Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 6, 1988

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Атажанов Б., Красинская Э. М.

С позиций общей теории управления [1, 2] исследуется возможность стабилизации неустойчивых стационарных движений неголономных систем. В отличие от изученного ранее [3] случая, когда силы определенной структуры прикладывались по позиционным и циклическим координатам, рассматривается возможность стабилизации приложением управляющих сил только по циклическим координатам [4], причем управляющие силы могут прикладываться как по всем, так и по части циклических координат и зависят от позиционных координат, скоростей и соответствующих циклических импульсов. Доказано, как и в случае голономных систем [5, 6], что в зависимости от управляемости соответствующей линейной подсистемы можно стабилизировать стационарные движения, в том числе и неустойчивые, до асимптотической устойчивости по всем фазовым переменным или до асимптотической устойчивости по части фазовых переменных и устойчивости по остальным переменным. При этом характер устойчивости относительно тех или иных фазовых переменных зависит от преобразований Ляпунова, которые необходимо проделать, чтобы свести получающиеся критические случаи к особенным [7,8].

1. Пусть неголономные связи, наложенные на систему, находящуюся под действием потенциальных сил, имеют вид

$$q_\mu^{\boldsymbol\cdot} = B_{\mu\rho}(q)\, q_\rho^{\boldsymbol\cdot} \tag{1.1}$$

Здесь и далее

$$\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ \varkappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-l$$
$$\eta = m-l+1,\ \ldots,\ m;\quad \alpha,\ \beta,\ \nu = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ k$$
$$i,\ j = m+k+1,\ m+k+2,\ \ldots,\ n;\ \omega,\ \rho,\ s = m+1,\ m+ + 2,\ \ldots,\ n$$

По дважды повторяющимся индексам проводится суммирование.

Будем, как и в [3], состояние системы описывать переменными Рауса: $q_\mu,\ q_\mu^{\boldsymbol\cdot},\ q_i,\ q_i^{\boldsymbol\cdot},\ q_\alpha,\ p_\alpha$. Рассмотрим сначала тот случай существования многообразия стационарных движений, когда размерность его не меньше суммы числа циклических координат и числа неголономных связей общего вида [9]: пусть неголономные связи общего вида не зависят от циклических скоростей, т. е. $B_{\eta\alpha} \equiv 0$, и выполнены условия

$$\frac{\partial}{\partial q_\varkappa}(T_0 - \Pi) = 0,\quad \frac{\partial}{\partial q_\varkappa} B_{\mu\rho} = 0,\quad \theta_{\varkappa\beta}\Omega_{\varkappa\alpha\nu} = 0 \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial q_\alpha} B_{\eta\rho} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(\theta_{\mu\rho}\Omega_{\mu s\omega}) = 0$$
$$R = {}^1/_2\, a_{ij}^* q_i^{\boldsymbol\cdot} q_j^{\boldsymbol\cdot} + \gamma_{\alpha i} p_\alpha q_i^{\boldsymbol\cdot} - {}^1/_2\, b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - \Pi(q)$$

Здесь T_0 — кинетическая энергия системы без учета неголономных связей (1.1), $\Pi(q)$ — потенциальная энергия, R — функция Рауса, $\theta_{\mu\rho}\Omega_{\mu s\omega}$ — коэффициенты членов неголономности в уравнениях Воронца.

Уравнения возмущенного движения в окрестности произвольного стационарного движения

$$q_\eta = q_{\eta 0},\ q_i = q_{i0},\ q_i^{\boldsymbol\cdot} = 0,\ p_\alpha = c_\alpha = \text{const} \tag{1.3}$$

имеют вид [3]

$$s^{\cdot} = Bx^{\cdot} + \Phi_1(x, s, x^{\cdot}), \quad y^{\cdot} = Nx^{\cdot} + \Phi_2(x, s, y, x^{\cdot})$$
$$Ax^{\cdot\cdot} + \Gamma y^{\cdot} + (D_1 + G_1)x^{\cdot} + Mx + Hy + Es = \Phi_3(x, s, y, x^{\cdot})$$

где y, x, s — соответственно векторы возмущений циклических импульсов p_α, позиционных координат q_i и координат q_η, скорости которых зависимы в силу (1.1). Коэффициенты этих уравнений — постоянные матрицы, известным образом [3] выражающиеся через коэффициенты связей, функцию Рауса и члены неголономности для стационарного движения (1.3); Φ_1, Φ_2, Φ_3 — нелинейные вектор-функции, разложения которых начинаются с членов второго порядка, причем

$$\Phi_1(x, s, 0) = \Phi_2(x, s, y, 0) \equiv 0$$

Сделав в этих уравнениях замену переменных [10] $z = s - Bx$, приведем их к нормальному виду

$$\begin{aligned} &z^{\cdot} = \Phi_1(x, z + Bx, x_1), \quad y^{\cdot} = Nx_1 + \Phi_2(x, z + Bx, y, x_1) \\ &x^{\cdot} = x_1, \quad x_1^{\cdot} = -A^{-1}[\Gamma y^{\cdot} + (D_1 + G_1)x_1 + (M + EB)x + \\ &+ Hy + Ez - \Phi_3(x, z + Bx, y, x_1)] \end{aligned} \tag{1.4}$$

2. Поставим задачу стабилизации стационарных движений приложением управляющих воздействий только по циклическим координатам. Сначала исследуем случай, когда управляющие силы прикладываются по всем циклическим координатам и зависят от позиционных координат, скоростей и всех циклических импульсов. Возьмем следующую линейную подсистему:

$$\begin{aligned} &y^{\cdot} = Nx_1, \quad x^{\cdot} = x_1, \quad x_1^{\cdot} = -A^{-1}[\Gamma y^{\cdot} + (D_1 + G_1)x_1 + \\ &+ (M + EB)x + Hy] \end{aligned} \tag{2.1}$$

Приложим к этой системе вектор управляющих сил v ($\dim v = k$) по циклическим координатам и будем стабилизировать стационарное движение $y = x = x_1 = 0$ по асимптотической устойчивости по переменным y, x, x_1. Критерий качества переходного процесса возьмем в виде функционала

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(x, x_1, y, v)\,dt \tag{2.2}$$

где ω — сумма положительно определенных квадратичных форм относительно переменных y_α, x_i, x_{1i} и управления v_α.

Обозначим

$$Q' = \{I, 0, -A^{-1}\Gamma\} \tag{2.3}$$

$$P = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & I \\ -A^{-1}H & -A^{-1}(M + EB) & -A^{-1}(\Gamma N + D_1 + G_1) \end{matrix} \right\|$$

где I — единичная, 0 — нулевая матрицы.

Согласно теории управления [1, 2] линейных систем, если ранг матрицы

$$W = \{Q, PQ, \ldots, P^{2(n-m)-k-1}Q\} \tag{2.4}$$

равен порядку системы (2.1), то задача оптимальной стабилизации имеет решение. Тогда коэффициенты линейного управления вида

$$v = L_1x + L_2x_1 + L_3y \tag{2.5}$$

можно определить единственным образом по выбранной оптимальной квадратичной функции Ляпунова V° [2]. Для определения коэффициентов V° получаются известные алгебраические уравнения. В некоторых случаях [2, 5] коэффициенты V° и управления (2.5) можно найти аналитически.

Если таким путем можно определить линейное управление (2.5), то для управляемой подсистемы (2.1) все корни характеристического уравнения

$$\Delta_1(\lambda)= \\ =\det\begin{Vmatrix} -L_1 & -L_2-N & I\lambda-L_3 \\ I\lambda & I & 0 \\ -A^{-1}(M+EB+ & I\lambda-A^{-1}(\Gamma N+\Gamma L_2+ & -A^{-1}(H+\Gamma L_3) \\ +\Gamma L_1) & +D_1+G_1) & \end{Vmatrix}=0$$

будут иметь отрицательные действительные части.

Исследуем устойчивость нулевого решения полной системы уравнений (1.4) при действии управлений (2.5), решающих задачу оптимальной стабилизации нулевого решения управляемой подсистемы (2.1)

$$\begin{aligned}
(2.6)\qquad & z^\cdot = \Phi_1(x, z+Bx, x_1),\ y^\cdot = (N+L_2)x_1 + L_1x + L_3y + \\
& + \Phi_2(x, z+Bx, y, x_1),\ x^\cdot = x_1 \\
& x_1^\cdot = -A^{-1}[(\Gamma N + \Gamma L_2 + D_1 + G_1)x_1 + (M+EB+\Gamma L_1)x + \\
& + (H+\Gamma L_3)y + Ez - \Phi_3 + \Gamma\Phi_2]
\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение первого приближения этой системы

$$\lambda^l\Delta_1(\lambda) = 0$$

имеет l нулевых корней, где l — число связей общего вида, а остальные корни лежат в левой полуплоскости.

Докажем теперь, что полученный критический случай можно свести к особенному [7, 8].

Так как $\Delta_1(0) \neq 0$, то существуют неявные функции $u_1(z)$ и $u_2(z)$, определяемые системой уравнений

$$\begin{aligned}
(2.7)\qquad & L_1u_1(z) + L_3u_2(z) = 0 \\
& (M+EB+\Gamma L_1)u_1(z) + (H+\Gamma L_3)u_2(z) + Ez - \Phi_3{}^* = 0 \\
& (\Phi_3{}^* = \Phi_3(u_1(z), z+Bu_1(z), u_2(z), 0))
\end{aligned}$$

Сделаем замену переменных Ляпунова [7]

$$(2.8)\qquad x = \zeta + u_1(z),\ y = \eta + u_2(z)$$

Тогда система уравнений (2.6) примет вид

$$\begin{aligned}
(2.9)\qquad & z^\cdot = \Phi_1,\ \eta^\cdot = (N+L_2)x_1 + L_1\zeta + L_3\eta + \Phi_2{}^0 \\
& \zeta^\cdot = x_1 - (\partial u_1/\partial z)\Phi_1 \\
& x_1^\cdot = -A^{-1}[(\Gamma N+\Gamma L_2+D_1+G_1)x_1 + (M+EB+ \\
& +\Gamma L_1)\zeta + (H+\Gamma L_3)\eta - \Phi_3{}^\circ] \\
& (\Phi_3{}^\circ = \Phi_3 - \Phi_3{}^* - \Gamma\Phi_2,\ \Phi_2{}^\circ = \Phi_2 - (\partial u_2/\partial z)\Phi_1)
\end{aligned}$$

где Φ_2, Φ_3 уничтожаются при $\zeta = \eta = x_1 = 0$.

Таким образом, система уравнений возмущенного движения приведена к виду (2.9), для которого выполнены условия теоремы Ляпунова — Малкина [7, 8] об особенном случае нескольких нулевых корней. Согласно этой теореме, стационарное движение (1.3) будет асимптотически устойчивым по отношению к переменным ζ, η, x_1 и устойчивым относительно z.

Следовательно, справедлива

Теорема 1. Если ранг матрицы W (2.4) равен $2(n-m)-k$, то стационарное движение (1.3) можно стабилизировать приложением управляющих сил (2.5) только по циклическим координатам.

При этом, учитывая замены (2.8), получим асимптотическую устойчивость по позиционным скоростям $q_i^{\cdot}$ и устойчивость по координатам q_i, q_η и циклическим импульсам p_α.

Замечания 1°. Теорема 1 также будет справедлива, если для стабилизации нулевого решения полной системы выбрать вектор управления в виде

$$v = L_1 x + L_2 x_1 + L_3 y + \Phi_4 (x, x_1, y)$$

где Φ_4 — нелинейная вектор-функция, разложение которой начинается с членов второго порядка малости относительно x, x_1, y. В этом случае в уравнениях (2.7) нужно еще добавить соответственно члены Φ_4^* и $\Gamma\Phi_4^*$, аналогичные Φ_3^*.

2°. Если последнее уравнение системы (2.6) не содержит свободно входящих критических переменных z, получим асимптотическую устойчивость по переменным q_i, $q_i^{\cdot}$, p_α и устойчивость по координатам q_η. Действительно, в этом случае нет необходимости проводить замену переменных (2.8) и система (2.6) сразу будет удовлетворять условиям теоремы Ляпунова — Малкина об особенном случае.

3°. При выбранной структуре управления (2.5) в отличие от работы [3] при необходимости можно компенсировать диссипативные силы, действующие по циклическим координатам и зависящие от позиционных и циклических скоростей. В этом случае достаточно учесть в управлении соответствующие слагаемые $L_2^\circ x_1 + L_3^\circ y + Q_0$, где Q_0 — постоянная матрица.

3. Рассмотрим теперь задачу стабилизации стационарных движений приложением управлений только по части циклических переменных.

Пусть вектор y_1 ($\dim y_1 = k_1 < k$) — часть вектора y, по которому не прикладываются управления, y_2 ($\dim y_2 = k - k_1$) — часть вектора y, по которому прикладываются управления v_2. В этом случае необходимо сделать замену переменных $w_1 = y_1 - Nx_1$, и критическими переменными будут z и w_1. Линейная управляемая подсистема имеет вид

$$\begin{aligned} &y_2^{\cdot} = N_2 x_1 + v_2, \quad x^{\cdot} = x_1 \\ &x_1^{\cdot} = -A^{-1}[(\Gamma N + D_1 + G_1) x_1 + \Gamma v_2 + (M + EB + \\ &+ H_1 N_1) x + H_2 y_2] \end{aligned} \tag{3.1}$$

Если ранг матрицы

$$W = \{Q, PQ, \ldots, P^{2(n-m)-k-k_1-1}Q\} \tag{3.2}$$

(где Q и P имеют вид (2.3) при замене H на H_2, N на N_2, M на $M + H_1 N_1$) равен $2(n-m)-k-k_1$, то управление вида (2.5) решает задачу оптимальной стабилизации для подсистемы (3.1).

Характеристическое уравнение первого приближения полной системы будет иметь $l + k_1$ нулевых корней. Тогда, аналогично предыдущему, заменой Ляпунова

$$x = \zeta + u_1(z, w_1), \quad y_2 = \eta + u_2(z, w_1)$$

можно привести систему полных уравнений возмущенного движения к особенному случаю $l + k_1$ нулевых корней.

Следовательно, справедлива

Теорема 2. Если ранг матрицы W (3.2) равен порядку линейной управляемой подсистемы (3.1), то стационарное движение (1.3) можно стабилизировать приложением управляющих сил вида (2.5) по части циклических координат, соответствующих импульсам y_2.

4. Пусть теперь уравнения связей зависят от циклических скоростей, т. е. $B_{\eta\alpha} \neq 0$, и уравнения связей общего вида в переменных Рауса имеют вид [11, 12]

$$q_\eta^{\cdot} = (B_{\eta i} - B_{\eta\alpha}\gamma_{\alpha i}) q_i^{\cdot} + B_{\eta\alpha} b_{\alpha\beta} p_\beta$$

Пусть выполнены условия (1.2) и следующие условия существования стационарных движений вида (1.3):

$$(B_{\eta\alpha} b_{\alpha\beta})^\circ c_\beta = 0$$

В таком случае уравнения первого приближения уравнений возмущенного движения и для связей общего вида, и для циклических импульсов, вообще говоря, будут содержать все переменные x, $x^{\cdot}$, s, y.

Рассмотрим для простоты случай [12], когда

$$B_{\eta\alpha} \partial R_0 (q, p) / \partial q_\eta \equiv 0$$

где

$$R_0 (q, p) = -\Pi (q) - {}^1/_2 b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta$$

— часть функции Рауса, не содержащая позиционных скоростей. В этом случае уравнения возмущенного движения имеют вид [12]

$$\begin{aligned} (4.1) \qquad & s^{\cdot} = Bx_1 + Kx + \Phi s + Ty + \Phi_1^\circ \\ & y^{\cdot} = Nx_1 + \Phi_2^\circ, \ x^{\cdot} = x_1, \ x_1^{\cdot} = -A^{-1} [(D + G) x_1 + \Gamma y^{\cdot} + \\ & + Mx + Es + Hy - \Phi_3^\circ] \end{aligned}$$

где коэффициенты известным образом [11, 12] выражаются через коэффициенты связей, функции Рауса и членов неголономности.

Предположим, что $T = (B_{\eta\alpha} b_{\alpha\beta}) \neq 0$. Приложим по циклическим координатам вектор управляющих сил вида

$$(4.2) \qquad v = L_1 x + L_2 x_1 + L_3 y + L_4 s + \Phi_4 (x, x_1, y, s)$$

и рассмотрим матрицу

$$\begin{aligned} (4.3) \qquad & W = \{Q_1, P_1 Q_1, \ldots, P_1^{2(n-m)-k+l-1} Q_1\} \\ & Q' = \{0, I, 0, -A^{-1}\Gamma\} \end{aligned}$$

$$P_1 = \left\| \begin{matrix} \Phi & T & K & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^{-1}E & -A^{-1}H & -A^{-1}M & -A^{-1}(D + G + \Gamma N) \end{matrix} \right\|$$

Тогда справедливо следующее утверждение, вытекающее из теоремы о стабилизации по первому приближению [2].

Теорема 3. Если ранг матрицы W (4.2) равен порядку системы (4.1), т. е. $2 (n - m) - k + l$, то стационарное движение (1.3) можно стабилизировать по первому приближению приложением управляющих сил (4.2) только по циклическим координатам. При этом невозмущенное движение асимптотически устойчиво относительно позиционных координат q_η, q_i, скоростей $q_i^{\cdot}$ и циклических импульсов p_α при любых нелинейных членах.

Замечание. Полученные согласно теоремам 1 и 2 управления, вообще говоря, не будут оптимальными для системы уравнений (1.4) при выбранном функционале с квадратичной подынтегральной функцией. Эти управления будут решать для системы (1.4) только задачу стабилизации. Но постановка задачи оптимальной стабилизации для линейной управляемой подсистемы позволяет ответить на вопрос о разрешимости задачи стабилизации для полной системы. При этом одновременно определяется структура управляющих сил.

Управления, полученные согласно теореме 3, будут оптимальными и для полной системы уравнений, если в качестве функционала выбрать

$$\int_{t_0}^{\infty} (\omega + \omega_1)\, dt$$

где ω — сумма положительно определенных квадратичных форм относительно переменных x, x_1, y, s и управления v

$$\omega_1 = \frac{\partial V^\circ}{\partial y} \Phi_2{}^\circ + \frac{\partial V^\circ}{\partial x_1} (\Phi_3{}^\circ - \Gamma\Phi_2{}^\circ) + \frac{\partial V^\circ}{\partial s} \Phi_1{}^\circ$$

причем V° — оптимальная функция Ляпунова, которая находится при решении задачи оптимальной стабилизации первого приближения системы (4.1) для квадратичного функционала (2.2).

Пример. Стабилизация неустойчивого верчения диска на горизонтальной шероховатой плоскости [13] осуществлялась приложением по циклической координате φ момента, зависящего от позиционной скорости $\theta^\cdot$ [3]. При этом возникала необходимость в приложении диссипативной силы по позиционной координате.

Рассмотрим теперь возможность стабилизации неустойчивых стационарных движений диска независимо от присутствия диссипативных сил, действующих по позиционной координате.

Функция Лагранжа L, составленная с учетом неголономных связей $x^\cdot = a\varphi^\cdot \cos\psi$, $y^\cdot = a\varphi^\cdot \sin\psi$, имеет вид

$$L = {}^1/_2\, [A^\circ\theta^{\cdot 2} + (C + ma^2)(\varphi^\cdot - \psi^\cdot \sin\theta)^2 + A\psi^{\cdot 2}\cos^2\theta] - mga\cos\theta,$$
$$A^\circ = A + ma^2$$

Здесь m — масса диска, a — радиус, A — экваториальный, C — полярный моменты инерции [13].

Выпишем уравнения возмущенного движения [3] в линейном приближении в окрестности произвольного стационарного движения $\theta = \theta_0$, $p_1 = c_1 = \mathrm{const}$, $p_2 = c_2 = \mathrm{const}$.

Полагая $\theta = \theta_0 + \eta$, $p_1 = c_1 + y_1$, $p_2 = c_2 + y_2$, получим

$$y_1{}^\cdot = N_1\eta^\cdot, \quad y_2{}^\cdot = N_2\eta^\cdot$$
$$A^\circ\eta^{\cdot\cdot} + h\eta^\cdot + M\eta + H_1y_1 + H_2y_2 = 0$$

где постоянные коэффициенты зависят от выбранного стационарного движения [3].

Приложим к диску по углу собственного вращения и прецессии управления v_1 и v_2 вида (2.5), линейно зависящие от переменных $z_1, z_2, \eta, \eta^\cdot$ $(z_\delta = y_\delta - N_\delta,\ \delta = 1, 2)$. Тогда матрицы Q и P будут иметь вид

$$Q = \begin{Vmatrix} I \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ P_1 & P_2 \end{Vmatrix}; \quad P_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ H_1{}^\circ & H_2{}^\circ \end{Vmatrix}, \quad P_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ M^\circ & h^\circ \end{Vmatrix}$$
$$H_\delta{}^\circ = -H_\delta/A^\circ, \quad M^\circ = -(M + H_1N_1 + H_2N_2)/A^\circ, \quad h^\circ = -h/A^\circ$$

Рассмотрим сначала круговое движение, для которого c_1, c_2, θ_0 сохраняют постоянные значения. В этом случае ранг матрицы W равен четырем как при действии диссипации ($h \neq 0$), так и при ее отсутствии ($h = 0$). Следовательно, неустойчивое круговое движение диска можно стабилизировать приложением по циклическим координатам φ и ψ одновременно двух линейных управляющих моментов v_1 и v_2, зависящих от переменных z_1, z_2, η, $\eta^\cdot$. Коэффициенты этих управлений должны удовлетворять условиям, вытекающим из критерия Гурвица отрицательности корней характеристического уравнения. Можно проверить, что верчение ($p_1 = c_1 = 0$, $p_2 = c_2 = \mathrm{const}$, $\theta_0 = 0$) и качение по прямой ($p_1 = c_1 = \mathrm{const}$, $p_2 = c_2 = 0$, $\theta_0 = 0$) аналогичным образом можно стабилизировать двумя управлениями v_1 и v_2, если $M \neq 0$. При такой стабилизации круговое движение, верчение и качение по прямой будут асимптотически устойчивыми относительно θ, θ', p_1, p_2.

Будем теперь стабилизировать круговое движение управляющим моментом $v_2 = l_1\eta + l_2\eta^\cdot + l_3z_2$, приложенным только по одной циклической координате ψ. В этом случае z_1 будет критической переменной. Рассматривая подсистему из трех остальных уравнений, заключаем, что $\mathrm{rank}\, W = 3$ как при действии диссипации ($h \neq 0$), так и при ее отсутствии ($h = 0$).

Рассматривая полную систему уравнений, в силу теоремы 2 придем к выводу, что круговое движение будет асимптотически устойчивым относительно $\theta^{\cdot}$ и устойчивым относительно θ, p_1, p_2.

Аналогично круговое движение можно стабилизировать управляющим моментом $v_1 = l_1\eta + l_2\eta^{\cdot} + l_3 z_1$, приложенным по циклической координате φ.

Приложив управляющий момент v_1 по циклической координате φ, получим возможность стабилизации верчения независимо от действия диссипации. При этом будем иметь асимптотическую устойчивость относительно p_1, θ, $\theta^{\cdot}$ и устойчивость относительно p_2, так как в этом случае $H_2 = 0$ и нет свободно входящих критических переменных y_2. Для сравнения с [3] выпишем условия, определяющие коэффициенты управляющего момента:

$$l_3 < 0, \quad l_2 > -l_1 > (A\Omega^2 + ma^2\Omega - mga)/\Omega$$

Если же в случае верчения приложить управляющий момент по циклической координате ψ, то система неуправляема по линейному приближению.

Наконец, рассмотрим стабилизацию качения диска по прямой при помощи одного управления. Присоединяя управление v_2 по циклической координате ψ, получим, что подсистема из последних трех уравнений управляема, причем для полной системы уравнений имеет место асимптотическая устойчивость по p_2, θ, $\theta^{\cdot}$ и устойчивость по p_1, так как полная система уравнений не содержит свободно входящих критических переменных y_1. Если же прикладывать управление по циклической координате φ, то система неуправляема по первому приближению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука. 1968. 475 с.
2. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475—514.
3. *Красинская Э. М.* К стабилизации стационарных движений механических систем // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 302—309.
4. *Румянцев В. В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 966—976.
5. *Красинский А. Я., Ронжин В. В.* Об оптимальной стабилизации установившихся движений голономных систем // Всесоюз. науч. конф. «Метод функций А. М. Ляпунова в современной математике». Тез. докл. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1986. С. 95.
6. *Красинский А. Я.* О математическом моделировании в задачах оптимальной стабилизации установившихся движений//Всесоюз. школа-семинар «Математическое моделирование в науке и технике». Тез. докл. Пермь: УНЦ АН СССР, 1986. С. 184—185.
7. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 473 с.
8. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
9. *Карапетян А. В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 418—426.
10. *Красинская-Тюменева Э. М., Красинский А. Я.* О влиянии структуры сил на устойчивость равновесия неголономных систем // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1977. Вып. 45. С. 172—186.
11. *Атажанов Б., Красинская Э. М.* К устойчивости стационарных движений неголономных систем // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. 1985. № 1. С. 41—46.
12. *Атажанов Б., Красинская Э. М.* К устойчивости стационарных движений неголономных систем // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. 1985. № 6. С. 39—43.
13. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.

Ташкент

Поступила в редакцию
23.III.1988