство. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$(2.2)\qquad A(\alpha)\,e_k(\alpha) = p_k(\alpha)\,e_k(\alpha)$$

Дифференцируя (2.2) по α и приводя подобные члены, получаем

$$(2.3)\qquad (A(\alpha) - p_k I)\,\frac{de_k(\alpha)}{d\alpha} = -\left(\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} - \frac{dp_k(\alpha)}{d\alpha} I\right) e_k(\alpha)$$

где $I \in R^{n\times n}$ — единичная матрица. Учитывая, что $l_k^T(\alpha)(A(\alpha) - p_k(\alpha) I) = 0$, а также нормировку $l_k^T(\alpha)\,e_k(\alpha) = 1$, после умножения (2.3) слева на $l_k^T(\alpha)$ получаем первое уравнение системы (2.1).

Подставляя полученное уравнение в (2.3), а также учитывая, что $dA(\alpha)/d\alpha = U(\alpha)$, преобразуем выражение (2.3) к виду

$$
\begin{aligned}
(2.4)\qquad & (p_k(\alpha) I - A(\alpha))\, de_k(\alpha)/d\alpha = (U(\alpha) -\\
& - l_k^T(\alpha)\,U(\alpha)\,e_k(\alpha)\,I)\,e_k(\alpha)
\end{aligned}
$$

Известно [2], что для простой матрицы $A(\alpha)$ и ее резольвенты $R_\alpha(p) = (pI - A(\alpha))^{-1}$ справедливы следующие спектральные разложения:

$$A(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} p_k(\alpha) Z_k(\alpha), \quad R_\alpha(p) = \sum_{k=1}^{n} (p - p_k(\alpha))^{-1} Z_k(\alpha)$$

Представим $R_\alpha(p)$ в виде

$$
\begin{aligned}
& R_\alpha(p) = (p - p_k(\alpha))^{-1} Z_k(\alpha) + F_k(p, \alpha)\\
& F_k(p, \alpha) = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (p - p_i(\alpha))^{-1} Z_i(\alpha)
\end{aligned}
$$

Очевидно, что функция $F_k(p, \alpha)$ аналитична в окрестности $p_k(\alpha)$. В силу этого матричная функция $F_k(p, \alpha)(pI - A(\alpha))$ также аналитична в окрестности $p_k(\alpha)$. Для этой матричной функции, учитывая спектральное разложение матрицы $A(\alpha)$, а также известное свойство проекционных матриц $Z_k(\alpha) Z_j(\alpha) = \delta_{kj} Z_k(\alpha)$, получаем значение в точке $p = p_k(\alpha)$

$$(2.5) \qquad F_k(\alpha)(p_k(\alpha) I - A(\alpha)) = I - Z_k(\alpha)$$

где $F_k(\alpha) = F_k(p_k, \alpha)$. Умножая (2.4) слева на $F_k(\alpha)$, принимая во внимание (2.5), приходим к равенству

$$(2.6) \qquad (I - Z_k(\alpha))\, de_k(\alpha)/d\alpha = F_k(\alpha)(U(\alpha) - \\ - l_k^T(\alpha)\, U(\alpha)\, e_k(\alpha)\, I)\, e_k(\alpha)$$

Рассмотрим вектор $Z_k(\alpha)\, de_k(\alpha)/d\alpha = e_k(\alpha)\, l_k^T(\alpha)\, de_k(\alpha)/d\alpha$. Так как вектор $e_k' = e_k + de_k$ определяется лишь с точностью до ненулевой мультипликативной константы, определим e_k' таким образом, чтобы $l_k^T e_k' = l_k^T(e_k + de_k) = 1$. В силу $l_k^T e_k = 1$ имеем $l_k^T de_k = 0$. Отсюда $Z_k(\alpha)\, de_k(\alpha)/d\alpha = 0$

Рассмотрим вектор

$$F_k(\alpha)(l_k^T(\alpha)\, U(\alpha)\, e_k(\alpha))\, e_k(\alpha) = \\ = l_k^T(\alpha)\, U(\alpha)\, e_k(\alpha) \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (p_k(\alpha) - p_i(\alpha))^{-1}\, e_i(\alpha)\, l_i^T\, e_k(\alpha)$$

В силу ортогональности правых и левых собственных векторов с индексами $i \neq k$ имеем $l_i^T(\alpha)\, e_k(\alpha) = 0$. Отсюда $(l_k^T(\alpha)\, U(\alpha)\, e_k(\alpha)) \cdot \cdot F_k(\alpha)\, e_k(\alpha) = 0$.

Учитывая последние два результата, из (2.6) получаем второе уравнение системы (2.1). Аналогичным образом может быть получено и третье уравнение.

Уравнения (2.1) определяют траектории, описываемые собственными числами $p_k(\alpha)$ на комплексной плоскости при увеличении параметра α от значения $\alpha = 0$. Начинаются траектории на спектре $\Lambda(0)$, соответствующем разомкнутому объекту. «Управлением» для этих траекторий является матричная функция $G(\alpha)$, которая должна быть выбрана таким образом, чтобы обеспечить их сходимость к желаемому спектру замкнутой системы σ.

Содержание этой задачи является обобщением широко известного и хорошо зарекомендовавшего себя на практике метода корневого годографа [3]. Однако, здесь варьируется не один какой-то выбранный параметр замкнутой системы, а сразу вся матрица обратной связи. Кроме того, указывается цель управления в виде желаемого спектра.

Обратимся к синтезу матричной функции $G(\alpha)$. Для этого вычислим полную производную положительно определенной функции $V(\alpha)$ по α в силу уравнений (2.1). После некоторых преобразований получим

$$(2.7) \qquad dV(\alpha)/d\alpha = s^T(\alpha)\, g(\alpha), \quad V(0) = V_0$$

$$s(\alpha) = h(\alpha) + h^*(\alpha) \in R^{ml},$$

$$h(\alpha) = (C^T \otimes B) \sum_{i=1}^{n} (p_i(\alpha) - \eta_i)^* (e_i(\alpha) \otimes l_i(\alpha))$$

$$g(\alpha) = \mathrm{col}\, (g_{11}(\alpha), \ldots, g_{1l}(\alpha), g_{21}(\alpha), \ldots, g_{2l}(\alpha), \ldots \\ \ldots, g_{m1}(\alpha), \ldots, g_{ml}(\alpha)) \in R^{ml}$$

где V_0 — рассогласование спектров $\Lambda(0)$ и σ, вектор $g(\alpha)$ составлен из элементов $g_{ij}(\alpha)$ матрицы $G(\alpha)$, $\otimes$ — знак прямого (кронекеровского) произведения матриц [2].

Определяя вектор $g(\alpha)$ в виде

$$(2.8) \qquad g(\alpha) = -\gamma s(\alpha)/\|s(\alpha)\|^2, \quad \|s(\alpha)\|^2 = s^T(\alpha)\, s(\alpha)$$

где $\gamma > 0$ — некоторая постоянная, имеем

$$(2.9) \qquad dV(\alpha)/d\alpha = -\gamma < 0$$

Таким образом, при выполнении условия (2.8) $V(\alpha)$ является функцией Ляпунова, заданной на спектре линейной системы. Определение матричной функции $G(\alpha)$ в виде (2.8) обеспечивает монотонное уменьшение евклидовой меры рассогласования текущего $\Lambda(\alpha)$ и желаемого σ спектров замкнутой системы при увеличении параметра α от значения $\alpha = 0$.

Отметим неасимптотический характер сближения спектров $\Lambda(\alpha)$ и σ. Действительно, решением уравнения (2.9) служит функция $V(\alpha) = V(0) - \gamma\alpha$. Если спектр $\Lambda(\alpha)$ достигает желаемого значения σ, имеем $V(\bar{\alpha}) = 0$. В силу этого $\bar{\alpha} = V(0)/\gamma$. Таким образом, если спектр σ достижим из спектра $\Lambda(0)$, то это происходит за конечное «время» $\bar{\alpha}$.

3. О спектральной управляемости метода. Из (2.7), (2.8) следует, что спектр σ достижим из спектра $\Lambda(0)$ при данном методе модального управления, если вектор $s(\alpha) \neq 0$, $\forall\alpha \in [0, \bar{\alpha})$. В случае, когда при увеличении параметра α от значения $\alpha = 0$ вектор $s(\alpha)$ становится нулевым в некоторой средней точке $\bar{\alpha}_c \in [0, \bar{\alpha})$ процесс модального управления прерывается. При этом $V(\bar{\alpha}_c) \neq 0$, в силу чего $\Lambda(\bar{\alpha}_c) \neq \sigma$. Так как с увеличением α функция $V(\alpha)$ монотонно уменьшается, т. е. $V(\bar{\alpha}_0) < V(\alpha)$, $\forall\alpha \in [0, \bar{\alpha}_c)$, в рамках данного метода в точке $\alpha = \bar{\alpha}_0$ достигается минимальное значение евклидовой меры рассогласования текущего и желаемого спектров.

Рассмотрим условия при которых вектор $s(\alpha)$ становится нулевым. Пусть желаемый спектр выбирается таким образом, что комплексно-сопряженным числам $p_i(0)$ и $p_j(0) = p_i^*(0)$ ставятся в соответствие комплексно-сопряженные числа η_i и $\eta_j = \eta_i^*$, действительным числам $p_k(0)$ — действительные числа η_k. В рамках принятого предположения о простоте спектра $\Lambda(\alpha)$ это условие не является ограничением, ибо очевидно, что при его невыполнении с увеличением α будет достигнут спектр $\Lambda(\alpha)$, содержащий кратные собственные числа.

В силу указанного способа выбора спектра σ, а также того, что действительным числам $p_k(\alpha)$ соответствуют действительные правый и левый собственные векторы, паре комплексно-сопряженных чисел $p_i(\alpha)$, $p_j(\alpha) = p_i^*(\alpha)$ — пары комплексно-сопряженных правых и левых собственных векторов, имеем: слагаемые в $h(\alpha)$ с действительными $p_k(\alpha)$ будут действительны, слагаемые с комплексно-сопряженными $p_i(\alpha)$, $p_j(\alpha) = p_i^*(\alpha)$ — комплексно-сопряженными. Отсюда следует, что $h(\alpha)$ — действительный вектор и $s(\alpha) = 2h(\alpha)$. Это позволяет вместо вектора $s(\alpha)$ рассматривать вектор $h(\alpha)$, который может быть представлен в виде

$$(3.1) \qquad h(\alpha) = \Phi(\alpha)\, \Delta p^*(\alpha), \quad \Delta p(\alpha) = p(\alpha) - \eta \in E^n, \quad \Phi(\alpha) \in E^{ml\times n}$$

$p(\alpha) = \mathrm{col}\,(p_1(\alpha),\ p_2(\alpha),\ \ldots,\ p_n(\alpha)),\quad \eta = \mathrm{col}\,(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$

$$\Phi(\alpha) = \left\| \begin{array}{cccc} c_1{}^T Z_1 b_1 & c_1{}^T Z_2 b_1 & \ldots & c_1{}^T Z_n b_1 \\ c_2{}^T Z_1 b_1 & c_2{}^T Z_2 b_1 & \ldots & c_2{}^T Z_n b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_l{}^T Z_1 b_1 & c_l{}^T Z_2 b_1 & \ldots & c_l{}^T Z_n b_1 \\ \hline c_1{}^T Z_1 b_2 & c_1{}^T Z_2 b_2 & \ldots & c_1{}^T Z_n b_2 \\ c_2{}^T Z_1 b_2 & c_2{}^T Z_2 b_2 & \ldots & c_2{}^T Z_n b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_l{}^T Z_1 b_2 & c_l{}^T Z_2 b_2 & \ldots & c_l{}^T Z_n b_2 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline c_1{}^T Z_1 b_m & c_1{}^T Z_2 b_m & \ldots & c_1{}^T Z_n b_m \\ c_2{}^T Z_1 b_m & c_2{}^T Z_2 b_m & \ldots & c_2{}^T Z_n b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_l{}^T Z_1 b_m & c_l{}^T Z_2 b_m & \ldots & c_l{}^T Z_n b_m \end{array} \right\|$$

Здесь c_i — вектор, составленный из элементов i-й строки матрицы C, b_j — вектор, составленный из элементов j-го столбца матрицы B.

Пусть $\mathrm{rank}\,\Phi(\alpha) = n$, $\forall\alpha \in [0, \bar{\alpha})$. В этом случае аннулируемое подпространство $N(\Phi(\alpha))$ матрицы $\Phi(\alpha)$ состоит только из нулевого элемента $\Delta p(\alpha) = 0$ [2]. Отсюда следует, что вектор $h(\alpha) \neq 0$, $\forall\alpha \in [0, \bar{\alpha})$ и процесс модального управления заканчивается лишь тогда, когда достигается желаемый спектр σ. Таким образом, доказана следующая теорема, содержащая ранговый критерий спектральной управляемостью замкнутой системы.

Теорема 2. Пусть объект (1.1), имеющий спектр $\Lambda(0)$, замкнут обратной связью (1.2) и задан желаемый спектр замкнутой системы σ. Тогда, если

(3.2) $\qquad \mathrm{rank}\,\Phi(\alpha) = n, \quad \forall\alpha \in [0, \bar{\alpha})$

то спектр σ достижим из спектра $\Lambda(0)$.

Если $\mathrm{rank}\,\Phi(\alpha) < n$, тогда ненулевые $\Delta p(\alpha) \in N(\Phi(\alpha))$ являются решениями уравнения $\Phi(\alpha)\,\Delta p^*(\alpha) = 0$. Так как $\Delta p(\alpha) = p(\alpha) - \eta$, это означает, что для данного текущего спектра $\Lambda(\alpha)$ в пространстве E^n существует многообразие $H(\alpha)$, такое, что если $\eta \in H(\alpha)$, то выполнится $h(\alpha) = 0$. Отсюда следует, что если при каком-либо $\alpha \in [0, \bar{\alpha})$ вектор η окажется принадлежащим многообразию $H(\alpha)$, то спектр σ, соответствующий вектору η, не достижим из спектра $\Lambda(0)$ при помощи рассматриваемого метода.

Условие (3.2) включает в себя традиционное требование полной управляемости и наблюдаемости замкнутой системы $\forall\alpha \in [0, \bar{\alpha})$. Действительно, при невыполнении этого требования найдется такой правый $e_i(\alpha)$ либо левый $l_j(\alpha)$ собственный вектор матрицы $A(\alpha)$, что выполнится: либо $Ce_i(\alpha) = 0$, либо $l_j{}^T(\alpha)\,B = 0$ [4]. В этом случае, соответствующий столбец матрицы $\Phi(\alpha)$ становится нулевым и $\mathrm{rank}\,\Phi(\alpha) < n$. Условие (3.2) включает также ограничение на число входов m и выходов l объекта (1.1)

(3.3) $\quad ml \geqslant n$

где n — размерность объекта. Если имеем обратное, то автоматически $\operatorname{rank} \Phi(\alpha) \leqslant ml < n$. Следует заметить, что условие (3.2) отличается от известного условия [5]: $n \leqslant m + l - 1$. Условие (3.2) разрешает при данном n меньшее число входов и выходов, что существенно с практической точки зрения.

Вместе с тем выполнение (3.2) не сводится к удовлетворению этих двух требований. Для полностью управляемой и наблюдаемой системы с $ml \geqslant n$ существует некоторое множество распределений собственных векторов обращающих в нуль все миноры матрицы $\Phi(\alpha)$ ранга n.

Следующий пример показывает, что это множество распределений не пусто. Пусть $n = 4$, $l = 2$, $m = 3$, а собственные векторы таковы, что $c_1^T e_1(\alpha) = 0$, $c_1^T e_2(\alpha) = 0$, $c_2^T e_3(\alpha) = 0$, $c_2^T e_4(\alpha) = 0$, $l_3^T(\alpha) b_1 = 0$, $l_4^T(\alpha) b_1 = 0$, $l_3^T(\alpha) b_2 = 0$, $l_4^T(\alpha) b_2 = 0$, $l_1^T(\alpha) b_3 = 0$, $l_2^T(\alpha) b_3 = 0$. Расписав матрицу $\Phi(\alpha)$ для этого случая, убедимся, что $\operatorname{rank} \Phi(\alpha) = 3$.

4. Пример. Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим задачу о достижении максимальной степени устойчивости в системе «незатухающий гармонический осциллятор плюс апериодический элемент», описываемой уравнениями

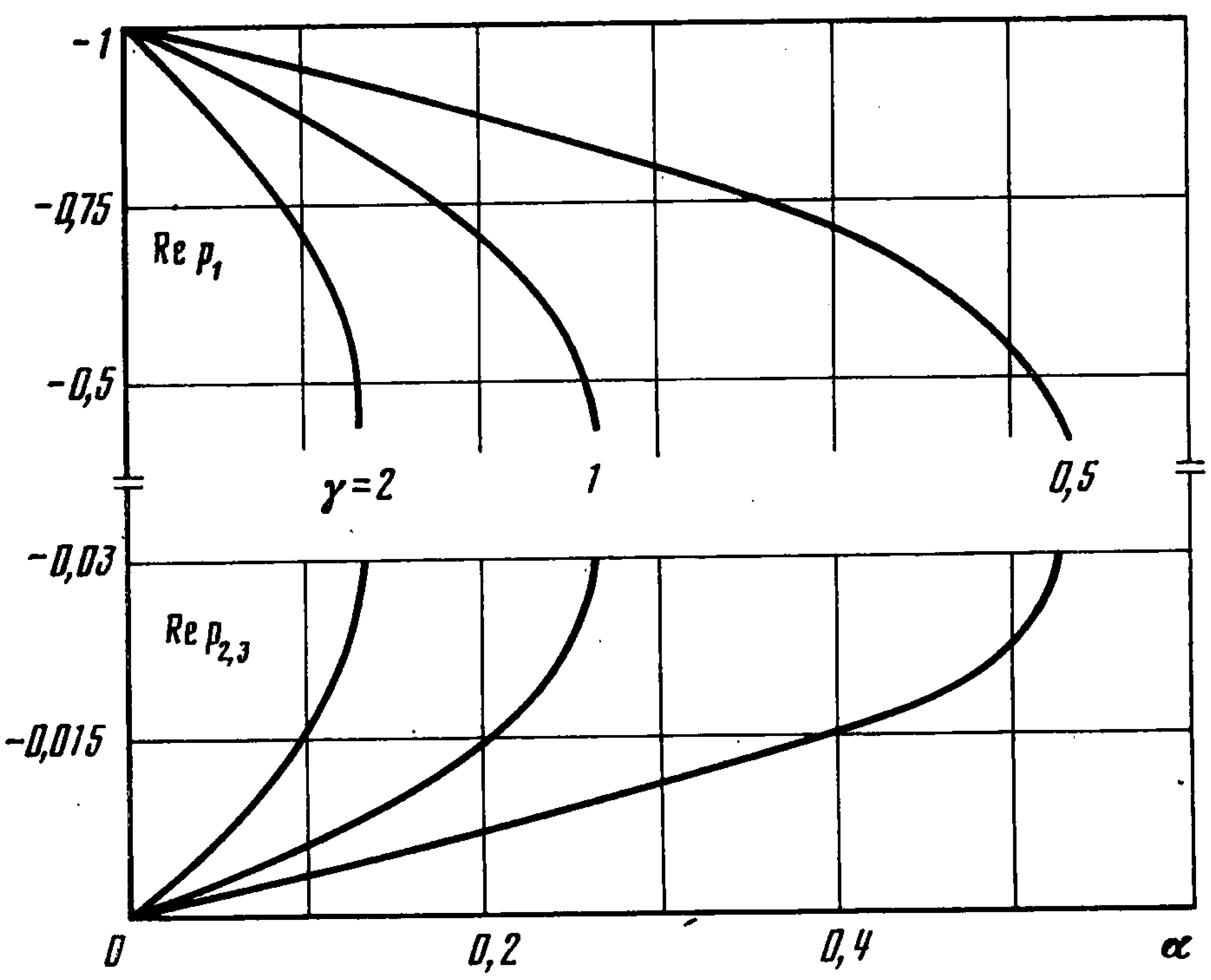
$$\left\| \begin{matrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| u(t) \tag{4.1}$$

где $x_1(t)$ — выход апериодического звена (наблюдаемая переменная), $x_2(t)$ и $x_3(t)$ — соответственно координата и скорость ее изменения гармонического осциллятора (ненаблюдаемые переменные). Для объекта (4.1) примем следующий закон управления:

$$u(t) = \left(\int_0^\alpha g_1(\xi)\, d\xi \right) x_1(t) + \left(\int_0^\alpha g_2(\xi)\, d\xi \right) x_4(t), \quad \dot{x}_4(t) = -20 x_4(t) + x_1(t) \tag{4.2}$$

Очевидно, что задача управления с динамическим регулятором (4.2) простым расширением пространства состояний объекта (4.1) сводится к задаче (1.1), (1.2).

При $\alpha = 0$ в разомкнутом положении имеем следующее значение спектра: $\Lambda(0) = \{p_1(0) = -1,\ p_2(0) = j2,\ p_3(0) = -j2,\ p_4(0) = -20\}$. Поставим целью управле-



ния сдвиг полюсов $p_2(\alpha)$ и $p_3(\alpha)$ влево параллельно действительной оси комплексной плоскости на возможно большее расстояние. В качестве желаемого спектра примем $\sigma = \{\eta_1 = -1,\ \eta_2 = -5 + j2,\ \eta_3 = -5 - j2,\ \eta_4 = -20\}$.

Моделирование процесса непрерывного модального управления с частотной функцией Ляпунова (1.4) при $n = 4$ и алгоритмом (2.8) синтеза вектор-функции $g(\alpha) =$

$= \mathrm{col}\,(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ обнаружило, что полюсы $p_2(\alpha)$ и $p_3(\alpha)$ смещаются влево параллельно действительной оси комплексной плоскости, действительный полюс $p_1(\alpha)$ смещается вправо, действительный полюс $p_4(\alpha)$ остается практически неподвижным.

Характер смещения полюсов иллюстрирован фигурой, где представлены зависимости $\mathrm{Re}\,p_1$, $\mathrm{Re}\,p_{2,3}$ от переменной α при различных значениях коэффициента γ. Видно, что текущий спектр $\Lambda(\alpha)$ не достигает желаемого значения σ. В некоторой средней точке $\overline{\alpha}_c \in [0, V(0)/\gamma)$, значение которой зависит от γ, вектор $s(\alpha)$ становится нулевым и процесс непрерывного модального управления прерывается. При этом спектр $\Lambda(0)$ переходит в спектр $\Lambda(\overline{\alpha}_c) = \{p_1(\overline{\alpha}_c) = -0{,}45, \quad p_2(\overline{\alpha}_c) = -0{,}03 + j2, \quad p_3(\overline{\alpha}_c) = -0{,}03 - j2, \ p_4(\overline{\alpha}_e) = -20\}$, не зависящий от величины коэффициента γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harris T. L., De Carlo R. A., Richter S.* A continuation aproach to eigenvalue assignment // Automatica. 1983. V. 19. No. 5. P. 551—555.
2. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 269 с.
3. *Воронцов А. А., Титов В. К., Новогранов Б. Н.* Основы теории автоматического управления и регулирования. М.: Высш. шк., 1977. 519 с.
4. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970. 453 с.
5. *Kimura H.* Pole assignment by gain output feedback // IEEE Trans. Autom. Control. 1975. V. AC—20. No. 4. P. 505—516.

Горький

Поступила в редакцию
3.III.1988