

УДК 531.36 : 521.1

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЯХ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА, ИХ ВЕТВЛЕНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ

Рубановский В. Н.

расследуется множество относительных равновесий спутника-гиростата в поле ньютоновского притяжения. Дано наглядное геометрическое представление этого множества равновесий. Исследованы ветвление и устойчивость равновесий симметричного гиростата. Результаты представлены в виде бифуркационных диаграмм, на которых распределение степени неустойчивости равновесий подчиняется закону смены устойчивости при фиксированном значении величины гиростатического момента.

1. В ряде задач динамики гиростата в поле ньютоновского притяжения [1—6] вопрос об определении положений относительного равновесия гиростата приводится к нахождению стационарных значений функции

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (3hA_j\gamma_j^2 - A_j\beta_j^2 - 2k_j\beta_j)$$

при условиях

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \pi_\gamma &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0, \quad \pi_\beta = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 1 = 0 \\ \pi_{\gamma\beta} &= \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 - 0 \end{aligned}$$

Здесь $A_1 \leq A_2 \leq A_3$ — главные центральные моменты инерции гиростата, k_j — проекции на главные оси x_j центрального эллипсоида инерции гиростата вектора \mathbf{k} , пропорционального вектору гиростатического момента \mathbf{g} гиростата.

В частности, для задачи об относительном равновесии спутника-гиростата на кеплеровой круговой орбите [1—4] $h = 1$, $\mathbf{k} = \mathbf{g}\omega^{-1}$, ω — орбитальная угловая скорость, γ_j и β_j — проекции на оси x_j единичных векторов, направленных по радиусу-вектору и бинормали орбиты.

Уравнения относительного равновесия можно записать в виде [4—6]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \partial W_*/\partial\gamma_1 &= 3h[(A_1 - \sigma)\gamma_1 + \lambda\beta_1] = 0 \quad (1 \ 2 \ 3) \\ \partial W_*/\partial\beta_1 &= 3\lambda h\gamma_1 + (\nu - A_1)\beta_1 - k_1 = 0 \quad (1 \ 2 \ 3) \\ 2W_* &= 2W + 6\lambda h\pi_{\gamma\beta} + \nu\pi_\beta - 3\sigma h\pi_\gamma \end{aligned}$$

где λ , σ , ν — неопределенные множители Лагранжа.

Зафиксируем значения λ , σ , ν и разрешим уравнения (1.2) относительно γ_j , β_j :

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \lambda k_1 \Phi_1^{-1}, \quad \beta_1 = (\sigma - A_1) k_1 \Phi_1^{-1} \quad (1 \ 2 \ 3) \\ \Phi_1 &= 3h\lambda^2 + (\sigma - A_1)(\nu - A_1) \quad (1 \ 2 \ 3) \end{aligned}$$

Подставляя значения (1.3) в (1.1), получаем для определения k_1^2 , k_2^2 , k_3^2 систему трех линейных уравнений, из которой при выполнении условия

$$\lambda A \neq 0, \quad A = (A_2 - A_3)(A_3 - A_1)(A_1 - A_2)$$

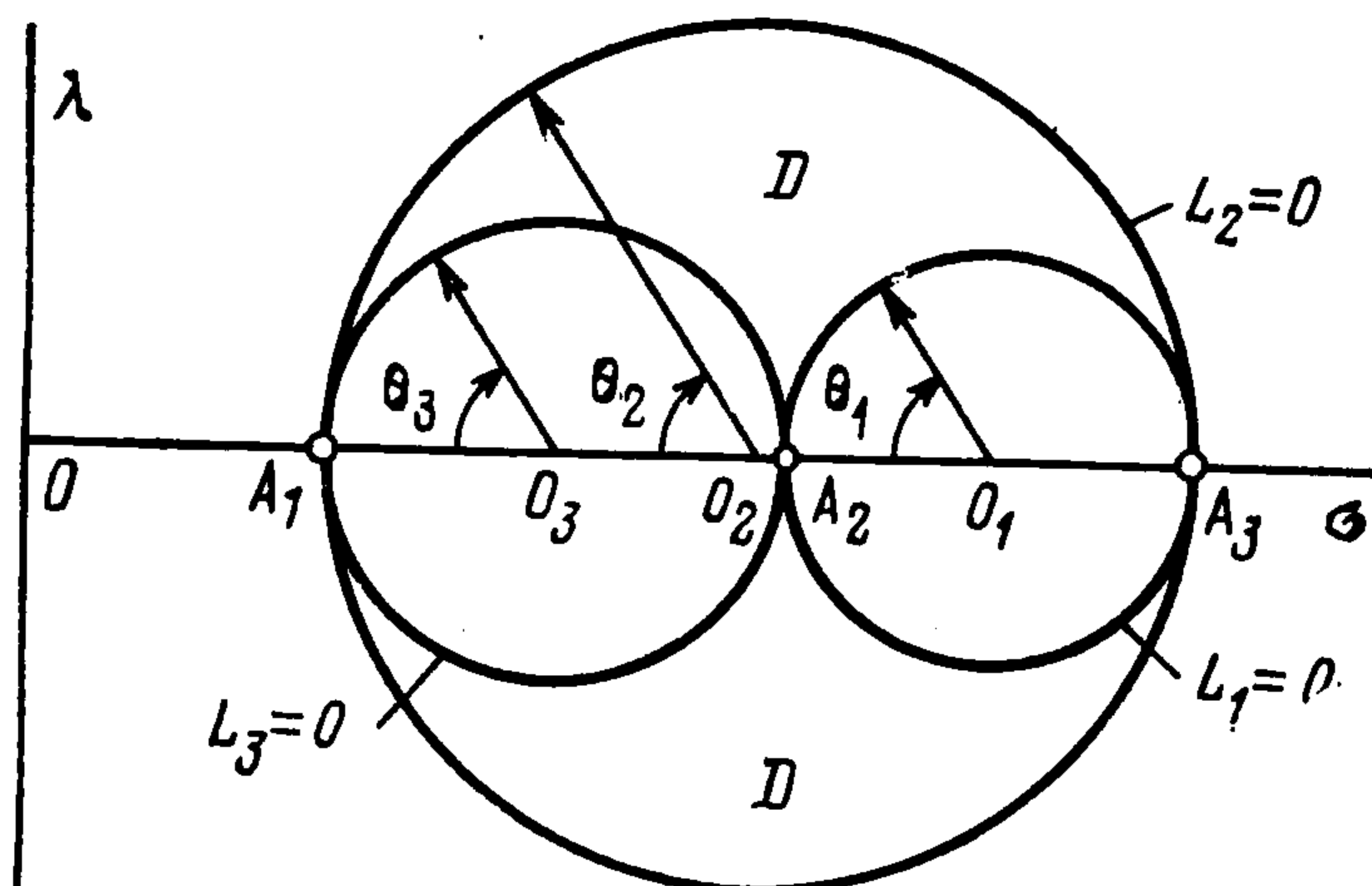
находим

$$(1.4) \quad k_1^2 = \frac{(A_3 - A_2)L_1\Phi_1^2}{\lambda^2 A}, \quad L_1 = \lambda^2 + (\sigma - A_2)(\sigma - A_3) \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Соотношения (1.3) с учетом (1.4) можно представить в виде [6]

$$(1.5) \quad \gamma_1^2 = \frac{(A_3 - A_2) L_1}{A}, \quad \beta_1^2 = \frac{(A_3 - A_2) (\sigma - A_1)^2 L_1}{\lambda^2 A} \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Для геометрического представления множества всех относительных равновесий гиростата (1.3), (1.4) рассмотрим в пространстве параметров λ , σ , ν область [6] D , определяемую неравенствами $L_1 > 0$, $L_2 < 0$, $L_3 > 0$. Точкам области D отвечают вещественные значения γ_j , β_j , k_j . Область D представляет собой цилиндрическое тело, профиль которого (фиг. 1) образуют три круга $L_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), аналогичные известным в теории упругости кругам Мора. Из (1.5) следует, что ориентация корпуса гиростата в относительном равновесии не зависит от параметра ν . Каждой точке профиля области D соответствуют восемь положений равновесия, для которых γ_j , β_j



Фиг. 1

($j = 1, 2, 3$) отвечают восьми различным комбинациям знаков величин k_j . Точкам, симметричным относительно плоскости $\lambda = 0$, отвечают динамически эквивалентные положения равновесия, различающиеся поворотом на 180° вокруг вектора β . Образующим $\lambda = 0$, $\sigma = A_j$ ($j = 1, 2, 3$) границы ∂D области D , по которым происходит взаимное касание каждых двух из трех цилиндров $L_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), отвечают семейства равновесий [3, 4]

(1.6) $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \gamma_3 = \beta_1 = 0, \beta_2 = \sin \theta, \beta_3 = \cos \theta$ (1 2 3)
 $k_1 = 0, k_2 = (\nu - A_2) \sin \theta, k_3 = (\nu - A_3) \cos \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)

В положении равновесия (1.6) ось x_1 параллельна вектору γ , оси x_2 и x_3 перпендикулярны вектору γ , при этом ось x_3 образует с вектором β угол θ , а ось ротора ортогональна векторам γ и β .

Точкам цилиндров $L_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) соответствуют семейства равновесий [3, 4]

$$(1.7) \quad \gamma_1 = \beta_1 = 0, \gamma_2 = \beta_3 = \cos^{1/2} \theta_1, \gamma_3 = -\beta_2 = -\sin^{1/2} \theta_1 \quad (1 \ 2 \ 3)$$

$$k_2 = [\nu - A_2 - 3h (A_3 - A_2) \cos^2 1/2 \theta_1] \sin^{1/2} \theta_1 \quad (0 \leq \theta_1 < 2\pi)$$

$$k_3 = [\nu - A_3 + 3h (A_3 - A_2) \sin^2 1/2 \theta_1] \cos^{1/2} \theta_1, \quad k_1 = 0$$

Для решения (1.7) ось x_1 коллинеарна вектору $\alpha = \beta \times \gamma$, направленному по касательной к орбите в сторону движения центра масс гиростата, оси x_2 и x_3 перпендикулярны вектору α , при этом ось x_3 составляет с вектором β угол $1/2 \theta_1$, а ось ротора ортогональна вектору α . При $A_2 \rightarrow A_1$ ($A_2 \rightarrow A_3$) цилиндр $L_3 = 0$ ($L_1 = 0$) непрерывно стягивается в прямую $\lambda = 0, \sigma = A_1$ ($\lambda = 0, \sigma = A_3$), и область D вырождается в поверхность цилиндра $L_2 = 0$, при этом семейства (1.6) и (1.7) исчерпывают все относительные равновесия гиростата.]

2. Достаточные условия устойчивости относительных равновесий гиростата (1.3), (1.4) получены в [4]. Эти условия, выраженные через пара-

метры λ , σ , ν , можно представить в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} a &> 0, \quad \Delta' = 2av + b > 0, \quad \Delta = av^2 + bv + c > 0 \\ a &= \lambda^{-2}H, \quad b = 3hH' - 2\sigma\lambda^{-2}H - \lambda^{-4}H^2 \\ H &= (\sigma - A_1)(\sigma - A_2)(\sigma - A_3), \quad H' = dH/d\sigma \\ c &= 9/2h^2\lambda^2H'' + 3h[(3h - 1)H - \sigma H'] + (\sigma^2 - 3hH')\lambda^{-2}H + \\ &+ \sigma\lambda^{-4}H^2 \\ \Delta &= \lambda^{-2}H(\nu - \sigma)^2 + (3hH' - \lambda^{-4}H^2)(\nu - \sigma) + 3h[3/2h\lambda^2H'' + \\ &+ (3h - 1)H - \lambda^{-2}H'H] \end{aligned}$$

Рассмотрим две поверхности в пространстве параметров λ , σ , ν

$$\nu = \nu^\pm(\lambda, \sigma), \quad \nu^\pm = (b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$$

определяемые уравнением $\Delta = 0$. Функции $\nu = \nu^\pm$ принимают вещественные значения для всех допустимых значений $\lambda \neq 0$, σ . Поверхность $\nu = \nu^+$ пересекает цилиндры $L_j = 0$ по кривым G_j , проекции которых на плоскость $\lambda = 0$ — гиперболы

$$\nu = A_1 + 3h(\sigma - A_2)(\sigma - A_3)(\sigma - A_1)^{-1} \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Одновременно кривая G_j представляет собой линию пересечения цилиндра $L_j = 0$ и конуса $\Phi_j = 0$. Поверхность $\nu = \nu^-$ пересекает цилиндры $L_j = 0$ по эллипсам E_j , которые располагаются в параллельных плоскостях и проектируются на плоскость $\lambda = 0$ в отрезки параллельных прямых

$$\nu = (1 + 6h)\sigma - 3h(A_2 + A_3) \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Поверхность $\nu = \nu^+$ имеет разрыв при $\sigma = A_2$. При $\sigma \rightarrow A_2$ она асимптотически стремится к плоскости $\sigma = A_2$. При $\sigma < A_2$ поверхности $\nu = \nu^\pm$ пересекаются только при выполнении условия $3h > (A_3 - A_2)(A_2 - A_1)^{-1}$ и тогда линия их пересечения расположена между цилиндрами $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, а ее концы находятся на цилиндре $L_3 = 0$. При $\sigma > A_2$ поверхности $\nu = \nu^\pm$ всегда пересекаются, при этом линия их пересечения расположена между цилиндрами $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, а ее концы лежат на цилиндре $L_1 = 0$.

Условия (2.1) эквивалентны условиям

$$(2.2) \quad a > 0, \quad \nu > \nu_2, \quad \nu_1 = \min(\nu^+, \nu^-), \quad \nu_2 = \max(\nu^+, \nu^-)$$

Из (2.2) заключаем, что равновесия, для которых $\nu > \nu_2$, $\nu_1 < \nu < \nu_2$, $\nu < \nu_1$, имеют степень неустойчивости χ , соответственно равную 0, 1, 2, если $a > 0$, и 1, 2, 3, если $a < 0$.

3. Исследуем относительные равновесия симметричного гиростата при условиях

$$(3.1) \quad A_1 = A_2 < A_3, \quad (e_1^2 + e_2^2)e_3 \neq 0$$

где e_j — проекции на оси x_j единичного вектора, имеющего направление вектора \mathbf{k} , $k_j = ke_j$ ($j = 1, 2, 3$), k — переменный параметр.

Уравнения (1.2), (1.1) при условиях (3.1) имеют два однопараметрических семейства решений:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \lambda ke_1 \Phi_1^{-1}, \quad \beta_1 = ke_1(\sigma - A_1) \Phi_1^{-1} \quad (1 \ 2 \ 3) \\ \Phi_1 &= \Phi_2 = (\sigma - A_1)[\nu - A_1 - 3h(\sigma - A_3)], \quad \lambda^2 = (\sigma - \\ &- A_1)(A_3 - \sigma) \\ \Phi_3 &= (\sigma - A_3)[\nu - A_3 - 3h(\sigma - A_1)], \quad e_1^2 + e_2^2 = e_3^2 \kappa^3 \\ e_3^2 &(A_3 - A_1)(\sigma - A_1) \kappa^3 k^2 = \Phi_1^2, \quad e_3^2(A_3 - A_1)(A_3 - \\ &- \sigma) k^2 = \Phi_3^2 \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad \alpha_1 = \frac{e_2 k}{\kappa^{3/2}(\nu - A_3)}, \quad \alpha_2 = \frac{e_1 k}{\kappa^{3/2}(\nu - A_3)}, \quad \alpha_3 = \frac{e_3 \kappa^{3/2} k}{A_1 - \nu}$$

$$\beta_1 = \frac{e_1 k}{\nu - A_1}, \quad \beta_2 = \frac{e_2 k}{\nu - A_1}, \quad \beta_3 = \frac{e_3 k}{\nu - A_3}$$

$$\lambda = 0, \quad \sigma = A_1, \quad k^2 = \frac{(\nu - A_1)^2 (\nu - A_3)^2}{[(\nu - A_1)^2 + \kappa^3 (\nu - A_3)^2] e_3^2}$$

Положения равновесия (3.2), (3.3) можно представить геометрически в пространстве параметров k, σ, ν точками кривой Γ , ветви Γ_1 и Γ_2 которой определяются последними двумя уравнениями в (3.2) и (3.3).

Исследуем ветви Γ_1 и Γ_2 кривой Γ , отвечающие равновесиям (3.2) и (3.3). Начнем с кривой Γ_1 .

Деля почленно два последних уравнения в (3.2) и вводя вспомогательный параметр μ , получаем

$$(3.4) \quad \frac{\nu - A_1 - 3h(\sigma - A_3)}{\nu - A_3 - 3h(\sigma - A_1)} = \mu, \quad \mu = \kappa \sqrt{\frac{(A_3 - \sigma)\kappa}{\sigma - A_1}} \quad (-\infty < \mu < \infty)$$

Из (3.4) и (3.2) находим

$$(3.5) \quad \nu = \frac{(A_1 - A_3\mu)(\mu^2 + \kappa^3) + 3h(A_1 - A_3)(\mu + \kappa^3)\mu}{(1 - \mu)(\mu^2 + \kappa^3)}, \quad \sigma = \frac{A_1\mu^2 + A_3\kappa^3}{\mu^2 + \kappa^3}$$

Сложим теперь почленно последние два уравнения в (3.2); тогда с учетом (3.4) получим

$$(A_3 - A_1)k^2 = [(\sigma - A_1)\mu^2 + A_3 - \sigma][\nu - A_3 - 3h(\sigma - A_1)]^2$$

Подставляя сюда значения ν и σ из (3.5), окончательно находим

$$(3.6) \quad k^2 = \frac{(1 + 3h)^2 (A_3 - A_1)^2 \mu^2}{e_3^2 (1 - \mu)^2 (\mu^2 + \kappa^3)}$$

Итак, в пространстве параметров k, σ, ν ветвь Γ_1 кривой Γ представляет собой пространственную кривую, которая в параметрической форме определяется уравнениями (3.5), (3.6).

На фиг. 2 представлен график функции, определяемой уравнением (3.6), а на фиг. 3 (сплошная линия) показан вид проекции кривой Γ_1 на плоскость $\sigma = 0$. Здесь

$$k^{*2} = \frac{(1 + 3h)^2 (A_3 - A_1)^2}{(1 + \kappa)^3 e_3^2}, \quad \nu^* = \frac{A_1 + A_3\kappa + 3h(A_1 - A_3)(1 - \kappa)}{1 + \kappa},$$

$$\mu^* = -\kappa$$

Отсюда заключаем, что для значений $0 < k^2 < k^{*2}$ и $k^2 > k^{*2}$ существуют соответственно четыре и два положения относительного равновесия гиростата, определяемые формулами (3.2).

Для равновесий (3.2) условия устойчивости (2.1) принимают вид

$$(3.7) \quad a = \frac{(A_1 - A_3)\kappa^3}{\mu^2 + \kappa^3} > 0, \quad \Delta' = \frac{a(1 + 3h)(A_1 - A_3)[(1 + \mu)\kappa^3 + 2\mu^3]}{(1 - \mu)(\mu^2 + \kappa^3)} > 0$$

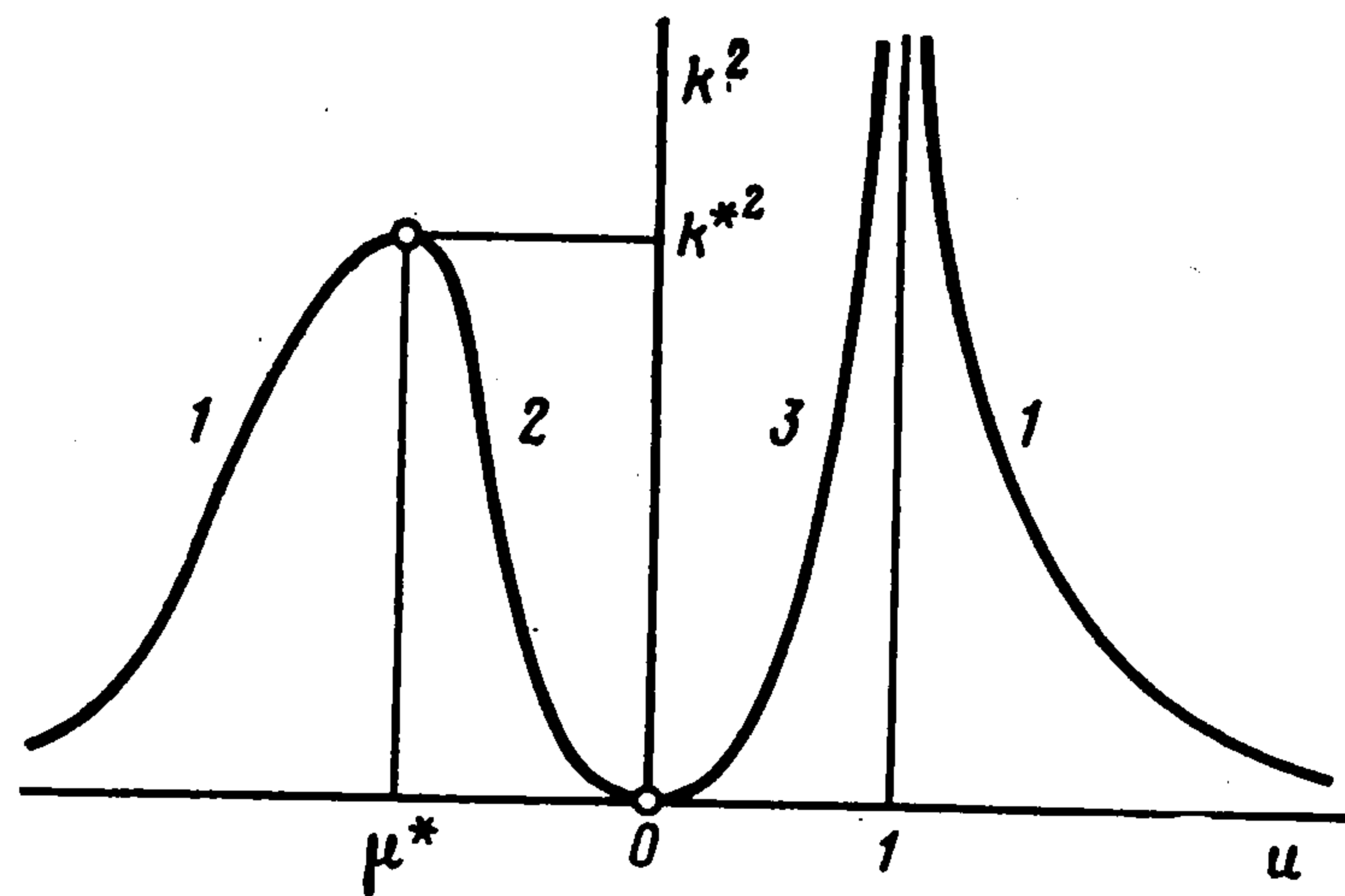
$$\Delta = \frac{1}{2}\kappa^3 e_3^2 (A_1 - A_3)(1 - \mu) dk^2/d\mu > 0$$

Рассмотрим теперь ветвь Γ_2 , отвечающую равновесиям (3.3). В пространстве параметров k, σ, ν она представляет собой плоскую кривую, лежащую в плоскости $\sigma = A_1$ и определяемую последним из уравнений (3.3).

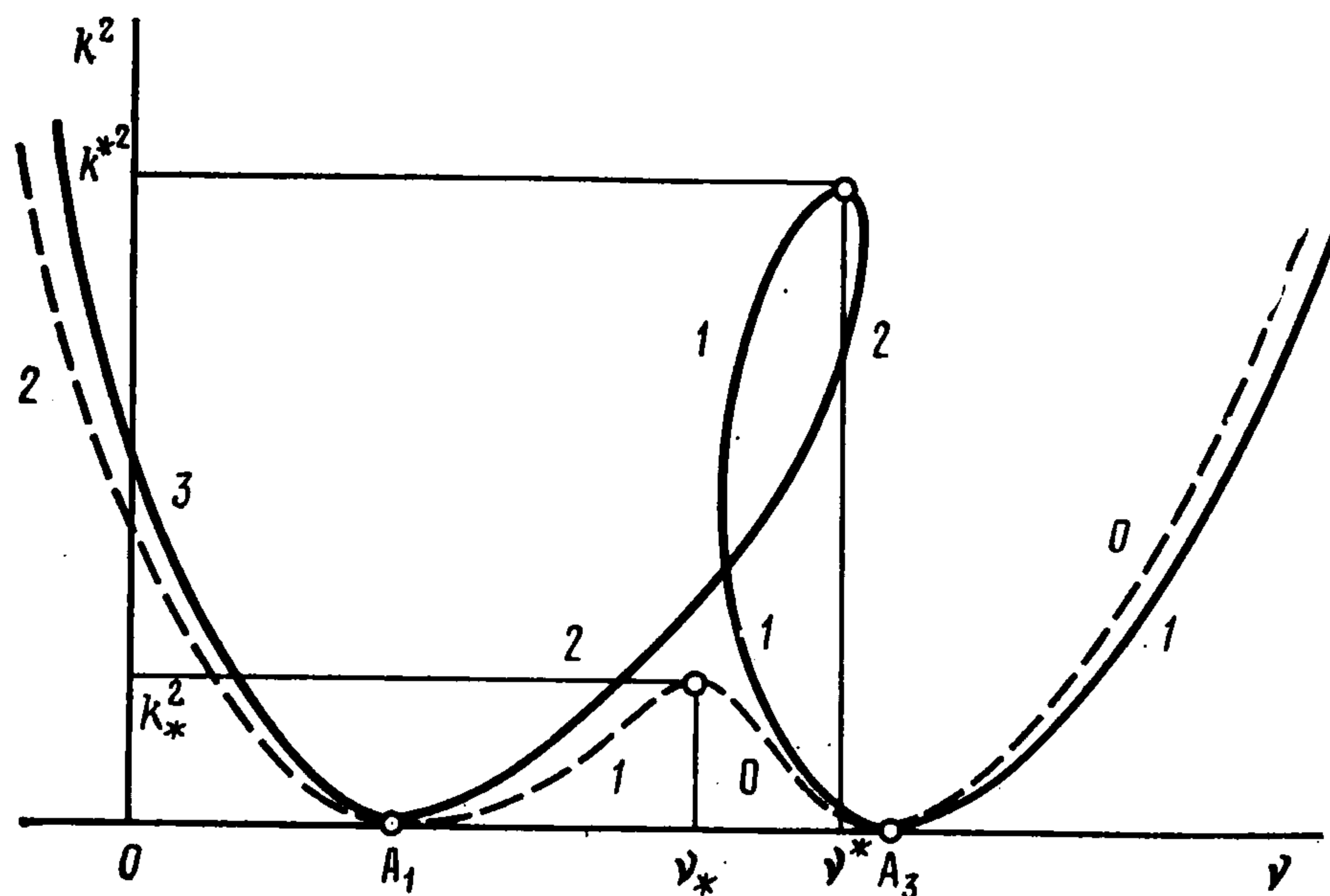
На фиг. 3 (штриховая линия) показана проекция кривой Γ_2 на плоскость $\sigma = 0$. Здесь

$$k_*^2 = \frac{(A_3 - A_1)^2}{(1 + \kappa)^3 e_3^2}, \quad \nu_* = \frac{A_1 + A_3\kappa}{1 + \kappa}, \quad \frac{k_*^2}{k^{*2}} = (1 + 3h)^2 > 1$$

$$\nu_* - \nu^* = 3h(A_3 - A_1)(1 - \kappa)^{-1}(1 + \kappa)^{-1}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Отсюда заключаем, что для значений $0 < k^2 < k_*^2$ и $k^2 > k_*^2$ существуют соответственно четыре и два положения относительного равновесия гиростата, определяемые формулами (3.3).

Достаточные условия устойчивости относительных равновесий (3.3) выражаются неравенствами (2.1), где теперь [4]

$$a = (A_3 - A_1) \alpha_3^2, \quad b = (A_1 - A_3) \alpha_3^2 [(A_1 + A_3) (1 - \beta_3^2) + 2A_1\beta_3^2]$$

$$c = (A_3 - A_1) A_1 \alpha_3^2 [A_1\beta_3^2 + A_3 (1 - \beta_3^2)]$$

С учетом этих соотношений и формул (3.3) условия устойчивости (2.1) можно представить в виде

$$(3.8) \quad a = \frac{(A_3 - A_1) (\nu - A_3)^2 \kappa^3}{(\nu - A_1)^2 + \kappa^3 (\nu - A_3)^2} > 0,$$

$$\Delta' = \frac{a(2\nu - A_3 - A_1) (\nu - A_3)^2 \kappa^3 + 2(\nu - A_1)^2}{(\nu - A_1)^2 + \kappa^3 (\nu - A_3)^2} > 0$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \kappa^3 e_3^2 (A_3 - A_1) (\nu - A_3) \frac{dk^2}{d\nu} > 0$$

4. Исследуем устойчивость равновесий (3.2) и (3.3). Пусть χ — степень неустойчивости (СН). Равновесия, для которых $\chi = 0$, устойчивы; равновесия, для которых $\chi = 1$ или $\chi = 3$, неустойчивы. Характер устойчивости равновесий, для которых $\chi = 2$, не решается теоремой Рауса. Если такое равновесие устойчиво, то его устойчивость носит гироскопический характер и согласно теореме Кельвина—Четаева [7] является временной и разрушается при действии на систему диссипативных сил с полной диссипацией.

Из (3.7), (3.6) и фиг. 2 заключаем, что для равновесий (3.2) $a < 0$ и

$$\Delta' < 0, \Delta < 0, \chi = 1, \text{ если } \mu < \mu^* \text{ или } \mu > 1$$

$$\Delta' > 0; \Delta > 0, \chi = 2, \text{ если } \mu^* < \mu < 0$$

$$\Delta' > 0, \Delta < 0, \chi = 3, \text{ если } 0 < \mu < 1$$

Для равновесий (3.3) из (3.8), последней формулы в (3.3) и фиг. 3 (штриховая линия) заключаем, что $a > 0$ и

$$\Delta' < 0, \Delta > 0, \chi = 2, \text{ если } v < A_1$$

$$\Delta' < 0, \Delta < 0, \chi = 1, \text{ если } A_1 < v < v_*$$

$$\Delta' > 0, \Delta > 0, \chi = 0, \text{ если } v_* < v < A_3 \text{ или } v > A_3$$

Результаты анализа условий устойчивости равновесий (3.2) и (3.3) представлены на фиг. 2 и 3, где цифры 0, 1, 2, 3 на ветвях кривой Γ указывают СН соответствующих равновесий. Отметим, что на фиг. 3 распределение СН на ветвях кривой равновесий подчиняется закону смены устойчивости [7] при фиксированном значении параметра k , в частности, изменение СН происходит только в точках бифуркации.

Аналогичные бифуркационные диаграммы можно построить для равновесий (3.2) и (3.3) и в случае, когда $A_1 = A_2 > A_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесников Н. Н. К устойчивости свободного гиростата // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 699—702.
2. Колесников Н. Н. Об устойчивости свободного гиростата // Вест. МГУ, Матем., мех. 1966. № 3. С. 125—128.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР. 1967. 141 с.
4. Степанов С. Я. О множестве стационарных движений спутника-гиростата в центральном ньютоновском поле сил и их устойчивости // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 737—744.
5. Рубановский В. Н. Об относительном равновесии спутника-гиростата в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // ПММ, 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 494—503.
6. Рубановский В. Н. Об относительном равновесии спутника-гиростата в обобщенной ограниченной круговой задаче четырех тел // Проблемы аналитической механики и управления движением. М.: ВЦ АН СССР. 1985. С. 153—159.
7. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2-е. М.: Гостехиздат. 1955. 207 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.VIII.1987