

УДК 531. 01

КОНСТРУКТИВНЫЙ МЕТОД ОБОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ СИСТЕМ С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

Козлов В. В.

Формально-аксиоматический подход к обоснованию теории систем со связями имеет очевидные недостатки: остается невыясненным происхождение исходных аксиом (например, принципа освобождения связей и условия их идеальности). Предлагается конструктивный метод обоснования основных принципов динамики систем с односторонними связями (в том числе и систем с ударами). Идея метода связана с анализом физических способов реализации связей (жесткие системы, анизотропная вязкость, присоединенные массы). Такой подход позволяет просто записать уравнения движения, пригодные на всем интервале времени и более точно учитывающие реальную динамику. Этим методом решен ряд задач механики виброударных систем. В частности, найдены условия устойчивости периодических режимов колебаний и исследована эволюция движений с неупругими ударами в случае близости коэффициента восстановления к единице. Установлена полная интегрируемость и дан качественный анализ задачи о параболическом бильярде в однородном силовом поле.

1. Системы с двусторонними связями. Пусть $T(x', x)$ — кинетическая, а $V(x)$ — потенциальная энергия голономной системы с n степенями свободы. Ее динамика описывается уравнениями Лагранжа с лагранжианом $L = T - V$, который считается гладкой функцией от x и x' . Пусть $f(x)$ — гладкая регулярная функция ($df \neq 0$ в точках, где $f = 0$). Если принять уравнение $f(x) = 0$ в качестве уравнения связи, наложенной на систему, то движения такой «несвободной» голономной системы с $n - 1$ степенями свободы задаются уравнениями Лагранжа с множителем λ :

$$(1.1) \quad (L_{x'})' - L_{x'} = \lambda f_x', \quad f(x) = 0$$

Уравнения (1.1) обычно получают при помощи принципа Даламбера — Лагранжа. В формально-аксиоматической схеме обоснования динамики принцип Даламбера — Лагранжа выводится из принципа освобождения связей и аксиомы об их идеальности. С физической точки зрения более перспективен конструктивный метод обоснования динамики систем со связями, основанный на анализе различных способов реализации связей (жесткие системы, анизотропная вязкость, присоединенные массы).

Для иллюстрации возможностей этого метода рассмотрим динамику «свободной» голономной системы с n степенями свободы, у которой кинетическая энергия $T_N = T + \alpha (f')^2/2$, потенциальная энергия $V_N = V + \beta f^2/2$ и на которую действуют дополнительные силы вязкого трения с диссипативной функцией Рэля $F_N = \gamma (f')^2/2$. Коэффициенты α , β и γ удовлетворяют условиям]

$$(1.2) \quad \alpha = \alpha_0 (N + o(N)), \quad \beta = \beta_0 (N + o(N)), \quad \gamma = \gamma_0 (N + o(N)),$$

где α_0 , β_0 , γ_0 — неотрицательные вещественные числа, N — положительный параметр, который затем будет устремлен к $+\infty$. Смысл добавочного слагаемого в выражении для кинетической энергии T_N состоит во введении анизотропии в распределение массы (как, например, присоединенные массы и моменты инерции в задаче о движении твердого тела в жидкости).

Дополнительный потенциал $\beta f^2/2$ создает поле сил, направленных к поверхности $f = 0$. Отметим еще, что диссипативные силы не совершают работы лишь на движениях, происходящих по поверхности $f = 0$.

Запишем уравнения движения

$$(1.3) \quad \left(\frac{\partial L_N}{\partial \dot{x}} \right)' - \frac{\partial L_N}{\partial x} = - \frac{\partial F_N}{\partial x}, \quad L_N = T_N - V_N$$

и рассмотрим их решения с начальными условиями $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, удовлетворяющими соотношениям

$$(1.4) \quad f(x_0) = 0, \quad f_x'(x_0) \dot{x}_0 = 0$$

Теорема 1. Предположим, что решение уравнений (1.1) с начальными данными x_0, \dot{x}_0 определено в открытом промежутке времени, содержащем интервал $[0, T]$, и среди коэффициентов α_0, β_0 и γ_0 в (1.2) не все равны нулю. Тогда решения уравнений (1.3) с теми же начальными данными при достаточно больших значениях N определены в интервале $0 \leq t \leq T$ и при $N \rightarrow \infty$ стремятся к решениям системы (1.1).

Если $\alpha_0 > 0$, то теорему 1 можно доказать методом работы [1]. В частном случае, когда $\gamma_0 = 0$, теорема 1 вытекает из результатов этой работы. Пусть $\alpha_0 = 0$, а $\beta_0 > 0$. Тогда система (1.3) сингулярно возмущенная, и доказательство теоремы 1 основывается на применении известной теоремы Тихонова — Градштейна. Заметим, что при $\gamma_0 = 0$ этот результат вытекает из более общего результата о реализации неголономных связей при помощи анизотропного трения, восходящего к Каратеодори (см. [2, 3], а также [4], дополнение). В случае, когда $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, а $\gamma_0 > 0$, теорема 1 высказана Курантом и доказана в [5].

2. Система с односторонними связями. Применим идеи, высказанные в п. 1, к задаче о реализации освобождающейся связи $f(x) \geq 0$. Снова рассмотрим решение уравнений (1.1) с начальными данными x_0, \dot{x}_0 , удовлетворяющими (1.4), и пусть $\lambda(t)$ — значения множителя λ вдоль этого решения. Рассмотрим теперь движение $x(t)$ с освобождающейся связью $f(x) \geq 0$ и прежними начальными данными. Известно, что если $\lambda(t) < 0$ для всех t , то точка $x(t)$ все время остается на поверхности $f(x) = 0$. Если же после некоторого момента времени τ функция $\lambda(t)$ принимает положительные значения, то в момент τ точка $x(t)$ покидает поверхность $f(x) = 0$ и при $t > \tau$ динамика системы описывается обычными уравнениями Лагранжа с лагранжианом $L = T - V$ [6] (отметим, что случай $\tau = 0$ не исключается).

Для того чтобы путем предельного перехода перейти от динамики свободной системы к динамике системы с односторонней связью $f \geq 0$, рассмотрим движение в силовом поле с потенциалом

$$(2.1) \quad V_N = V + Nf^2, \quad \text{если } f < 0, \quad \text{и } V_N = V, \quad \text{если } f \geq 0$$

Кинетическая энергия T при этом остается без изменений. Движения системы задаются уравнениями Лагранжа

$$(2.2) \quad (T_x)' - T_x' = -V_{Nx}'$$

Обобщенная сила $-(V_N)'$ является лишь кусочно гладкой, однако можно проверить, что уравнения (2.2) удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решений.

Теорема 2. Пусть $x(t)$ — движение системы с односторонней связью $f(x) \geq 0$ и начальными данными (1.4), определенное в интервале $[0, T_*]$.

Предположим, что имеется не более одного $\tau \in [0, T_*)$, такого, что $f(x(t)) = 0$ при $0 \leq t \leq \tau$ и $f(x(t)) > 0$ при $\tau < t \leq T < T_*$. Тогда если $x_N(t)$ — решение системы (2.2) с начальными данными (1.4), то при достаточно больших N оно определено при $0 \leq t \leq T$ и стремится на этом интервале к функции $x(t)$, когда $N \rightarrow \infty$.

Это утверждение можно доказать методом работы [5].

Подчеркнем, что теорема 2 справедлива как в случае $\tau = 0$ (точка $x(t)$ сразу покидает поверхность $f = 0$), так и в случае $\tau > T_*$ (точка $x(t)$ движется по поверхности $f = 0$).

Вместо громоздкого формального доказательства теоремы 2 проиллюстрируем это утверждение примером, а также обсудим возможность реализации односторонних связей при помощи эффекта присоединенных масс и анизотропного вязкого трения. Рассмотрим движение точки единичной массы в плоскости x, y , причем в левой полуплоскости (где $x \leq 0$) на точку действует сила с компонентами $(0, -g)$, $g = \text{const} > 0$, а в правой полуплоскости (где $x > 0$) — сила с компонентами $(0, g)$. Это силовое поле потенциально, но разрывно. Если при $t = t_*$ точка попала на вертикальную прямую $x = 0$, то ее состояние в момент времени $t = t_*$ принимается за начальное для определения последующего движения в другой полуплоскости. Рассматривается движение с освобождающейся связью $y \geq 0$. Пусть при $t = 0$ точка имеет следующее начальное состояние:

$$(2.3) \quad x = -1, \quad y = 0, \quad x' = 1, \quad y' = 0$$

Тогда имеем закон ее движения

$$(2.4) \quad x(t) = t - 1; \quad y(t) = 0, \quad t \leq 1, \quad y(t) = g(t - 1)^2/2, \quad t > 1$$

В момент времени $t = 1$ точка покидает связь.

Освободим теперь систему от связи и заменим ее действие упругой силой с компонентами $(0, -Ny)$, $y \leq 0$. В верхней полуплоскости эта сила полагается равной нулю. Тогда решение новых уравнений движения с начальными данными (2.3) задается при $t \leq 1$ формулами

$$x(t) = t - 1, \quad y(t) = gN^{-1}(\cos \sqrt{N}t - 1)$$

Следовательно, при $0 \leq t \leq 1$ точка движется в узкой полосе $-2g/N \leq y \leq 0$, совершая колебания с большой частотой \sqrt{N} (фиг. 1, сплошная линия). Затем в некоторый момент времени $\tau = 1 + O(N^{-1/2})$ точка попадает на ось $y = 0$, причем $y(\tau) = O(N^{-1})$, $y'(\tau) = O(N^{-1/2})$. При $t > \tau$ точка будет двигаться по параболе в верхней полуплоскости. В пределе (когда $N \rightarrow \infty$) движение точки будет описываться как раз формулами (2.4).

Рассмотрим теперь другой механизм реализации связи: если точка попадает в нижнюю полуплоскость, то к ее кинетической энергии добавляется слагаемое $Ny^2/2$. Решая уравнения движения механической системы с начальными данными (2.3), получим

$$(2.5) \quad x(t) = t - 1; \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2(N+1)}, \quad t \leq 1$$

$$y(t) = \frac{g(t^2 - 4t + 2)}{2(N+1)}, \quad 1 \leq t \leq 2 + \sqrt{2}$$

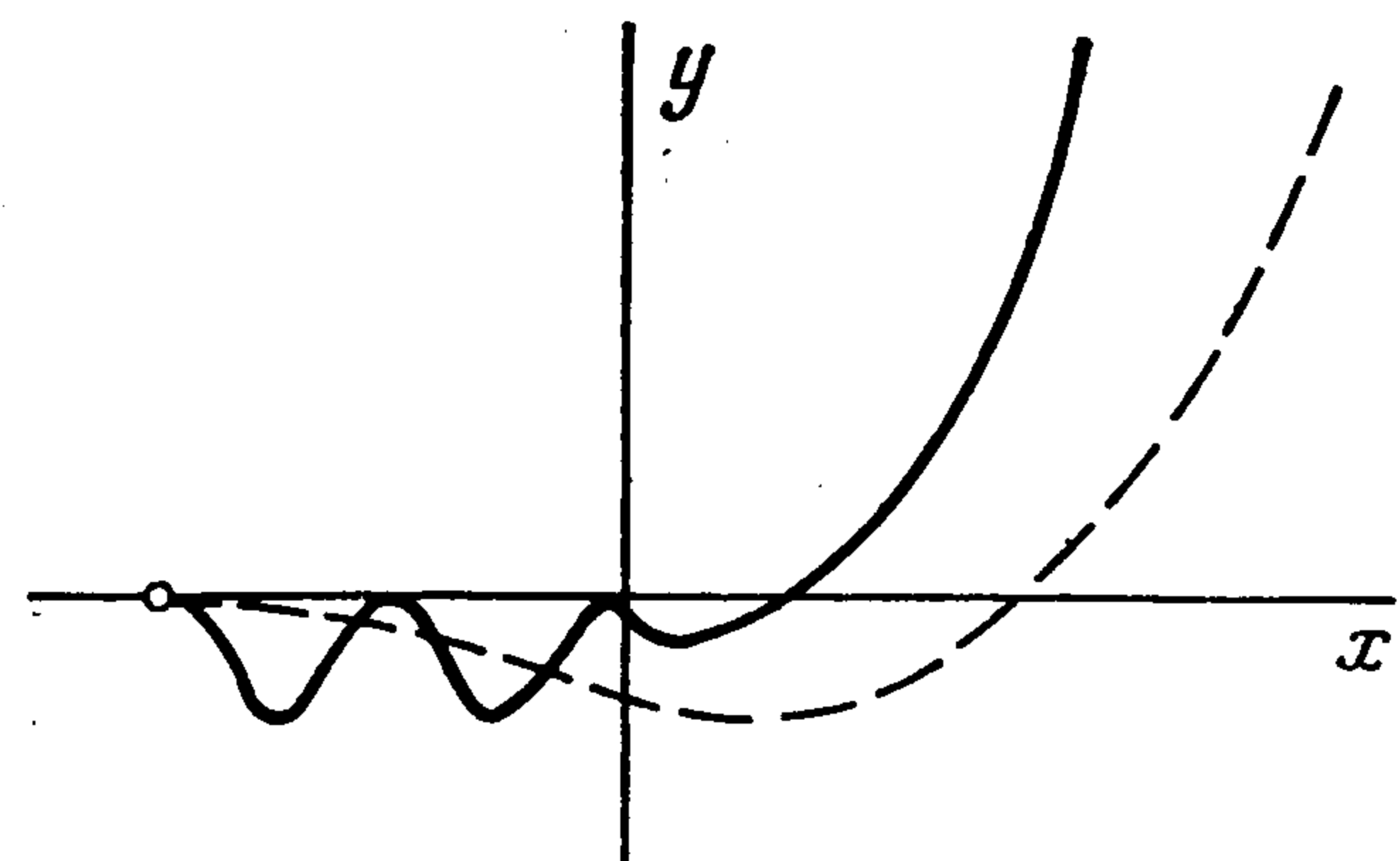
Следовательно, если $0 < t < 2 + \sqrt{2}$, то $y(t) < 0$ (фиг. 1, штриховая линия). При $t > 2 + \sqrt{2}$ точка будет двигаться по параболе в верхней полуплоскости. Заметим, что момент выхода на горизонтальную прямую $y = 0$ ($t = 2 + \sqrt{2}$) не зависит от N . При $N \rightarrow \infty$ решение (2.5) стремится

ся к решению

$$(2.6) \quad x(t) = t - 1; \quad y(t) = 0, \quad t \leq 2 + \sqrt{2}, \quad y(t) = g(t - 2 - \sqrt{2})^2/2, \quad t > 2 + \sqrt{2}$$

которое отличается от (2.4). Запаздывание момента схода со связи объясняется дополнительной инерцией движущейся точки.

Наконец, рассмотрим еще один случай, когда на точку, находящуюся в нижней полуплоскости, действует сила вязкого трения с компонентами



Фиг. 1

$(0, -Ny')$. Решая уравнения движения с начальными данными (2.3), получим, что при $0 < t < \tau$, $\tau = 2 + O(N^{-1})$ точка движется в нижней полуплоскости и выходит на горизонтальную прямую в момент времени τ . Качественно ее траектория похожа на штриховую кривую, изображенную на фиг. 1. При $t > \tau$ точка движется снова по параболе. Устремим N к $+\infty$. Тогда в

пределе получим движение

$$(2.7) \quad x(t) = t - 1; \quad y(t) = 0, \quad t \leq 2, \quad y(t) = g(t - 2)^2/2, \quad t > 2$$

которое отличается от (2.4) и от (2.5). Если же силу вязкого трения $(0, -Ny')$ положить равной нулю (тогда $y' > 0$), то при стремлении N к бесконечности получим классическое решение (2.4).

Таким образом, в случае введения поля упругих сил и последующего увеличения коэффициента жесткости до бесконечности получается классическая модель движения с односторонними связями. Введение присоединенных масс и анизотропного вязкого трения приводит к неклассическим моделям, в которых имеет место запаздывание момента схода со связями.

Нельзя утверждать, что движения (2.6) и (2.7) не имеют отношения к действительности. Они являются движениями в корректно определенных моделях систем с односторонними связями, выбор которых существенно зависит от конкретных физических способов реализации связей. Надо иметь в виду, что в действительности возможны комбинации различных эффектов, также приводящие в пределе к движениям со связями (как, например, в п. 1). При этом важную роль играют порядки вводимых дополнительных сил.

Рассмотрим, например, случай, когда в нижней полуплоскости (где $y < 0$) на точку одновременно действуют сила трения $(0, -Ny')$ и упругая сила $(0, -c^2Ny)$. Замена односторонней связи $y \geq 0$ линейными полями упругих и диссипативных сил с физической точки зрения означает введение в рассмотрение среды Кельвина—Фойгта. Вычисления показывают, что для движения с начальными данными (2.3) при $N \rightarrow \infty$ снова имеет место запаздывание момента схода со связи. Если же заменить силу трения диссипативной силой $(0, -k\sqrt{Ny'})$, где $k = \text{const} > 0$ и $c^2 > k^2$, то при $N \rightarrow \infty$ получим классическое решение (2.4).

Отметим, что теорема 2 справедлива и в том случае, если потенциал V_N заменить потенциалом $V_N^* = V + \exp(-Nf)$. Это замечание может оказаться полезным в аналитических исследованиях ввиду свойства бесконечной дифференцируемости функции V_N^* .

3. Движения с ударами. Пусть $x(t)$ — движение системы с неударивающей связью $f(x) \geq 0$, причем $f(x(t)) > 0$ при $t_1 < t < t_2$. Если $f(x(t_2)) = 0$ и скорость $x'(t_2)$ не лежит в касательной плоскости к поверх-

ности $f(x) = 0$ в точке $x = x(t_2)$, то в момент времени $t = t_2$ имеет место явление удара. Продолжение движения $x(t)$ для значений $t > t_2$ возможно различными способами. Оно зависит от принимаемой гипотезы о физической природе удара (абсолютно упругий, неупругий и т. д.). Для обоснования этих гипотез, а также для выяснения границ их применимости, вместо связи $f \geq 0$ рассмотрим в области $f(x) < 0$ силовое поле с потенциалом $V_N = V_1 + c^2 N f^2 / 2$, $c > 0$ и будем считать, что при движении в этой области на систему действуют силы вязкого трения с диссипативной функцией Рэля $F_N = k \sqrt{N} (f')^2$, $k = \text{const} \geq 0$ (ср. с п. 1).

Будем считать, что в момент времени $t = 0$ система находится в положении $x = (x_1, \dots, x_n) = 0$ и имеет скорость $x' = (v_1, \dots, v_n)$, причем

$$(3.1) \quad \sum \partial f / \partial x_i |_{x=0} v_i < 0$$

При $t > 0$ точка $x(t)$ попадает в область $f < 0$ и на систему будут действовать дополнительные потенциальные и диссипативные силы. Оказывается, если N велико, то через малый промежуток времени (порядка $1/\sqrt{N}$) точка $x(t)$ выйдет на границу $f = 0$ в точке, близкой к точке $x = 0$, касательные составляющие скорости в момент входа и выхода в область $f(x) < 0$ практически не изменяются, а нормальная составляющая скорости (в метрике, задаваемой кинетической энергией) в момент выхода может быть выражена через нормальную составляющую в момент входа и коэффициенты k и c . При $N \rightarrow \infty$ получим законы неупругого удара (при $k \rightarrow 0$ они перейдут в законы упругого отражения).

Для реализации этой идеи удобно перейти к некоторым специальным координатам x_1, \dots, x_n в окрестности точки $x = 0$, в которых $f(x) \equiv x_1$, а кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2} g_{11} x_1'^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^n g_{ij}(x) x_i' x_j'$$

Такие координаты существуют всегда (в римановой геометрии они называются полугеодезическими [7]). В этих координатах касательная составляющая скорости x' определяется компонентами x_2', \dots, x_n' , а нормальная — производной x_1' . Соотношение (3.1) приобретает более простой вид: $x_1'(0) < 0$.

Теорема 3. Предположим, что $k^2 < c^2 g_{11}(0)$. Тогда найдется момент времени

$$\delta_N = \pi g_{11}(0) / (\omega \sqrt{N}) + o(N^{-1/2}), \quad \omega = \sqrt{c^2 g_{11}(0) - k^2} > 0$$

такой, что $x_1(\delta_N) = 0$, $x_i(\delta_N) = O(N^{-1/2})$ ($i > 1$) и выполнены следующие предельные соотношения:

$$(3.2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} x_1'(\delta_N) = -e x_1'(0), \quad e = \exp(-\pi k / \omega)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_i'(\delta_N) = x_i'(0), \quad i > 1$$

Число $e < 1$ в теории стереомеханического удара называется коэффициентом восстановления [8]. Если $k = 0$ (диссипация отсутствует), то (3.2) дают соотношения теории абсолютно упругого удара. Ниже приводится схема доказательства теоремы 3.

Запишем уравнения движения, справедливые при тех значениях $t > 0$,

пока $x_1(t) \leq 0$:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} x_1'' + \sum \Gamma_{jk}^1 x_j' x_k' &= -g^{11} \partial V / \partial x_1 - 2k \sqrt{N} g^{11} x_1' - c^2 N g^{11} x_1 \\ x_i'' + \sum \Gamma_{jk}^i x_j' x_k' &= -\sum g^{is} \partial V / \partial x_s \quad (i > 1) \end{aligned}$$

Здесь Γ_{jk}^i — символы Кристоффеля метрики g_{ij} , g^{is} — элементы матрицы, обратной к $\|g_{ij}\|$. В уравнениях (3.3) перейдем к новому времени $\tau = \sqrt{N}t$, обозначая штрихом дифференцирование по τ :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x_1'' + 2k g^{11} x_1' + c^2 g^{11} x_1 + \sum \Gamma_{jk}^1 x_j' x_k' &= -\varepsilon^2 g^{11} \partial V / \partial x_1 \\ x_i'' + \sum \Gamma_{jk}^i x_j' x_k' &= -\varepsilon^2 \sum g^{is} \partial V / \partial x_s \quad (i > 1); \quad \varepsilon = N^{-1/2} \end{aligned}$$

Считая ε малым параметром, будем искать решения системы (3.4) в виде

$$(3.5) \quad x_i(\tau) = \varepsilon \xi_i(\tau) + o(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, n$$

Коэффициенты ξ_i удовлетворяют уравнениям

$$\xi_1'' + 2kG\xi_1' + c^2G\xi_1 = 0, \quad \xi_i'' = 0 \quad (i > 1); \quad G = g^{11}(0) > 0$$

Они имеют следующие частные решения:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= x_1'(0) \exp(-kG\tau) \omega^{-1} \sin \omega \tau \\ \omega &= \sqrt{c^2G - k^2G^2}, \quad \xi_i = x_i'(0)\tau \quad (i > 1) \end{aligned}$$

Так как параметр ε регулярно входит в правые части системы (3.4), то можно применить теорему Пуанкаре [9], согласно которой при малых значениях параметра ε на каждом конечном интервале нового времени τ существуют решения системы (3.4) вида (3.5). Согласно (3.6), функция $x_1(\tau)$ заведомо имеет нуль в интервале $(0, 2\pi)$. Возвращаясь к старому времени t , получим

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1'(0) \exp(-kG \sqrt{N}t) (\omega \sqrt{N})^{-1} \sin \omega \sqrt{N}t + \\ &+ o(N^{-1/2}) \\ x_i(t) &= x_i'(0) t + o(N^{-1/2}) \end{aligned}$$

Из этих формул вытекают предельные соотношения (3.2).

Теорема 3 расширяет границы применимости теоремы 2 о предельном переходе. Пусть $x(t)$ — движение системы с односторонней связью $f(x) \geq 0$, начинающееся на границе $f(x) = 0$. Предположим, что в интервале $0 \leq t \leq T$ имеется конечное число моментов удара о связь τ_1, \dots, τ_s , причем скорости до ударов $x'(\tau_i - 0)$ трансверсальны касательным плоскостям к поверхности $f(x) = 0$ в точках $x(\tau_i)$. Теорема 2 утверждает, что движения свободной системы в поле с потенциалом V_N с теми же начальными данными при $N \rightarrow \infty$ в интервале $0 \leq t < \tau_1$ стремятся к движению $x(t)$. Теорема 3 (в частном случае, когда $k = 0$) позволяет доказать этот предельный переход на всем интервале $0 \leq t \leq T$. Отметим еще, что при $k = 0$ теорема 3 справедлива и для потенциала $V_N^* = V + \exp(-Nf)$ (ср. с п. 2).

В качестве иллюстративного примера рассмотрим движение точки по инерции внутри окружности радиуса R в предположении, что коэффициент восстановления e при ударах постоянен и мало отличается от единицы. Так как касательная составляющая скорости не меняется, то имеет место интеграл площадей. Следовательно, в моменты ударов $v \cos \alpha = u = \text{const}$, где v — величина скорости точки, α — угол между вектором скорости и касательной к окружности.

Исследуем эволюцию скорости v как функции времени. Для этого (согласно теореме 3) вместо односторонней связи введем поле упругих сил и диссипативные силы с коэффициентом трения $2k\sqrt{N}$, k — мало. При $k = 0$ будем иметь невозмущенную

интегрируемую задачу. Ее фазовое пространство расслоено на инвариантные торы с условно-периодическими движениями. Усредняя возмущенные уравнения по этим торам и переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, можно получить эволюционное уравнение для скорости

$$v' = (e - 1)(2R)^{-1}v \sqrt{v^2 - u^2}$$

Интегрируя его, получаем

$$v = u/\cos [u (e - 1)(2R)^{-1}t + \alpha_0]$$

где α_0 — значение угла α в момент времени $t = 0$. Следовательно, в силу усредненной системы при $t > 2R/[u(1 - e)]$ точка будет скользить по окружности радиуса R со скоростью u .

4. Устойчивость периодических колебаний с ударами. Продемонстрируем эффективность предложенного метода в теории систем с односторонними связями на примере исследования устойчивости периодических режимов колебаний с ударами. С этой целью рассмотрим движение материальной точки массы m в вертикальной плоскости с декартовыми координатами x, y (ось y направлена вверх) не ниже кривой $y = f(x)$, где f — гладкая функция, такая, что $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) > 0$. Эта задача допускает семейство периодических движений, при которых точка m остается все время на оси y . В качестве параметра можно взять скорость точки v в момент удара о кривую. В работе [10] указан критерий эллиптичности этого решения (g — ускорение свободного падения)

$$(4.1) \quad f''(0) < gv^{-2}$$

Заменим одностороннюю связь $y \geq f(x)$ полем упругих сил с потенциалом

$$V_N = mgy, \quad y \geq f(x); \quad V_N = mgy + mN(y - f(x))^2/2, \quad y < f(x)$$

Задача о движении точки m в поле с потенциалом V_N имеет семейство периодических решений периода T :

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x_0(t) &\equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ y_0(t) &= gN^{-1}(\cos \sqrt{N}t - 1) - vN^{-1/2} \sin \sqrt{N}t, \quad 0 \leq t < \tau \\ y_0(t) &= vt - gt^2/2, \quad \tau \leq t \leq \tau + 2vg^{-1} \\ \tau &= 2N^{-1/2} \operatorname{arccctg}(-gv^{-1}N^{-1/2}), \quad T = \tau + 2vg^{-1} \end{aligned}$$

где $v > 0$ — величина скорости точки m в положении $x = y = 0$. Уравнение для x -координаты m имеет вид

$$x'' = 0, \quad y > f; \quad x'' = Nf'(x)(y - f), \quad y < f$$

Запишем уравнение в вариациях для периодического решения (4.2):

$$(4.3) \quad \begin{aligned} (\delta x)'' + p(t) \delta x &= 0; \quad p(t) = -Nf''(0)y_0(t), \quad 0 \leq t \leq \tau; \\ p(t) &= 0, \quad \tau \leq t \leq T \end{aligned}$$

Так как $p(t) \geq 0$, то для выяснения условий устойчивости нулевого решения уравнения (4.3) можно воспользоваться интегральным признаком Ляпунова [11]

$$(4.4) \quad T \int_0^T p(t) dt \leq 4$$

Вычисления дают достаточное условие устойчивости

$$gf''(0) [g^{-1}v + N^{-1/2} \operatorname{arccctg}(-gv^{-1}N^{-1/2})]^2 \leq 1$$

При больших значениях N его можно представить в более простой

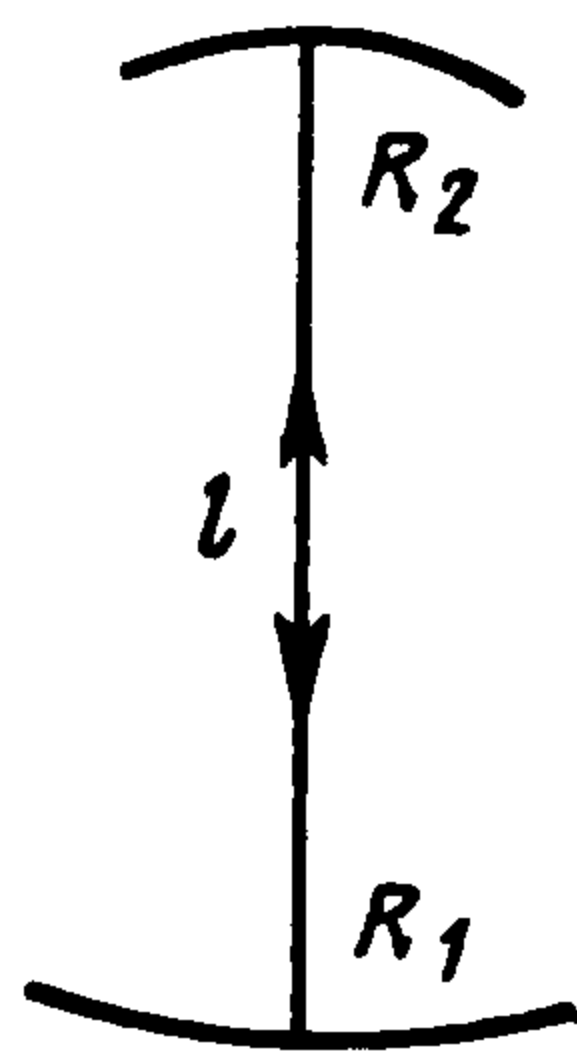
форме

$$(4.5) \quad f''(0) \leq gv^{-2} - \pi g^2 v^{-3} N^{-1/2} + o(N^{-1/2})$$

В пределе при $N \rightarrow \infty$ получим известное условие (4.1). Неравенство (4.5) показывает, что замена односторонней связи полем упругих сил с большой жесткостью (что более соответствует действительности) может привести к неустойчивости вертикальных колебаний точки.

Интересно отметить, что при $N \rightarrow \infty$ достаточное условие устойчивости (4.5) переходит в критерий устойчивости в линейном приближении (4.1). Это наблюдение приводит к результату Жуковского о невозможности увеличения постоянной в правой части неравенства Ляпунова (4.4) [12].

Рассмотрим еще похожую задачу об устойчивости двузвенной периодической траектории бильярда Биркгофа (фиг. 2): точка движется по отрезку длины l , периоди-



Фиг. 2

чески упруго отражаясь от кривой. Обозначим R_1 и R_2 — радиусы кривизны этой кривой в граничных точках отрезка, пусть $R_1 \leq R_2$. Снова вводя поле упругих сил, получим уравнение в вариациях, аналогичное уравнению (4.3):

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \xi'' + p(t) \xi &= 0 \\ p(t) &= vR_1^{-1} \sqrt{N} \sin \sqrt{N}t, \quad 0 \leq t \leq \pi N^{-1/2} \\ p(t) &= vR_2^{-1} \sqrt{N} \sin \sqrt{N}(t + \tau), \\ \tau \leq t \leq \tau + \pi N^{-1/2}, \quad \tau &= \pi N^{-1/2} + lv^{-1} \\ p(t) &= 0, \quad \pi N^{-1/2} \leq t \leq \tau, \quad \tau + \pi N^{-1/2} \leq t \leq \tau + \pi N^{-1/2} + lv^{-1} \end{aligned}$$

Здесь v — постоянная скорость движения точки внутри бильярда Биркгофа; значения функции $p(t)$ указаны на ее периоде. Применяя интегральный признак Ляпунова (4.4) и переходя затем к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем достаточное условие устойчивости (в первом приближении) двузвенной траектории

$$(4.7) \quad l \leq R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$$

Это условие в общем случае не является необходимым. Критерий устойчивости двузвенной периодической траектории имеет вид (например, [13])

$$(4.8) \quad l < R_1 \quad \text{или} \quad R_2 < l < R_1 + R_2$$

Условие (4.8) переходит в (4.7), если $R_2 \rightarrow \infty$. В этом случае функция $p(t)$ в уравнении (4.6) имеет лишь один малый интервал положительности (как в уравнении (4.3)).

Условия (4.8) можно получить при помощи общего метода Ляпунова исследования устойчивости нулевого решения уравнения второго порядка (4.6) [11]. Критерием устойчивости является неравенство $|a| < 2$ для константы Ляпунова

$$\begin{aligned} a &= 2 - I_1 + I_2 - I_3 + \dots, \quad I_1 = T \int_0^T p(t_1) dt_1 \\ I_k &= \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k (T - t_1 + t_k) (t_1 - t_2) \dots (t_{k-1} - t_k) p(t_1) \dots p(t_k) \end{aligned}$$

Предположим сначала, что $p(t) = R_1^{-1} \sqrt{N} \sin \sqrt{N}t$, $0 \leq t \leq \pi N^{-1/2}$, а при $\pi N^{-1/2} \leq t \leq T$ функция $p(t)$ равна нулю (величину скорости v без ущерба общности можно считать равной единице). Ясно, что $I_1 = 2TR_1^{-1}$, а для остальных интегралов

справедлива оценка

$$|I_k| \leq c (N^{-1/2})^{k-1}, \quad k \geq 2, \quad c = \text{const} > 0$$

поскольку интегрирование ведется лишь по малой области в пространстве переменных t_1, \dots, t_k и разности $t_i - t_j$ имеют порядок $N^{-1/2}$. При $N \rightarrow \infty$ период $T \rightarrow 2l$ и неравенство $|a| \leq 2$ перейдет в неравенство $l \leq R_1$ (отвечающее случаю $R_2 = \infty$ в (4.8)).

Рассмотрим теперь общий случай уравнения (4.6). Можно проверить, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_1 = 4l(R_1^{-1} + R_2^{-1}), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} I_2 = 4R_1^{-1} R_2^{-1} l^2$$

а интегралы I_k , $k \geq 3$ допускают оценку $|I_k| \leq c(N^{-1/2})^{k-2}$, $c > 0$. Поэтому при $N \rightarrow \infty$ неравенство $|a| < 2$ примет вид

$$|1 - 2l(R_1^{-1} + R_2^{-1}) + 2R_1^{-1}R_2^{-1}l^2| < 1$$

Оно, очевидно, эквивалентно (4.8).

Тем же способом можно получить условие устойчивости периодического движения точки между вогнутыми стенками в поле силы тяжести (фиг. 2). Пусть v_1 (v_2) — скорость точки в наинизшем (наивысшем) положении. Поскольку рассматривается движение с ударами, то предполагается, что $v_2^2 = v_1^2 - 2gl \geq 0$. Условие устойчивости в линейном приближении имеет вид:

$$(4.9) \quad \left| 1 - \frac{2(v_1 - v_2)}{g} \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} \right) + \frac{2(v_1 - v_2)^2}{g^2} \frac{v_1 v_2}{R_1 R_2} \right| < 1$$

Если $v_2 = 0$, то это условие эквивалентно (4.1). Устремим теперь g к нулю. В пределе будем иметь движение точки по инерции между двумя неподвижными стенками. В этом случае $v_i \rightarrow v$ ($i = 1, 2$) и $v_1 - v_2 = gl/v + o(g)$. Переходя в неравенстве (4.9) к пределу при $g \rightarrow 0$, получим известное условие устойчивости (4.8).

Отметим в заключение, что коэффициент $p(t)$ в уравнении (4.6) тесно связан с δ -функцией Дирака. Действительно, для любой непрерывной функции $f(x)$ имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_0^{\pi/\lambda} f(x) \sin(\lambda x) dx = 2f(0)$$

Таким образом, при $N \rightarrow \infty$ справедливо формальное соотношение

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2v \left[R_1^{-1} \delta\left(\frac{nl}{v} t\right) + R_2^{-1} \delta\left(\frac{nl}{v} t + l\right) \right]$$

Если подставить в выражение для интегралов I_k это формальное соотношение и воспользоваться неравенством для постоянной Ляпунова $|a| < 2$, то получим условие устойчивости (4.8).

5. Параболический бильярд. В работе [10] при помощи КАМ-теории исследовалась нелинейная устойчивость периодических подскоков точки в поле силы тяжести над кривой $y = f(x)$. В частности, показано, что в случае параболы ($f(x) = x^2/2a$, $a > 0$) эти решения орбитально устойчивы по Ляпунову при выполнении условия (4.1). Оказывается, этот результат просто вытекает из более сильного утверждения об интегрируемости задачи о параболическом бильярде.

Для доказательства рассмотрим задачу о скольжении тяжелой материальной точки по гладкому параболоиду

$$(5.1) \quad 2y + b = x^2/(a + b) + z^2/b; \quad a, b > 0$$

Как заметил Пенлеве, эта система с двумя степенями свободы имеет дополнительный первый интеграл. Интегрирование уравнений движения точки сведено Чаплыгиным к обращению абелевых интегралов [14]. Чаплыгин вводит параболические координаты v, w ($w \geq a \geq v \geq 0$) по формулам

$$(5.2) \quad ax^2 = (a + b)(a - v)(w - a), \quad 2y = v + w - (b + a), \quad az^2 = bvw$$

и получает уравнения для изменения v, w :

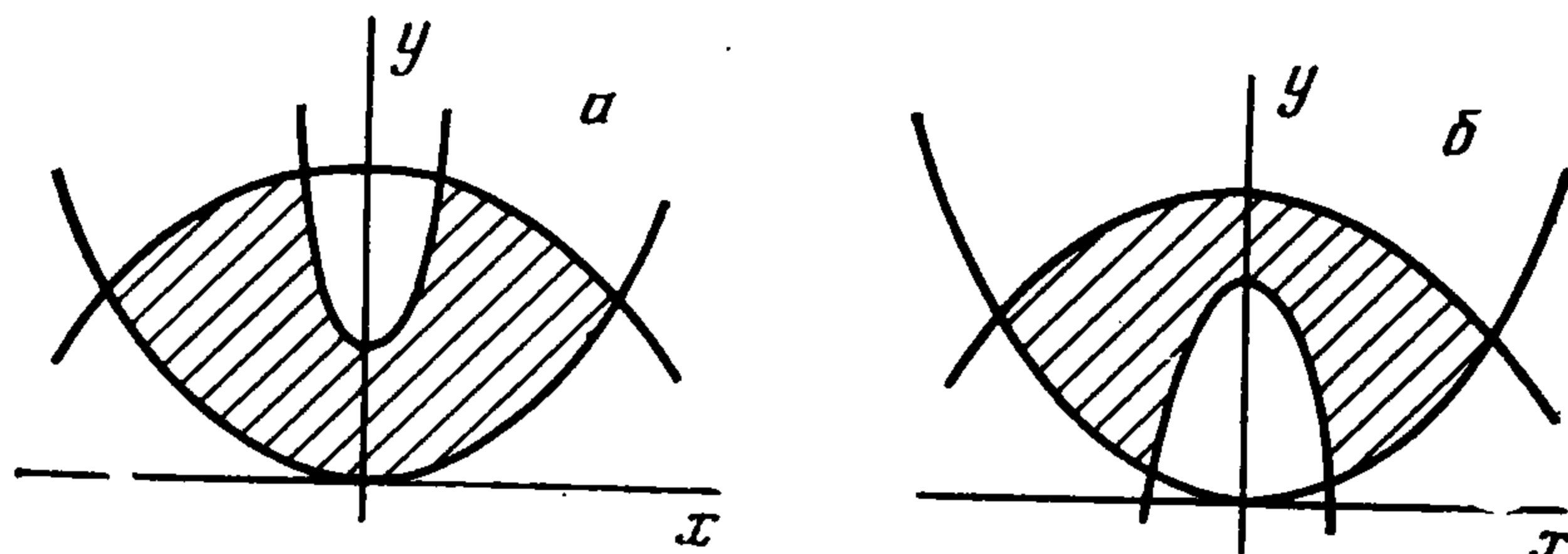
$$(5.3) \quad v' = \frac{4}{m(w-v)} \left[\frac{(\alpha v^2 - \beta v - \gamma)(a-v)v}{v+b} \right]^{1/2}$$

$$w' = \frac{4}{m(w-v)} \left[\frac{(-\alpha w^2 + \beta w + \gamma)(w-a)w}{w+b} \right]^{1/2}$$

$$\alpha = \frac{m^2 g}{4}, \quad \beta = \frac{mh}{2} + \frac{m^2(a+b)g}{4}$$

Здесь m — масса точки, g — ускорение свободного падения, h — полная энергия точки, γ — постоянная интегрирования.]

Устремим теперь параметр b к нулю. Тогда параболоид (5.1) перейдет в область над параболой $y = x^2/(2a)$ в вертикальной плоскости $z = 0$, и движение точки по параболоиду перейдет в свободное падение по параболе с абсолютно упругими ударами. Предельный переход такого вида впервые обсуждал, по-видимому, Биркгоф [15], заметивший, что геодезические на трехосном эллипсоиде переходят в траектории эллиптического бильярда при неограниченном уменьшении одной из его полуосей. Поскольку задача Пенлеве — Чаплыгина интегрируема при всех значениях $b > 0$, то и предельная задача о параболическом бильярде также интегрируема. Выписывать



Фиг. 3

дополнительный интеграл не имеет большого смысла, так как соотношения (5.2) и (5.3) (в которых надо положить $b = 0$) дают закон движения точки на всей оси времени.

Формулы (5.2) и (5.3) позволяют дать полный качественный анализ движения тяжелой точки с односторонней связью $y \geq x^2/2a$ (ср. с [14]). С этой целью рассмотрим многочлен $F(z) = \alpha z^2 - \beta z - \gamma$, который всегда имеет вещественные корни: обозначим их z_1, z_2 ($z_1 \leq z_2$). Так как $F(v) \geq 0$, $F(w) \leq 0$, $w \geq a \geq v \geq 0$, то имеют место неравенства $z_2 \geq w \geq z_1 \geq v$.

Будем различать два случая: 1) $z_2 \geq a \geq z_1$, 2) $z_2 \geq z_1 \geq a$. В первом из них $z_2 \geq w \geq a$, $z_1 \geq v \geq 0$. Траектория точки m расположена в криволинейном четырехугольнике

$$(5.4) \quad x^2/a \leq 2y \leq z_1 + x^2/(a - z_1), \quad 2y \leq z_2 + x^2/(a - z_1)$$

ограниченном софокусными параболой. Он изображен на фиг. 3, а. Во втором случае выполнены неравенства $z_2 \geq w \geq z_1$, $a \geq v \geq 0$ и траектория m лежит в четырехугольнике

$$(5.5) \quad z_1 + x^2/(a - z_1) \leq 2y \leq z_2 + x^2/(a - z_2), \quad x^2/a \leq 2y$$

изображенном на фиг. 3, б. В общем случае траектория точки m заполняет эти прямоугольники всюду плотно.

Траектория вертикальных колебаний точки m отвечает случаю, когда $F(a) = 0$, поэтому $\gamma = \alpha a^2 - \beta a$. Если $2\alpha a > \beta$ (что эквивалентно (4.1)), то при малом возмущении постоянных первых интегралов h и γ получим первый случай и прямоугольник (5.4) будет близок к оси y . В этом случае периодическое движение устойчиво. Если же $F(a) = 0$ и $2\alpha a < \beta$, то $z_1 = a$ и прямоугольник (5.5) вырождается в «двухугольник»

$$(5.6) \quad x^2/a \leq 2y \leq z_2 + x^2/(a - z_2), \quad z_2 > a$$

В этом случае вертикальные периодические колебания неустойчивы. Они имеют гиперболический тип и, следовательно, обладают асимптотическими траекториями. Эти асимптотические движения на самом деле двоякоасимптотические и имеют замечательное свойство: после каждого отскока траектория точки m проходит через фокус параболы $y = x^2/(2a)$ (лежащий, разумеется, внутри области (5.6)). Более того, время между последовательными прохождением через фокус постоянно и равно $2g^{-1}\sqrt{2hm^{-1}}$. Эта величина равна, конечно, периоду вертикальных колебаний точки m .

Если $z_1 = z_2 \geq a$, то точка m совершает движение по параболе

$$(5.7) \quad 2y = z_1 + x^2/(a - z_1), \quad y \geq x^2/(2a)$$

периодически отражаясь от софокусной исходной параболы $y = x^2/(2a)$. Все эти периодические решения имеют один и тот же период, равный $4\sqrt{a/g}$. В частном случае, когда $z_1 = z_2 = a$, решение (5.7) переходит в периодические вертикальные подскоки точки m на высоту $a/2$ (на расстояние до фокуса параболы). Эти колебания устойчивы.

Проведенный анализ позволяет дать полное и наглядное описание всех невырожденных движений точки m . Пусть энергия $h = 0$. Тогда точка m занимает наименьшее устойчивое положение равновесия. Будем увеличивать значения h . При малых $h > 0$ рождаются два различных семейства ляпуновских невырожденных периодических движений: вертикальные подскоки и гладкое скольжение по параболе. Решения второго семейства существуют при всех $h > 0$ и все они устойчивы (как предельный случай решений типа 1)). Решения первого семейства также существуют при всех h . Однако при $h = mga$ (когда высота подскока равна расстоянию до фокуса параболы) мультипликаторы становятся равными единице. Это — точка бифуркации: при $h > mga$ появляется еще одно семейство устойчивых периодических колебаний (5.7), а вертикальные периодические подскоки становятся неустойчивыми.

6. Гармонический осциллятор и эллиптический бильярд. Рассмотрим задачу о движении материальной точки по гладкой поверхности трехосного эллипсоида под действием упругой силы, направленной к центру (или от центра) эллипсоида. Эта задача проинтегрирована Якоби с использованием эллиптических координат [16]. Устремим одну из полуосей эллипсоида к нулю. Тогда задача Якоби перейдет в задачу о колебаниях гармонического осциллятора, заключенного внутри эллипса. Если коэффициент упругости равен нулю, то получим эллиптический бильярд Биркгофа. Динамику гармонического осциллятора внутри эллипса можно исследовать методом п. 5 при помощи разделяющихся переменных — эллиптических координат на плоскости.

Укажем, например, условия устойчивости периодических колебаний осциллятора, при которых точка все время находится на одной из осей симметрии эллипса. Пусть a, b — полуоси эллипса ($b \leq a$), c — коэффициент упругости, h — полная механическая энергия осциллятора. Оказывается, если $c \geq 0$, то движение точки вдоль меньшей (большой) оси эллипса устойчиво тогда и только тогда, когда

$$(6.1) \quad h \geq 0 \quad (0 \leq h \leq \frac{1}{2}ca^2)$$

Если же $c < 0$, то эти условия принимают вид

$$(6.2) \quad h \geq \frac{1}{2}|c|(a^2 - b^2) \quad (-\frac{1}{2}|c|a^2 \leq h \leq -\frac{1}{2}|c|(a^2 - b^2))$$

Второе условие (6.2) имеет простой геометрический смысл: амплитуда периодических колебаний точки не превосходит расстояния от конца большой полуоси до ближайшего фокуса. При увеличении амплитуды это решение теряет устойчивость, становясь гиперболическим. Отметим любопытное свойство траекторий, проходящих через фокус эллипса: через равные промежутки времени бесконечно много раз точка попеременно оказывается в фокусах эллиптического бильярда. Это свойство имеет место и для траекторий, не касающихся границы бильярда.

Пусть $c < 0$. Будем деформировать эллипс так, чтобы один из его фокусов оставался неподвижным, а второй удалялся в бесконечность, причем $(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \rightarrow \text{const}$. В результате эллипс превратится в параболу. Если при этом еще уменьшать величину коэффициента упругости так, чтобы $|c|a \rightarrow g$, то задача о гармоническом осцилляторе внутри эллипса перейдет в задачу о параболическом бильярде, рассмотренную в п. 5. Можно показать, что при таком предельном переходе второе условие устойчивости (6.2) перейдет в известное условие (4.1).

Изложенные выше результаты позволяют получить условия устойчивости (в линейном приближении) колебаний плоского гармонического осциллятора, расположенного посередине между двумя выпуклыми кривыми одинаковой кривизны. Согласно п. 4, в линейном приближении устойчивость зависит лишь от кривизны этих кривых в концевых точках прямолинейной траектории, но не от их формы.

Пусть l — длина периодической траектории осциллятора, R — радиус кривизны кривых в концевых точках этой траектории. Будем рассматривать движения с ударами. Если $c > 0$, то движение устойчиво лишь при выполнении неравенства $l < 2R$ (см. (6.1)). Сравнивая этот результат с неравенствами (4.8), получаем, что наличие притягивающей упругой силы не влияет на устойчивость колебаний с ударами. Пусть теперь $c < 0$. Если $l < 2R$, то движение устойчиво, когда $4h > |c|l(R - l/2)$. Если же $l > 2R$, то условие устойчивости выражается неравенством $4h < |c|l(R - l/2)$. При выполнении равенства $l = 2R$ периодическое колебание вырождено: его мультипликаторы равны единице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов В. В. Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550—554.
2. Caratheodory C. Der Schlitten // ZAMM. 1933. В. 13. Н. 2. S. 71—76.
3. Фуфаев Н. А. О возможности реализации неголономной связи посредством сил вязкого трения // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 513—515.
4. Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНТИ, 1983. Т. 6. С. 3—128.
5. Rubin H., Ungar P. Motion under a strong constraining force. // Commun. Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. N 1. P. 65—87.
6. Анпель П. Теоретическая механика. Т. 1, 2. М.: Физматгиз, 1960. 515 с.; 487 с.
7. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
8. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
9. Пуанкаре А. Новые методы небесной механика // Избр. труды. Т. 1. М.: Наука. 1971. 771 с.
10. Иванов А. П., Маркеев А. П. О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632—636.
11. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
12. Жуковский Н. Е. Условия конечности интегралов уравнения $d^2y/dx^2 + py = 0$ // Мат. сб. 1892. Т. 16. Вып. 3. С. 582—591.
13. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
14. Чаплыгин С. А. О параболоидном маятнике // Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 194—199.
15. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.—Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
16. Якоби К. Лекции по динамике. М.—Л.: Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1936. 270 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.IV.1988