

УДК 531.01

КОНСТРУКТИВНАЯ МОДЕЛЬ УДАРА С ТРЕНИЕМ

Иванов А. П.

Для описания стереомеханического удара шероховатых тел предлагается модель, основанная на задании ударных сил как некоторой функции деформаций (например, по аналогии со свойствами вязкоупругой среды). При этом коэффициенты трения и восстановления относительной скорости заранее не задаются, что дает возможность исследовать их зависимость от начальных условий. Ранее [1—3] удар с трением изучался при помощи формально-аксиоматического подхода. Предлагаемая модель более физична, более проста и лучше согласуется с экспериментальными данными (например, [4]).

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему с конфигурационным пространством $x \in R^n$, кинетической энергией $T = \frac{1}{2} \dot{x}^T A(x) \dot{x}$, $A \in R^{n \times n}$, обобщенными силами $Q(x, \dot{x}) \in R^n$ и неудаерживающей связью $f(x) \geq 0$. В системе двух твердых тел такая связь выражает невозможность одновременного занятия точками разных тел одинаковых положений в пространстве, при этом f — расстояние между телами.

Если в некоторый момент времени $t = t^0$ выполнены условия

$$f(x) = 0, \quad \dot{f}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \dot{x}_j < 0$$

то происходит удар системы о связь. Примем допущения стереомеханической теории [5] о возможности пренебречь как продолжительностью удара, так и сопровождающими его волновыми явлениями. Тогда до- и послеударные значения координат x_- и x_+ совпадают и описание удара сводится к нахождению зависимости \dot{x}_+ от \dot{x}_- .

Уравнения Лагранжа в применении к удару имеют вид [1]

$$(1.1) \quad \Delta \dot{x}^T A(x^0) = I, \quad x^0 = x(t^0), \quad \Delta x^* = x_+^* - x_-^*$$

где I — ударный импульс.

Обычно [1—3] определение величины I основано на использовании некоторых постулатов. К их числу относится гипотеза Ньютона о двух фазах удара, в соответствии с которой

$$(1.2) \quad (x_+^*, N) = -\kappa (x_-^*, N), \quad 0 \leq \kappa \leq 1$$

где κ — коэффициент восстановления, N — вектор, нормальный к поверхности $f(x) = 0$ в точке x^0 . Второй постулат — о кулоновском характере ударного трения — утверждает, что в течение всего удара нормальное и касательное напряжения связаны законом Амонтона — Кулона [1]. Совокупность двух этих предположений позволяет однозначно определить зависимость \dot{x}_+ от \dot{x}_- [1—3], однако она настолько сложна, что получение явных формул возможно лишь в простейших частных случаях [6].

Другой подход к описанию стереомеханического удара связан с использованием физических моделей ударных сил. При этом ограничение $f(x) \geq 0$ во время удара считается нарушенным (так что $-f(x) \sim \varepsilon$, $\varepsilon \ll \ll 1$), что соответствует деформации соударяемых тел. Для $f < 0$ ударные

силы определяются как функции деформаций. Окончание удара соответствует перемене знака функции f с минуса на плюс. Такой подход оказывается эффективным и в тех случаях, когда формально-аксиоматическое описание удара некорректно [7].

В [8] конструктивный подход применялся к описанию удара гладких тел. Задача данной работы — исследование на его основе удара с трением.

2. Описание модели. Выбор обобщенных координат в системе двух тел может быть продиктован особенностями их движения или формы, так что в общем случае координаты x могут быть неортогональными [9]. Поэтому метрические понятия (ортогональность, норма) определяются в смысле скалярного произведения

$$(2.1) \quad (a, b) = aA(x^0)b^T, \quad a, b \in R^n$$

которое инвариантно выбору обобщенных координат.

Нормальный вектор к поверхности $f(x) = 0$ в точке x^0 равен $N = \text{grad } f \cdot A^{-1}(x^0)$, а касательная и нормальная составляющие ударного импульса определяются по формулам

$$I_n = (I, n)n, \quad I_t = I - I_n, \quad n = N/|N|, \quad |N| = (N, N)^{1/2}$$

При описании поверхностей шероховатых тел обычно разделяют их макро- и микроструктуру [10]: базовая поверхность тела определяется его геометрической формой, а ее микрорельеф известен лишь статистически. Исходя из этого, представим функцию f , описывающую неударяющую связь, в виде

$$(2.2) \quad f = \frac{f_*^0 - g}{|N_*^0|}, \quad f_*^0 = \frac{f^0}{|N^0|}, \quad N^0 = \text{grad } f^0 \cdot A^{-1}(x^0), \\ N_*^0 = \text{grad } (f_*^0 - g) A^{-1}(x^0)$$

где базовая поверхность описывается уравнением $f^0 = 0$ (или, в нормированном виде, $f_*^0 = 0$), а микрорельеф задается функцией $g(x)$, случайным образом выбранной из некоторого функционального пространства G с вероятностной мерой P ; будем считать, что $|g(x)| \leq \varepsilon_1 \ll 1$, $g \in G$. Смысл нормировки в формулах (2.2) выяснится в дальнейшем, при выводе уравнения (2.4).

Сравним взаимное расположение поверхностей $f = 0$ и $f^0 = 0$. Если $f^0(x^0) = 0$, то по формуле Тейлора

$$f^0(x^0 + h) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f^0}{\partial x_j} \Big|_{x^0} + o(|h|) = (h, N^0) + o(|h|)$$

Уравнение $f(x^0 + h) = 0$, т. е. $f_*^0(x^0 + h) = g(x^0 + h)$, принимает вид

$$(h, N^0/|N^0|) = g(x^0 + h) + o(|h|)$$

Следовательно, функция g описывает высоту профиля шероховатой поверхности над базовой, вычисленную в направлении нормали к последней.

Для величины обобщенных сил при $f < 0$ примем модель вязкоупругой среды Кельвина — Фойгта [5], полагая

$$(2.3) \quad Q^* = -(M^2 f + 2kMf') \text{grad } f, \quad 0 \leq k \leq 1, \quad M \gg 1$$

Пренебрегая в уравнениях движения при $f < 0$ конечными обобщенными силами Q и малыми порядка ε , ε_1 , с учетом нормировки в (2.2) получим соотношение

$$(2.4) \quad f'' = (x'', N) = (Q^* A^{-1}(x^0), N) = -(M^2 f + 2kMf')$$

Разрешая уравнение (2.4) при начальных условиях $f(t^0) = 0$, $\dot{x}(t^0) = \dot{x}_0$, имеем

$$(2.5) \quad f = \dot{x}_0 M^{-1} (1 - k^2)^{-1/2} \sin [M (1 - k^2)^{1/2} (t - t^0)] \exp [-kM (t - t^0)]$$

Промежутку удара $t^0 \leq t \leq t^0 + \tau$ соответствуют значения $f < 0$, следовательно, $\tau = \pi M^{-1} (1 - k^2)^{-1/2}$.

Величину I в (1.1) определим как среднее значение:

$$(2.6) \quad I = \int_{t^0}^{t^0 + \tau} dt \int_G Q^*(g, t) dP(g, x_-)$$

Функция $Q^*(g, t)$ задана формулами (2.3), (2.5), а $dP(g, x_-)$ — зависящая от x_- вероятность пересечения траектории $x(t)$ с поверхностью $f(x) = 0$ в точке x^0 для данной реализации микрорельефа $g \in G$. Характер этой зависимости ясен из следующих рассуждений. Во-первых, начальные условия удара $x(t^0) = x^0$, $\dot{x}(t^0) = \dot{x}_-$ согласуются не со всеми реализациями микрорельефа $g \in G$, а только с такими, для которых $(N, x_-) < 0$ (поскольку до удара $f > 0$). Во-вторых, в зависимости от угла между векторами x_- и N меняется проекция ds^* элемента площади касательной плоскости ds к поверхности $f = 0$ в точке x^0 на направление x_- : если x_- и N коллинеарны, эта проекция максимальна, а с изменением N она уменьшается в соответствии с формулой $ds^* = - (N, x_-) |x_-|^{-1} ds$.

Нормируя функцию $P(g, x_-)$ таким образом, чтобы на множестве G^* допустимых реализаций микрорельефа она была вероятностной мерой, получаем окончательно для этой функции такое выражение:

$$(2.7) \quad dP(g, x_-) = (N, x_-) dP(g) / \int_{G^*} (N, x_-) dP(g)$$

$$G^* = G \cap \{g \mid (N, x_-) < 0\}$$

Подставляя выражения (2.3), (2.5), (2.7) в формулу (2.6) и учитывая, что $\dot{x}_0 = (N, x_-)$, приходим к следующему уравнению удара с трением:

$$(2.8) \quad \Delta \dot{x} = - (1 + e) \int_{G^*} (N, x_-)^2 N dP(g) / \int_{G^*} (N, x_-) dP(g)$$

$$e = \exp [-k\pi (1 - k^2)^{-1/2}], \quad 0 \leq e \leq 1$$

Для анализа формулы (2.8) необходимо сделать некоторые предположения о характере микрорельефа, т. е. о свойствах вероятностного пространства (G, P) . Будем считать его изотропным, подразумевая под этим инвариантность по отношению к поворотам относительно вектора n^0 нормали к поверхности $f^0(x) = 0$.

Следствием данного свойства являются тождества, позволяющие упростить формулу (2.8). Представим N в виде суммы $N = n^0 \cos \alpha + l \sin \alpha$, где $(l, n^0) = 0$, $|l| = 1$, $\alpha = \widehat{N n^0}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(2.9) \quad \int_G l(g) F[\alpha(g)] dP(g) = 0, \quad F \in C^0(R)$$

$$\int_G (y, l(g))^2 F[\alpha(g)] l(g) dP(g) = 0, \quad y \in R^n$$

Для доказательства достаточно заметить, что по свойству изотропности если функциям $g_1, g_2 \in G$ соответствуют графики $f_{1,2} = 0$, получаемые один из другого поворотом на 180° относительно вектора n^0 (при этом $l(g_1) = -l(g_2)$, $\alpha(g_1) = \alpha(g_2)$), то $dP(g_1) = dP(g_2)$.

Если угол атаки $\beta = \arctg(|v_l|/|v_n|)$ достаточно мал, так что $\max_G |\alpha(g)| < \pi/2 - \beta$ и $G^* = G$, то с учетом (2.9) уравнение (2.8) запишем в виде

$$(2.10) \quad \Delta x' = - \frac{1+e}{\int_G \cos \alpha dP(g)} \left\{ n^\circ \left[\frac{v_l^2}{|v_n|} \int_G \left(\frac{v_l}{|v_l|}, 1 \right)^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha dP(g) + \right. \right. \\ \left. \left. + |v_n| \int_G \cos^3 \alpha dP(g) \right] + 2 \int_G (v_l, 1) \sin^2 \alpha \cos \alpha dP(g) \right\} \\ v = x', \quad v_n = (v, n^\circ) n^\circ, \quad v_l = v - v_n$$

где v_n, v_l — нормальная и касательная составляющие начальной скорости по отношению к базовой поверхности $f^\circ = 0$.

Для больших углов β , таких, что $G^* \neq G$, в равенстве (2.10) появляются дополнительные слагаемые, поэтому в этом случае удобнее использовать формулу (2.8) непосредственно.

Пример. Рассмотрим случай плоского удара ($n = 2$). Выберем координаты так, что базовая поверхность имеет уравнение $x_2 = 0$. Будем для простоты считать, что множество G состоит из кусочно-линейных функций $x_2 = g(x_1)$, причем в точках дифференцируемости $|g'(x_1)| = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$. Изотропность в этом случае означает, что число «подъемов» и «спусков» кривой $x_2 = g(x_1)$ в среднем совпадают.

Если удар происходит по нормали к базовой поверхности, $v_l = 0$, то в формуле (2.10) отлично от нуля только второе слагаемое, вследствие чего получаем

$$(2.11) \quad \Delta x' = - (1+e) |v_n| \cos^2 \alpha \cdot n^\circ$$

При косом ударе $v_l \neq 0$. Если выполняется неравенство $\beta < \pi/2 - \alpha$, то $G^* = G$ и величина $\Delta x'$ определяется формулой (2.10):

$$(2.12) \quad \Delta x' = - (1+e) [n^\circ (v_l^2 |v_n|^{-1} \sin^2 \alpha + |v_n| \cos^2 \alpha) + 2v_l \sin^2 \alpha]$$

Если же $\beta < \pi/2 - \alpha$, то встреча траектории $x(t)$ с поверхностью $f(x) = 0$ возможна лишь для таких функций $g \in G$, для которых $g'(x^\circ) = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{sgn} v_l$. Такой удар аналогичен удару о гладкую наклонную плоскость и описывается соотношением

$$(2.13) \quad \Delta x' = - (1+e) (|v_l| \cos \alpha - |v_n| \sin \alpha) (-\sin \alpha \operatorname{sgn} v_l, \cos \alpha)$$

3. Исследование свойств модели. Сформулируем основные свойства удара с трением, следующие из формулы (2.8).

1°. Направление ударных сил в течение удара неизменно; оно зависит от направления вектора v , но не зависит от его модуля. Аналогичное свойство присуще и аксиоматической модели [1—3], в рамках которой, однако, ударные силы могут менять направление в ходе удара. Поэтому конструктивная модель более проста.

2°. Для изотропных поверхностей в случае $v_l = 0$ по формуле (2.10) имеем $\Delta x_l' = 0$. Если $v_l \neq 0$, то векторы v_l и $\Delta x_l'$ коллинеарны и противоположно направлены.

Для доказательства покажем, что вектор $\Delta x'$, определяемый формулой (2.8), лежит в плоскости $\Pi(v)$, проходящей через векторы v и n° . Действительно, множество G можно разбить на пары функций $g_{1,2}$, такие, что векторы n_1 и n_2 симметричны относительно плоскости $\Pi(v)$, а поверхности $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ могут быть получены одна из другой поворотом относительно вектора n° ; по свойству изотропности $dP(g_1) = dP(g_2)$. Так как $(v, n_1) = (v, n_2)$, то обе функции $g_{1,2}$ одновременно принадлежат G^* , при этом $n_1 + n_2 \in \Pi(v)$, откуда и $\Delta x' \in \Pi(v)$. Противонаправленность векторов v_l и $\Delta x_l'$ следует из того, что величина $(v, N)^2$ больше в том случае, когда v_l и l противоположно направлены, чем для той же поверхности, повернутой на 180° (см. также формулы (2.12), (2.13)).

3°. При прямом ударе ($v_l = 0$) удар происходит в соответствии с гипотезой Ньютона: коэффициент восстановления относительной скорости k в (1.2) не зависит от величины $|v_n|$, при этом в силу (2.10) k зависит не только от параметра e , описывающего вязкоупругие свойства деформаций, но и от характеристик микрорельефа (так, в формуле (2.11) величина k равна e при $\alpha \equiv 0$ и уменьшается с ростом α).

Заметим, что независимость коэффициента k от v_n обусловлена выбором модели ударных сил в формуле (2.3), для других моделей это свойство может нарушаться.

4°. При $v_l \neq 0$ коэффициент восстановления k зависит от угла атаки β . Как следует из формулы (2.10), при постоянном значении $|v_n|$ величина k возрастает с ростом $|v_l|$; такое свойство модели согласуется с экспериментальными данными [11]. Следовательно, конструктивная модель в данном пункте более реалистична, чем аксиоматическая (последняя основана на независимости коэффициента k от начальных условий).

Заметим, что для достаточно больших значений угла β коэффициент k в силу (2.8) может даже оказаться большим единицы. На практике такое явление подтверждается возникновением нормальных перемещений вследствие микроударов, сопровождающих относительное скольжение шероховатых тел (см. [12]).

5°. Ударное трение обусловлено отклонением вектора N от n° : если бы микрорельеф отсутствовал, то $g \equiv 0$ и соотношение (2.8) приняло бы вид

$$\Delta x^\circ = -(1 + e) (v, n^\circ) n^\circ$$

что совпадает с уравнениями удара гладких тел [1].

Для определения коэффициента ударного трения μ необходимо умножить величину Δx° , определенную по формуле (2.8), на матрицу $A(x^\circ)$ для получения в соответствии с (1.1) величины I , затем получаем $\mu = |I_l| / |I_n|$. Следовательно, в общем случае величина μ зависит от свойств матрицы $A(x^\circ)$, что затрудняет исследование зависимости этого коэффициента от начальных условий удара. В данной работе ограничимся простейшим случаем — ударом материальной точки о шероховатую плоскость, когда матрица $A(x^\circ)$ пропорциональна единичной матрице. При этом коэффициент μ определяется по формуле

$$(3.1) \quad \mu = |\Delta v_l| / |\Delta v_n|$$

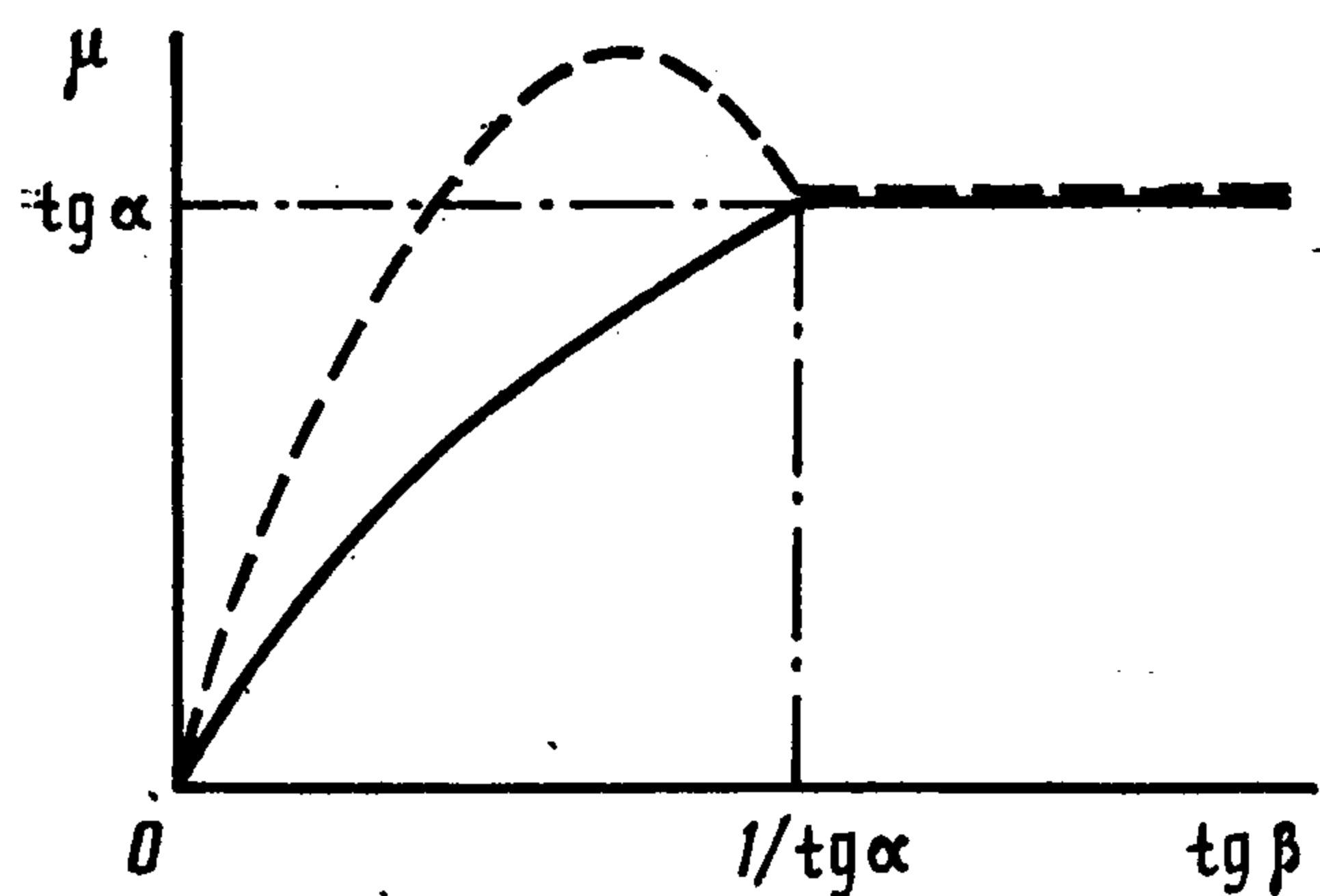
В применении к примеру, рассмотренному в п. 2, формула (3.1) приводит к таким значениям коэффициента трения:

$$\mu = \begin{cases} 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta / (\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta + 1), & \beta < \pi/2 - \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha, & \beta \geq \pi/2 - \alpha \end{cases}$$

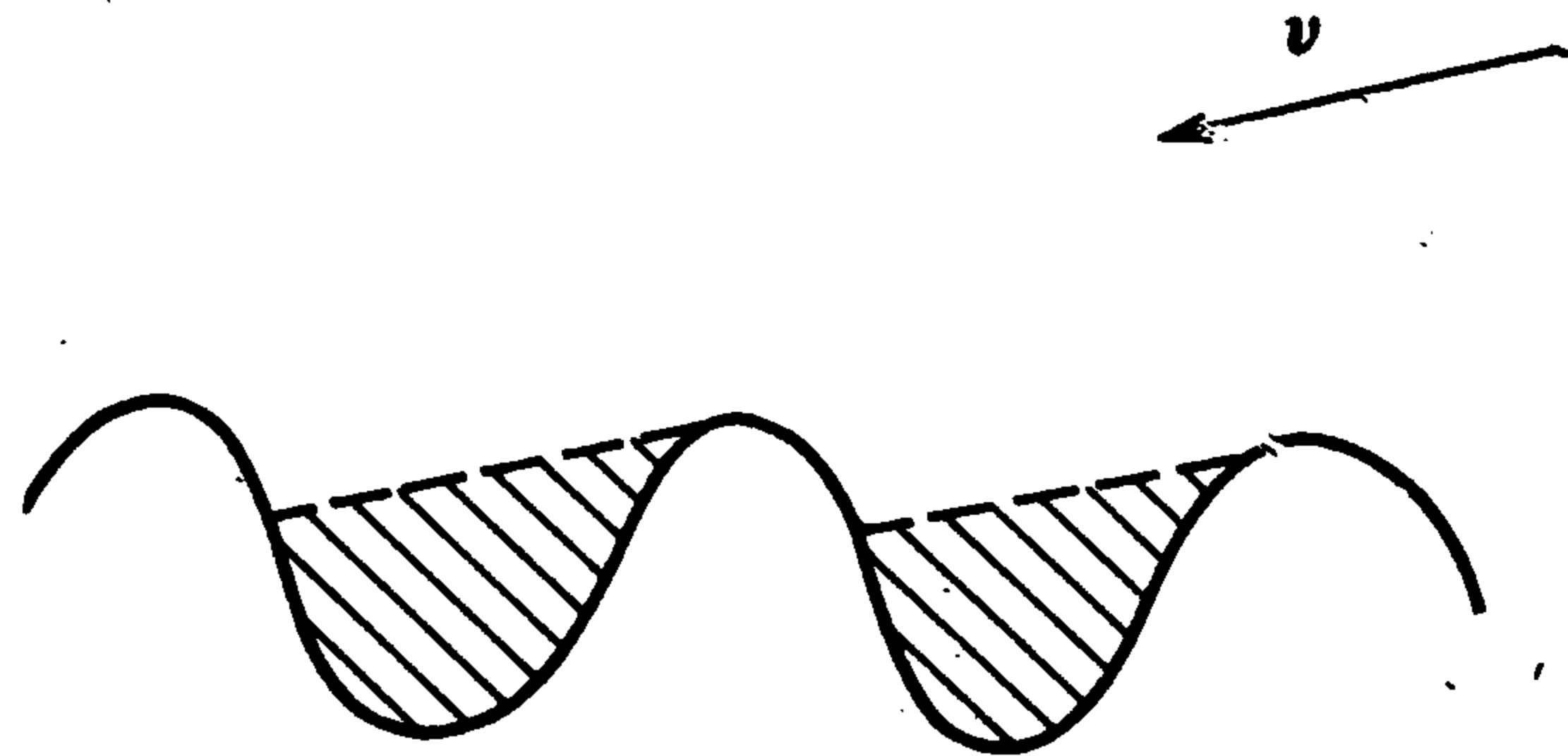
На фиг. 1 построен график функции $\mu = \mu(\operatorname{tg} \beta)$ (сплошная линия).

Падение коэффициента трения с ростом β в случае, если множество состоит из непрерывно дифференцируемых функций, можно объяснить «затенением» (т. е. недоступностью для траекторий с углом падения, близким к $\pi/2$) участков профиля с наибольшей крутизной (см. фиг. 2, штриховая линия на фиг. 1).

4. Устойчивость частицы на вибрирующей поверхности. В качестве приложения конструктивной модели удара с трением изучим задачу об



Фиг. 1



Фиг. 2

устойчивости движения материальной точки, периодически подсакивающей вдоль оси симметрии шероховатой поверхности вращения, совершающей вдоль вертикали гармонические колебания [6]. Существование такого периодического движения для принятой модели трения следует из свойства 2 разд. 3: при движении точки вдоль оси удар является прямым, ввиду чего $\Delta x_i^* = 0$.

Допустим, что возмущения начальных условий приводят к малому отклонению точки от вертикали. Воспользуемся для описания удара уравнениями (2.10). В силу этих уравнений изменение касательной составляющей скорости описывается формулой

$$(4.1) \quad \Delta x_i^* = -\lambda v_i$$

$$\lambda = 2(1+e) \left| \int_{\mathcal{G}} (\mathbf{a}_i, \mathbf{l}) \sin^2 \alpha \cos \alpha dP(g) \right| / \int_{\mathcal{G}} \cos \alpha dP(g)$$

где \mathbf{a}_i — произвольный орт, касательный к базовой поверхности.

Соотношение (4.1) по форме совпадает с описанием удара при наличии вязкого трения [6], однако есть и отличие: в рассматриваемом случае величина λ может быть больше единицы.

Отбрасывая в формуле (2.10) первое слагаемое, имеющее второй порядок малости относительно возмущений, получим для коэффициента восстановления κ следующее выражение:

$$(4.2) \quad 1 + \kappa = (1+e) \int_{\mathcal{G}} \cos^3 \alpha dP(g) / \int_{\mathcal{G}} \cos \alpha dP(g)$$

Как следует из (4.2), удары имеют упругий характер только если правая часть не меньше единицы. Можно убедиться, что при этом условии величина λ в (4.1) не превосходит двух.

Условия устойчивости периодических движений точки при наличии трения вида (4.1) получены в [6]. Эти условия сводятся к выбору фазы колебаний поверхности, в которой происходят соударения, а также к неравенству

$$(4.3) \quad 0 < \rho^{-1} < B, \quad B = \frac{(2-\lambda)(1+\kappa)}{2\pi^2 m^2 (1+\kappa-\lambda)}$$

где m — отношение периода рассматриваемого периодического движения к периоду колебаний поверхности, ρ — радиус кривизны в точке, лежащей на оси симметрии. Вследствие (4.3), если $\lambda < 1 + \kappa$, то B возрастает с ростом λ и соответственно расширяется класс устойчивых случаев. Если $1 + \kappa < \lambda \leq 2$, то $B \leq 0$ и периодические движения неустойчивы при любой форме опорной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука, 1983. 463 с.
2. Болотов Е. А. Об ударе двух твердых тел при действии трения // Изв. Моск. инж. училища. 1908. Ч. 2. Вып. 2. С. 43—55.
3. Keller J. V. Impact with friction // Trans. ASME, J. Appl. Mech. 1986. V. 53. N 1. P. 1—4.
4. Виноградов В. Н., Бирюков В. И., Назаров С. И., Червяков И. Б. Экспериментальные исследования коэффициента трения при ударе шара в плоскую поверхность материала // Трение и износ. 1981. Т. 2. № 5. С. 896—899.
5. Гольдсмит В. Удар: Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
6. Кобринский А. Е., Кобринский А. А. Виброударные системы. М.: Наука, 1973. 591 с.
7. Иванов А. П. Об ударах в системе с несколькими неударяющими связями // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 559—566.
8. Козлов В. В. Конструктивный метод обоснования теории систем с неударяющими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883—894.
9. Парс Л. А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
10. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
11. Лавендел Э. Э., Субач А. П. Результаты экспериментального исследования удара с трением // Вибрационная техника. М.: Изд. НИИстройдоркоммуникалмаш, 1966, С. 285—292.
12. Буданов Б. В., Кудинов В. А., Толстой Д. М. Взаимосвязь трения и колебаний // Трение и износ. 1980. Т. 1. № 1. С. 79—89.

Москва

Поступила в редакцию
15.VI.1988