Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 6, 1988

УДК 531.36

О ПРИЕМЛЕМОСТИ УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В ДИНАМИКЕ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кузьмина Л. К.

С использованием асимптотического подхода [1] строгим математическим путем выделяются известные в теории гироскопических систем упрощенные модели и дается строгое обоснование их приемлемости при решении задач динамики (в том числе при решении вопросов устойчивости). Исходная система принадлежит классу сингулярно возмущенных [2]. Использование методов теории устойчивости [3, 4] позволяет установить условия, при которых допустим переход к упрощенной (расчетной) модели. Решению подобных задач для сингулярно возмущенных уравнений [5] методами теории Ляпунова был посвящен ряд работ.

1. Рассмотрим гироскопическую систему, состояние которой определяется n лагранжевыми обобщенными (определяющими) координатами. Дифференциальные уравнения возмущенного движения такой системы, записанные в форме уравнений Лагранжа, имеют вид

$$
\begin{aligned}
&d a\dot{\mathbf{q}}_M/dt + (b^\circ + g^\circ)\dot{\mathbf{q}}_M = \mathbf{Q}_M'(\mathbf{q}_M) + \mathbf{Q}_M''(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M) \\
&d\mathbf{q}_M/dt = \dot{\mathbf{q}}_M
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Здесь $\mathbf{q}_M$ — n-мерный вектор механических обобщенных координат; $a(\mathbf{q}_M)$ — симметричная матрица определенно-положительной квадратичной формы кинетической энергии системы; $b(\mathbf{q}_M)$ — симметричная матрица постоянно-положительной квадратичной формы в разложении диссипативной функции сил вязкого трения; $g(\mathbf{q}_M)$ — кососимметрическая матрица гироскопических коэффициентов; $\mathbf{Q}_M'(\mathbf{q}_M) = -e^\circ\mathbf{q}_M$, где $e = e(\mathbf{q}_M)$ — квадратная матрица сил (потенциальных и непотенциальных), зависящих от обобщенных координат; $\mathbf{Q}_M''$ — совокупность нелинейных членов, $\mathbf{Q}_M''(0, 0) = 0$.

Полагаем, что все функции в (1.1) голоморфны по совокупности всех переменных (в некоторой рассматриваемой области).

Отметим, что в качестве упрощенной модели, именуемой «прецессионной», для системы вида (1.1) принимают

$$
(b^\circ + g^\circ)\dot{\mathbf{q}}_M = \mathbf{Q}_M'(\mathbf{q}_M) + \overline{\mathbf{Q}}_M''(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M), \quad d\mathbf{q}_M/dt = \dot{\mathbf{q}}_M \tag{1.2}
$$

$$
g^\circ\dot{\mathbf{q}}_M = \mathbf{Q}_M'(\mathbf{q}_M) + \overline{\mathbf{Q}}_M''(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M), \quad d\mathbf{q}_M/dt = \dot{\mathbf{q}}_M \tag{1.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&(b_1^\circ + g_1^\circ)\dot{\mathbf{q}}_M = \mathbf{Q}_1'(\mathbf{q}_M) + \overline{\mathbf{Q}}_1''(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M) \\
&d\bar{a}_2\dot{\mathbf{q}}_M/dt + (b_2^\circ + g_2^\circ)\dot{\mathbf{q}}_M = \mathbf{Q}_2'(\mathbf{q}_M) + \overline{\mathbf{Q}}_2''(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M) \\
&d\mathbf{q}_M/dt = \dot{\mathbf{q}}_M
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

соответственно в [6, 7], [6, 8] и [9, 10]. Здесь

$$
\mathbf{q}_M = \| \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \|^T, \quad a = \| a_1, a_2 \|^T, \quad b = \| b_1, b_2 \|^T,
$$
$$
g = \| g_1, g_2 \|^T, \quad \mathbf{Q}_M = \| \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \|^T
$$

причем $\mathbf{q}_1$ — n_1-мерный вектор обобщенных механических координат, определяющих положение подвесов гироскопов (относительно объекта, стабилизируемой платформы); a_i, b_i, g_i $(i = 1, 2)$ — субматрицы соответствующих размеров матриц a, b, g; индекс T означает транспонирование.

Эти укороченные уравнения выделяются из (1.1) отбрасыванием в этих уравнениях соответствующих членов на том основании, что они «малы». При этом исследование динамики исходной системы (1.1) проводится по укороченным уравнениям ((1.2) или (1.3), или (1.4)). Но если для уравнений типа (1.2) в литературе обсуждается вопрос о приемлемости их и есть соответствующие результаты для частных случаев [6, 11—14], то для уравнений типа (1.3) и (1.4) таких результатов нет.

Поставим задачу: построить строгим путем упрощенные модели и дать строгое обоснование их законности.

2. Рассмотрим гироскопическую систему, полагая гироскопы в ней быстрыми (собственные кинетические моменты гироскопов могут быть сколько угодно большими). Тогда в (1.1) примем, что гироскопические коэффициенты зависят от большого безразмерного положительного параметра H (все остальные члены в уравнениях (1.1) имеют нулевой порядок относительно H): $g = g^*H$, $H = 1/\mu$, μ — малый параметр. Приведем теперь систему (1.1) к виду дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных. Обозначим $\tau = \mu t$ и введем новые переменные $\mathbf{x}_1 = a d\mathbf{q}_M/d\tau$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{q}_M$. Тогда система (1.1) примет вид

$$\mu^2 d\mathbf{x}_1/d\tau = \mathbf{X}_1(\mu, \mathbf{x}), \quad d\mathbf{x}_2/d\tau = \mathbf{X}_2(\mu, \mathbf{x}) \tag{2.1}$$

Переход к сингулярно возмущенным уравнениям позволяет естественным образом выделить и строго обосновать упрощенную систему, разделяя движения (и переменные) в системе на разномасштабные составляющие.

Примем для системы (2.1) в качестве приближенной (укороченной) систему, линеаризованную по μ. Назовем ее системой А (это укороченная система первого рода). В старых переменных системе А соответствует модель (1.2), за которой сохраним название прецессионной.

Примем теперь для (2.1) в качестве приближенной вырожденную систему (отвечающую $\mu = 0$), как это традиционно принято в теории сингулярных возмущений. Назовем ее системой Б (это укороченная система второго рода, здесь следуем терминологии А. Н. Тихонова [15]). В старых переменных ей соответствует модель (1.3). Будем называть ее предельной моделью (так как она отвечает вырожденной системе, $\mu = 0$). Отметим, что модель вида (1.3) рассматривалась в [8], в [6] отмечалась возможность использования ее в качестве упрощенной.

Заметим, что система (1.4) не выделяется из (1.1) в качестве упрощенной при сделанных выше допущениях физического характера (быстрые гироскопы). Для ее выделения строгим путем (и последующего обоснования приемлемости) необходимы иные физические предпосылки и иной подход к введению малого параметра, что справедливо отмечено в работах [6, 7].

3. Теперь рассмотрим гироскопическую систему с быстрыми гироскопами, состояние которой определяется совокупностью n прежних обобщенных координат и u дополнительных координат, причем дифференциальные уравнения для этих дополнительных координат не содержат членов с большим параметром H. Такого типа системы рассматривались в [11, 16]. Тем же методом, что и выше, построим и здесь строгим путем упрощенные модели. Исследование проведем на примере системы гироскопической стабилизации (СГС), моделируя ее как электромеханическую систему с n механическими обобщенными (лагранжевыми) координатами и с u электрическими обобщенными (максвелловыми) координатами [17]. Дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид (записываются в форме уравнений Лагранжа — Максвелла или в форме Гапонова)

$$
\begin{aligned}
&(3.1)\qquad d a\dot{\mathbf{q}}_M/dt + (b^\circ + g^\circ)\,\dot{\mathbf{q}}_M = \mathbf{Q}_M'(\mathbf{q}_M) + \mathbf{Q}_{ME}(\mathbf{q}_E^{\cdot}) + \mathbf{Q}_M''(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{q}_E^{\cdot})\\
&\qquad\qquad dL\mathbf{q}_E^{\cdot}/dt + R^\circ \mathbf{q}_E^{\cdot} = \mathbf{Q}_E'(\mathbf{q}_M, \mathbf{q}_E^{\cdot}) + \mathbf{Q}_{EM}(\dot{\mathbf{q}}_M) + \mathbf{Q}_E''(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{q}_E^{\cdot}),\\
&\qquad\qquad d\mathbf{q}_M/dt = \dot{\mathbf{q}}_M
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Q}_{ME}(\mathbf{q}_E^{\cdot}) = A_M \mathbf{q}_E^{\cdot}, \quad A_M = \| 0, A, 0 \|^T, \quad \mathbf{Q}_{EM}(\dot{\mathbf{q}}_M) = B_E \dot{\mathbf{q}}_M\\
&B_E = \| 0, B, 0 \|, \quad \mathbf{Q}_E'(\mathbf{q}_M, \mathbf{q}_E^{\cdot}) = \Omega_E \| \mathbf{q}_M, \mathbf{q}_E^{\cdot} \|^T
\end{aligned}
$$

причем $\mathbf{q}_E$ — u-мерный вектор максвелловых координат, L — симметричная $(u \times u)$-матрица определенно-положительной квадратичной формы электромагнитной энергии системы, $R\ (\mathbf{q}_E^{\cdot})$ — симметричная $(u \times u)$-матрица определенно-положительной квадратичной формы в разложении диссипативной функции токов, характеризующей потери на джоулево тепло; $\mathbf{Q}_{ME}$ и $\mathbf{Q}_{EM}$ — механические обобщенные силы электрического происхождения (пондеромоторные силы) и электрические обобщенные силы механического происхождения; $A = \| A_{kj} \|$ — матрица размером $(s - m) \times u$; $B = \| B_{kj} \|$ — матрица размером $u \times (s - m)$; $\mathbf{Q}_E'$ — вектор электрических обобщенных сил, отвечающих электрическим обобщенным координатам, Ω_E — матрица размером $u \times (n + u)$; $\mathbf{Q}_M''$ и $\mathbf{Q}_E''$ — совокупности нелинейных членов. Система (3.1) имеет порядок $(2n + u)$.

Для системы с быстрыми гироскопами, как и в разд. 2, $g = g^* H$, $H = 1/\mu$. Обозначим $\tau = \mu t$ и введем переменные

$$
\mathbf{x}_1 = a\, d\mathbf{q}_M/d\tau, \quad \mathbf{x}_2 = L\mathbf{q}_E^{\cdot}, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{q}_M
$$

В новых переменных система (3.1) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&(3.2)\qquad \mu^{\alpha_k} d\mathbf{x}_k/d\tau = \mathbf{X}_k(\mu, \mathbf{x}) \quad (k = 1, 2, 3)\\
&\qquad\qquad \alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = 1, \ \alpha_3 = 0
\end{aligned}
$$

Используя идею разделения переменных на составляющие различных классов, можно естественным образом выделить упрощенные системы. Получаем, что упрощенной системе первого рода, соответствующей линеаризованной (по малому параметру μ) системе, отвечает в старых переменных система уравнений порядка $(n + u)$

$$
\begin{aligned}
&(3.3)\qquad (b^\circ + g^\circ)\,\dot{\mathbf{q}}_M = \mathbf{Q}_M'(\mathbf{q}_M) + \mathbf{Q}_{ME}(\mathbf{q}_E^{\cdot}) + \overline{\mathbf{Q}}_M''(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{q}_E^{\cdot})\\
&\qquad\qquad dL\mathbf{q}_E^{\cdot}/dt + R^\circ \mathbf{q}_E^{\cdot} = \mathbf{Q}_E'(\mathbf{q}_M, \mathbf{q}_E^{\cdot}) + \mathbf{Q}_{EM}(\dot{\mathbf{q}}_M) + \mathbf{Q}_E''(\mathbf{q}_M, \mathbf{q}_M^{\cdot}, \mathbf{q}_E^{\cdot})\\
&\qquad\qquad d\mathbf{q}_M/dt = \dot{\mathbf{q}}_M
\end{aligned}
$$

Будем называть ее прецессионной моделью (как и в [11, 16]).

Упрощенной системе второго рода (ей соответствует приближенная система, выписанная с точностью до μ^0, т. е. вырожденная система) отвечает система порядка n

$$
\begin{aligned}
&(3.4)\qquad g^\circ \dot{\mathbf{q}}_M = \mathbf{Q}_M'(\mathbf{q}_M) + \mathbf{Q}_{ME}(\mathbf{q}_E^{\cdot}) + \overline{\mathbf{Q}}_M''(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{q}_E^{\cdot})\\
&\qquad\qquad R^\circ \mathbf{q}_E^{\cdot} = \mathbf{Q}_E'(\mathbf{q}_M, \mathbf{q}_E^{\cdot}) + \overline{\mathbf{Q}}_E''(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{q}_E^{\cdot}), \quad d\mathbf{q}_M/dt = \dot{\mathbf{q}}_M
\end{aligned}
$$

Будем называть ее предельной моделью.

Таким образом, для рассматриваемых систем (типа (2.1), (3.2)) можно ввести в соответствии с теорией сингулярных возмущений последовательность приближенных (упрощенных) систем, которая (в приложении к гироскопическим системам) допускает наглядную физическую интерпретацию. А именно упрощенной системе первого рода отвечает традиционная прецессионная модель ((1.2), (3.3)); упрощенной системе второго рода отвечает предельная модель ((1.3), (3.4)), более простая.

4. Следует определить условия, при которых допустим переход к выбранной упрощенной модели более низкого порядка. Поставим задачу: при каких условиях свойство устойчивости для упрощенной модели обеспечивает соответствующее свойство и для исходной системы и при каких условиях имеет место близость решений укороченной и полной систем на бесконечном интервале времени? Следуя идее Н. Г. Четаева [4], можно, используя методы теории устойчивости, получить (как и в [17]) соответствующие утверждения.

Теорема 1. Если при $|g^\circ| \neq 0$ характеристическое уравнение, отвечающее упрощенной системе (1.2), имеет все корни в левой полуплоскости (за исключением, может быть, m нулевых корней в случае СГС), а уравнение $|a^\circ\lambda + b^\circ + g^\circ| = 0$ удовлетворяет условиям Гурвица, то при достаточно большом значении параметра H из свойства асимптотической устойчивости (устойчивости) нулевого решения упрощенной (прецессионной) системы следует и свойство асимптотической устойчивости (устойчивости) нулевого решения полной (исходной) системы (1.1); для наперед заданных чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$ (ε и γ могут быть сколько угодно малы) существует такое значение H_*, что при всех $H > H_*$ для всех $t \geqslant t_0 + \gamma$ в возмущенном движении будут выполняться неравенства

$$\|\dot{\mathbf{q}}_M - \dot{\mathbf{q}}_M^s\| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{q}_M - \mathbf{q}_M^s\| < \varepsilon$$

если в начальный момент t_0

$$\|\dot{\mathbf{q}}_{M0} - \dot{\mathbf{q}}_{M0}^s\| < \delta, \quad \mathbf{q}_{M0} = \mathbf{q}_{M0}^s$$

Здесь индексом s обозначено решение упрощенной системы, причем $\dot{\mathbf{q}}_M^s = \varphi(\mathbf{q}_M^s)$, где $\dot{\mathbf{q}}_M = \varphi(\mathbf{q}_M)$ — решение алгебраического уравнения из (1.2) относительно $\dot{\mathbf{q}}_M$.

Доказательство. В соответствии с принятым здесь подходом система (1.1) рассматривается как сингулярно возмущенная. В случае быстрых гироскопов уравнения (1.1) приводятся к виду (2.1), где $\mathbf{X}_j(\mu, \mathbf{x}) = P_j(\mu)\,\mathbf{x} + \ldots$ $(j = 1,2)$. При этом в качестве приближенной системы для (2.1) принимается нетрадиционная система, линеаризованная по μ (система A). Заметим, что системы (2.1) и A являются частным случаем более общих систем (1.1) и (1.2), рассмотренных в [17], для которых получены [17] теоремы (об устойчивости и о близости решений на бесконечном интервале времени) и соответствующие оценки. Используя теоремы 1 и 2 работы [17], для систем (2.1) и A получаем: 1) если при $|P(0)| \neq 0$ уравнение $|\beta E - P_{11}(0)| = 0$ удовлетворяет условиям Гурвица, а характеристическое уравнение упрощенной системы A имеет все корни в левой полуплоскости (за исключением, может быть, m нулевых корней), то при достаточно малых значениях μ свойство асимптотической устойчивости (устойчивости) нулевого решения приближенной системы A влечет за собой и соответствующее свойство для полной системы (2.1); 2) для наперед заданных положительных чисел ε, δ, γ (причем ε и γ могут быть сколь угодно малы) существует такое значение μ_*, что при $0 < \mu < \mu_*$ для всех $t \geqslant t_0 + \gamma$ в возмущенном движении будет выполняться $\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \| < \varepsilon$, если в начальный момент $\| \mathbf{x}_{10} - \mathbf{x}_{10}^* \| < \delta$, $\mathbf{x}_{20} = \mathbf{x}_{20}^*$. Здесь звездочкой обозначено решение приближенной системы А; без звездочки — решение полной системы (2.1). Возвращаясь к старым переменным $\mathbf{q}_M$, $\dot{\mathbf{q}}_M$ и учитывая, что использованное преобразование переменных нелинейное, неособенное, равномерно регулярное, сохраняет свойства устойчивости, получаем утверждения теоремы 1.

Аналогичный результат получен и для предельной модели (1.3). Соответствующие утверждения имеют место и для СГС (система (3.1)).

Проведенные исследования дают условия, при которых выделенная упрощенная модель приемлема (в принятом здесь смысле).

5. Рассмотрим вопрос о выделении модели типа (1.4). Здесь не пригодны прежние физические предпосылки (допущение о быстрых гироскопах). Для выделения модели (1.4) в качестве упрощенной будем полагать, что экваториальные моменты инерции гироскопов и моменты инерции подвесов (и их массы) малы по сравнению с массовыми характеристиками объектов (платформ), на которых расположены гироскопы. В связи с этим примем в (1.1) $a_1 = a_1(\mathbf{q}_M, \mu) = a_1^*\mu$, где $\mu > 0$ — малый безразмерный параметр, $a_2 = a_2(\mathbf{q}_M, \mu)$, где $a_2(\mathbf{q}_M, 0) = \bar{a}_2 \neq 0$.

В соответствии с изложенной методикой приведем уравнения (1.1) к сингулярно возмущенным. Вводим новые переменные $\mathbf{x}_1 = a_1^*\mathbf{q}_M^{\cdot}$, $\mathbf{x}_2 = \| a_2\dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{q}_M \|^T$, в которых система (1.1) имеет вид

$$\mu\, d\mathbf{x}_1/dt = \mathbf{X}_1(\mu, \mathbf{x}), \quad d\mathbf{x}_2/dt = \mathbf{X}_2(\mu, \mathbf{x}) \tag{5.1}$$

Полагая здесь $\mu = 0$ и принимая полученную вырожденную систему в качестве приближенной для (5.1), а затем возвращаясь к старым переменным, получаем систему (1.4). Совершенно естественно называть эту упрощенную систему (1.4) предельной моделью, так как она отвечает вырожденной системе для (5.1) (но в смысле, отличном от разд. 2 и 3, поскольку вводится иной малый параметр).

С точки зрения механики и здесь, как и выше, воспользовались идеей о разделении движений, приводящей к системе (1.4), отвечающей механической системе с меньшим числом степеней свободы.

6. Теперь следует получить условия, при которых допустимо использование выделенной упрощенной модели (1.4) при исследовании динамики системы (1.1). Тем же методом, следуя Н. Г. Четаеву, при помощи результатов теории устойчивости можно доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Если $| e^\circ | \neq 0$ и уравнения

$$\begin{vmatrix} (b_1^\circ + g_1^\circ)\lambda + e_1^\circ \\ \bar{a}_2^\circ\lambda^2 + (b_2^\circ + g_2^\circ)\lambda + e_2^\circ \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1^*\alpha + b_1^\circ + g_1^\circ \\ \bar{a}_2^\circ \end{vmatrix} = 0 \tag{6.1}$$

удовлетворяют условиям Гурвица (или в случае СГС первое уравнение (6.1) может иметь m нулевых корней), то при достаточно малых значениях параметра μ из свойства асимптотической устойчивости (устойчивости) нулевого решения предельной системы (1.4) следует свойство асимптотической устойчивости (устойчивости) нулевого решения исходной системы (1.1); для наперед заданных чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$ (ε и γ могут быть сколь угодно малы) существует такое значение μ_*, что в возмущенном движении при всех $0 < \mu < \mu_*$ для всех $t \geqslant t_0 + \gamma$ выполняются неравенства

$$\| \dot{\mathbf{q}}_M - \dot{\mathbf{q}}_M^s \| < \varepsilon, \quad \| \mathbf{q}_M - \mathbf{q}_M^s \| < \varepsilon$$

если для t_0

$$\| \dot{\mathbf{q}}_{10} - \dot{\mathbf{q}}_{10}^s \| < \delta, \quad \dot{\mathbf{q}}_{20} = \dot{\mathbf{q}}_{20}^s, \quad \mathbf{q}_{M0} = \mathbf{q}_{M0}^s$$

(индексом s обозначено решение упрощенной системы (1.4), причем $\mathbf{q}_1^{\cdot s} = \varphi_1 (\mathbf{q}_2^{\cdot s}, \mathbf{q}_M^s)$, где $\mathbf{q}_1^{\cdot} = \varphi_1 (\mathbf{q}_2^{\cdot}, \mathbf{q}_M)$ — решение алгебраического уравнения из (1.4) относительно $\mathbf{q}_1^{\cdot}$.

Для доказательства используем тот же подход, что и при доказательстве теоремы 1. Заметим, что система (5.1) в новых переменных тоже является частным случаем систем, рассматриваемых в [17].

Этот результат дает строгое обоснование упрощенной модели, которая широко используется в качестве расчетной в прикладных исследованиях [9, 10]. При полученных выше условиях переход к ней допустим (в указанном смысле), что позволяет проводить исследование системы по этой расчетной модели.

7. В качестве примеров были исследованы системы гироскопической стабилизации. Рассмотрим здесь одноосный гиростабилизатор (ОГС), моделируя его как электромеханическую систему [18], учитывая переходные процессы в электрических цепях следящих систем. Принимаем, как в [7], что используется стабилизирующий двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, с управлением током якоря.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения [18] образуют систему седьмого порядка ($n = 2$, $u = 3$) вида (3.1)

$$B\beta^{\cdot\cdot} - H\alpha^{\cdot} + b_1\beta^{\cdot} = \ldots, \quad \bar{J}\alpha^{\cdot\cdot} + H\beta^{\cdot} + b_2\alpha^{\cdot} = g_M i_2 + \ldots$$

$$\sum_{j=1}^{3} L_{kj} i_j^{\cdot} + R_k i_k = E_k + \ldots \qquad (k = 1, 2, 3)$$

$$E_1 = -\omega\beta, \quad E_2 = -\Omega i_1 - g_E \alpha^{\cdot}, \quad E_3 = 0$$

Здесь сохранены обозначения [18]: β — угол поворота кожуха гироскопа относительно рамы (угол прецессии), α — угол поворота рамы (угол стабилизации), i_1, i_2, i_3 — токи в цепях усилителя, якоря, в обмотке возбуждения; L_{kj} ($k, j = 1, 2, 3$) — коэффициенты само- и взаимоиндукции в этих цепях, R_k ($k = 1, 2, 3$) — активные (омические) сопротивления, b_1 и b_2 — коэффициенты вязкого трения на осях подвесов кожуха гироскопа и рамы соответственно, B и $\bar{J}$ — момент инерции гироскопа и приведенный момент инерции гиростабилизатора относительно соответствующих осей, g_M и g_E — коэффициенты в выражениях механических сил электрического происхождения и электрических сил механического происхождения соответственно, ω и Ω — коэффициенты в выражениях электрических обобщенных сил, многоточие означает невыписанные нелинейные члены.

В соответствии с результатами разд. 2, 3 в случае быстрых гироскопов можно построить два типа расчетных моделей: прецессионную (типа (3.3)), которой отвечает здесь система уравнений пятого порядка

$$-H\alpha^{\cdot} + b_1\beta^{\cdot} = \ldots, \quad H\beta^{\cdot} + b_2\alpha^{\cdot} = g_M i_2 + \ldots$$

$$\sum_{j=1}^{3} L_{kj} i_j^{\cdot} + R_k i_k = E_k + \ldots \qquad (k = 1, 2, 3)$$

и предельную (типа (3.4)), которой отвечает система второго порядка

$$-H\alpha^{\cdot} = \ldots, \quad H\beta^{\cdot} = g_M i_2 + \ldots$$

$$R_1 i_1 = -\omega\beta + \ldots, \quad R_2 i_2 = -\Omega i_1 + \ldots, \quad R_3 i_3 = \ldots$$

Из полученных выше результатов следует, что при достаточно больших значениях H (достаточно большом значении собственного кинетического момента гироскопа) прецессионная модель ОГС приемлема (в принятом здесь смысле), если нулевое решение упрощенной системы устойчиво, а квадратичная форма диссипативной функции, соответствующей механическим обобщенным координатам, постоянно положительна.

В случае же, когда масса стабилизируемого объекта велика по сравнению с массой гироскопа, должна быть введена другая расчетная модель [6, 7]. В соответствии с разд. 5 получаем, что это — предельная модель типа (1.4), которой отвечает система уравнений шестого порядка

$$-H\alpha^{\cdot} + b_1\beta^{\cdot} = \ldots, \quad J\alpha^{\cdot\cdot} + H\beta^{\cdot} + b_2\alpha^{\cdot} = g_M i_2 + \ldots$$

$$\sum_{j=1}^{3} L_{kj} i_j^{\cdot} + R_k i_k = E_k + \ldots \qquad (k = 1, 2, 3)$$

Переход к этой системе допустим при достаточно малых значениях момента инерции гироскопа относительно оси подвеса кожуха, если нулевое решение упрощенной системы устойчиво и момент вязкого трения на оси прецессии отличен от нуля ($b_1 > 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
2. *Кузьмина Л. К.* Методы теории устойчивости и сингулярно возмущенные системы в механике // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Нац. ком-т СССР по теорет. и прикл. механике, 1986. с. 398.
3. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7—263.
4. *Четаев Н. Г.* К вопросу об оценках приближенных интегрирований // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 3. С. 419—421.
5. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
6. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Гостехиздат, 1956. 299 с.
7. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
8. *Метелицын И. И.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 1. С. 31—34.
9. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
10. *Сарычев В. А., Мирер С. А., Златоустов В. А.* Оптимальные параметры аэрогироскопической системы ориентации спутников // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 369—380.
11. *Новоселов В. С.* Движение гироскопических систем // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 1. С. 176—178.
12. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 317 с.
13. *Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г., Новожилов И. В.* О прецессионных уравнениях гироскопических систем // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 230—237.
14. *Соболев В. А., Стрыгин В. В.* О допустимости перехода к прецессионным уравнениям гироскопических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5, С. 10—17.
15. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31. № 3. С. 575—586.
16. *Новоселов В. С.* Движение нелинейных гироскопических систем // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1030—1036.
17. *Кузьмина Л. К.* О некоторых свойствах решений сингулярно возмущенных систем в одном критическом случае // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 382—388.
18. *Кузьмина Л. К.* Об устойчивости гиростабилизаторов // Матер. 1-й Поволж. конф. по автоматическому управлению. Казань: Татар. кн. изд-во, 1971. Кн. 1. С. 110—120.

Казань

Поступила в редакцию
7.XII.1987