

ти всей системы уже при малых скоростях течения слоев друг относительно друга. Система при этом может находиться как в вакууме, так и в бесконечной жидкости.

Таким образом, проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод: наличие стратифицированного потока жидкости в оболочке приводит к неустойчивости системы оболочка — жидкость, начиная с малых скоростей слоев ($V_s \ll V_{kn}$). Эта неустойчивость системы порождается неустойчивостью границы слоев жидкости. Если же поток жидкости в оболочке не стратифицированный, то система, как известно, теряет устойчивость при значительно более высоких скоростях потока ($V_* > V_{kn}$, флаттер).

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
3.III.1988

УДК 539.3 : 534.26

ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СОСТЫКОВАННЫХ УПРУГИХ ПОЛУПОЛОС

Гетман И. П., Лисицкий О. Н.

Приводится численное решение задачи о падении плоской гармонической волны на границу раздела двух состыкованных полуполос с различными упругими свойствами. Дается детальный анализ отражения и прохождения энергии падающей волны через границу раздела, исследуется характер напряженно-деформированного состояния в ее окрестности. Изучение волновых полей в продольно-неоднородных средах ранее проводилось в работах [1—3] и др.

1. Рассмотрим бесконечную полосу толщиной $2h$. Свяжем с ней декартову систему координат x, z так, что ось z ортогональна границам полосы, а ось x совпадает с ее срединной линией. Пусть плоская граница $x = 0$ — линия раздела свойств материала, λ_k, μ_k, ρ_k — модули упругости и плотность материала слева от границы раздела ($x < 0, k = 1$) и справа от нее ($x > 0, k = 2$). Будем считать, что границы полосы $z = \pm h$ свободны от напряжений.

Введем в рассмотрение четырехмерный вектор $W = (u, w, \sigma, \tau)^T$, характеризующий волновое поле в полосе. Здесь $u = u_x, w = u_z$ — компоненты вектора перемещений, $\sigma = \sigma_{xx}, \tau = \tau_{xz}$ — соответствующие компоненты тензора напряжений.

Пусть на границу раздела из $x = -\infty$ падает плоская нормальная волна Лэмба единичной амплитуды: $W_j^{(1)}(z, \gamma_j^{(1)}) \exp [i(\gamma_j^{(1)}x - \Omega t)]$, где $\Omega = \omega h/c$ — безразмерная частота ($c = \max \{ \sqrt{\mu_1/\rho_1}, \sqrt{\mu_2/\rho_2} \}$), $\gamma_j^{(1)}$ — j -е волновое число, связанное с Ω дисперсионным уравнением Релея — Лэмба [4], $W_j^{(1)}$ — четырехмерный вектор, компоненты которого для волны сжатия — растяжения определяются соотношениями

$$\begin{aligned} u_j &= i\gamma_j (\operatorname{ch} \alpha_1 z - S_j \alpha_2^{-1} \operatorname{ch} \alpha_2 z) \\ w_j &= \gamma_j^2 \alpha_1^{-1} \operatorname{sh} \alpha_1 z - S_j \operatorname{sh} \alpha_2 z \\ \tau_j &= \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial z} + i\gamma_j w_j \right), \quad \sigma_j = i\gamma_j (\lambda + 2\mu) u_j + \lambda \frac{\partial w_j}{\partial z} \\ \alpha_1^2 &= \gamma_j^2 - \frac{\rho \Omega^2}{\mu}, \quad \alpha_2^2 = \gamma_j^2 - \frac{\rho \Omega^2}{\lambda + 2\mu} \\ S_j &= \frac{\alpha_1^2 + \gamma_j^2}{2\alpha_1} \frac{\operatorname{sh} \alpha_1 h}{\operatorname{sh} \alpha_2 h} \end{aligned}$$

Индекс $k = 1, 2$ в круглых скобках указывает на принадлежность величины к среде, находящейся соответственно слева и справа от границы раздела свойств материала.

В принятых обозначениях волновое поле в первой и второй полуполосах при учете условий излучения можно представить в виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} W^{(1)} &= W_j^{(1)}(z, \gamma_j^{(1)}) \exp [i(\gamma_j^{(1)}x - \Omega t)] + \\ &+ \Sigma A_{1n} W_n^{(1)}(z, -\gamma_n^{(1)}) \exp [i(-\gamma_n^{(1)}x - \Omega t)] \\ W^{(2)} &= \Sigma A_{2n} W_n^{(2)}(z, \gamma_n^{(2)}) \exp [i(\gamma_n^{(2)}x - \Omega t)] \\ \text{Im } \gamma_l^{(k)} &\geq 0; \quad d\Omega/d\gamma_l^{(k)} > 0 \quad (\text{Im } \gamma_l^{(k)} = 0) \end{aligned}$$

Здесь и далее суммирование ведется от $n = 1$ до $n = \infty$.

Замечание. При определенных значениях Ω , когда $d\Omega/d\gamma = 0$, уравнение Релея — Лэмба имеет кратные собственные значения. В этом случае в соотношения (1.1) войдут дополнительные слагаемые, соответствующие присоединенным собственным функциям. Подробнее см. в [5].

В выражениях (1.1) A_{1n}, A_{2n} — амплитуды отраженных и прошедших волн. Вещественным $\gamma_l^{(k)}$ соответствуют распространяющиеся волны, комплексным — неоднородные волны, локализованные вблизи границы $x = 0$ и затухающие при удалении от нее.

Учитывая соотношения (1.1), условие непрерывности перемещений и вектора напряжений на границе раздела

$$(1.2) \quad W^{(1)} = W^{(2)}, \quad x = 0$$

можно записать в виде (множитель $\exp(-i\Omega t)$ опущен)

$$(1.3) \quad W_j^{(1)}(\gamma_j^{(1)}) + \Sigma A_{1n} W_n^{(1)}(-\gamma_n^{(1)}) = \Sigma A_{2n} W_n^{(2)}(\gamma_n^{(2)})$$

Для сведения функциональных уравнений (1.3) к алгебраическим воспользуемся условием обобщенной ортогональности [6, 7]

$$(1.4) \quad \begin{aligned} (W_l^{(k)}, UW_m^{(k)}) &\equiv \int_{-h}^h [\sigma_l^{(k)} \bar{u}_m^{(k)} + \tau_l^{(k)} \bar{w}_m^{(k)} - \bar{\sigma}_m^{(k)} u_l^{(k)} - \bar{\tau}_m^{(k)} w_l^{(k)}] dz = \\ &= 4i\Omega^{-1} \delta_{lm} P_l^{(k)} \\ P_l^{(k)} &= 0, \quad \text{Im } \gamma_l^{(k)} \neq 0; \quad P_l^{(k)} \neq 0, \quad \text{Im } \gamma_l^{(k)} = 0; \quad U = \begin{vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(0 — нулевая, E — единичная матрицы 2×2).

В выражении (1.4) величина $P_l^{(k)}$ определяет средний за период поток энергии, переносимый через поперечное сечение $x = \text{const}$ волной с волновым числом $\gamma_l^{(k)}$.

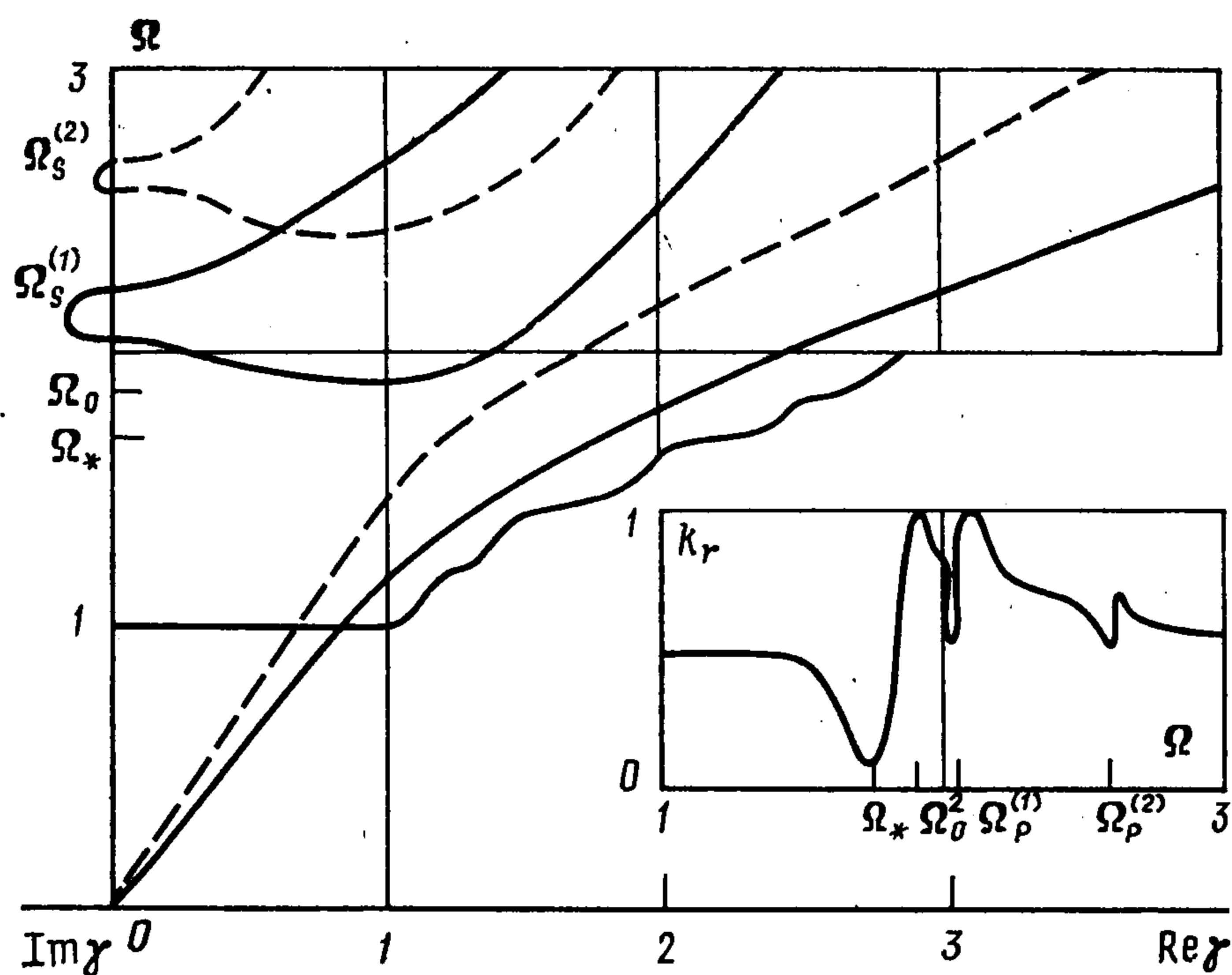
Умножая скалярно соотношения (1.3) последовательно на $UW_m^{(1)}(-\gamma_m^{(1)})$, $UW_m^{(2)}(\gamma_m^{(2)})$ и используя условие (1.4), приходим к бесконечной парной системе алгебраических уравнений

$$(1.5) \quad \begin{aligned} 4i\Omega^{-1} P_m^{(1)} A_{1m} &= \Sigma b_{nm} A_{2n}, \quad 4i\Omega^{-1} P_m^{(2)} A_{2m} = \\ &= -\Sigma \bar{b}_{mn} A_{1n} + (W_j^{(1)}(\gamma_j^{(1)}), UW_m^{(2)}(\gamma_m^{(2)})) \\ (b_{nm} &= (W_n^{(2)}(\gamma_n^{(2)}), UW_m^{(1)}(-\gamma_m^{(1)})), \quad m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Для решения системы (1.5) использовался метод редукции, при этом критерием достаточности редукции являлась степень выполнения условий сопряжения (1.2).

При формировании системы в практических расчетах учитывалось, помимо всех бегущих волн, до четырех пар неоднородных волн в каждой из полуполос. Погрешность выполнения условий сопряжения по перемещениям во всем рассмотренном частотном диапазоне не превышала 1% от максимальной величины $u_x(z)$. Точность выполнения условий сопряжения по напряжениям при указанном количестве учитываемых неоднородных волн в интервале $|z| < h(1 - 2\alpha)$ (α — показатель особенности по напряжениям в угловых точках, возникающей при определенных сочетаниях контактирующих сред [8]) не превышала 5—6% от максимального значения $\sigma_{xx}(z)$ в падающей волне.

В случае наличия особенности ряды по напряжениям на отрезке $h(1 - 2\alpha) \leq z \leq h$ при $x = 0$ расходятся, и для удовлетворения условиям сопряжения на всем интервале $|z| \leq h$ необходимо привлекать обобщенные методы суммирования и регуляризации [9, 10].



Фиг. 1

После нахождения из бесконечной системы значений амплитуд проверялось равенство энергии падающей волны сумме энергий отраженных и прошедших волн, что служило дополнительным критерием достоверности полученных результатов.

2. Найденные из редуцированной системы значения амплитуд A_{1n} , A_{2n} позволяют полностью определить волновые поля в обеих полуполосах и провести энергетический анализ процесса отражения и прохождения волн через границу $x = 0$.

На фиг. 1 представлены дисперсионные кривые каждой из полуполос и зависимость от частоты коэффициента отражения

$$k_r = \frac{1}{P_1^{(1)}} \sum_{m=1}^N |A_{1m}|^2 P_m^{(1)}$$

(отношение энергии отраженных волн к энергии падающей волны N — число распространяющихся на данной частоте волн) в случае симметричных колебаний волновода при падении на границу раздела первой нормальной волны сжатия — растяжения. Сплошными линиями изображены дисперсионные кривые для левой полуполосы при $\lambda_1 = 206$ ГН/м², $\mu_1 = 153$ ГН/м², $\rho_1 = 18,7 \cdot 10^3$ кг/м³, штриховыми — для правой полуполосы при $\lambda_2 = 59,2$ ГН/м², $\mu_2 = 32,6$ ГН/м², $\rho_2 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³.

На фиг. 1 Ω_* , $\Omega_0^{(k)}$, $\Omega_p^{(k)}$, $\Omega_s^{(k)}$ — некоторые характерные частоты процесса отражения волн через границу. Частоты $\Omega_0^{(k)}$, $\Omega_p^{(k)}$, $\Omega_s^{(k)}$ определяются дисперсионными кривыми для k -й полосы. На частоте $\Omega_0^{(k)}$ групповая скорость обращается в нуль, а $\Omega_p^{(k)}$, $\Omega_s^{(k)}$ соответствуют частотам толщинно-поперечных и толщинно-сдвиговых резонансов и определяются по известным формулам [4]

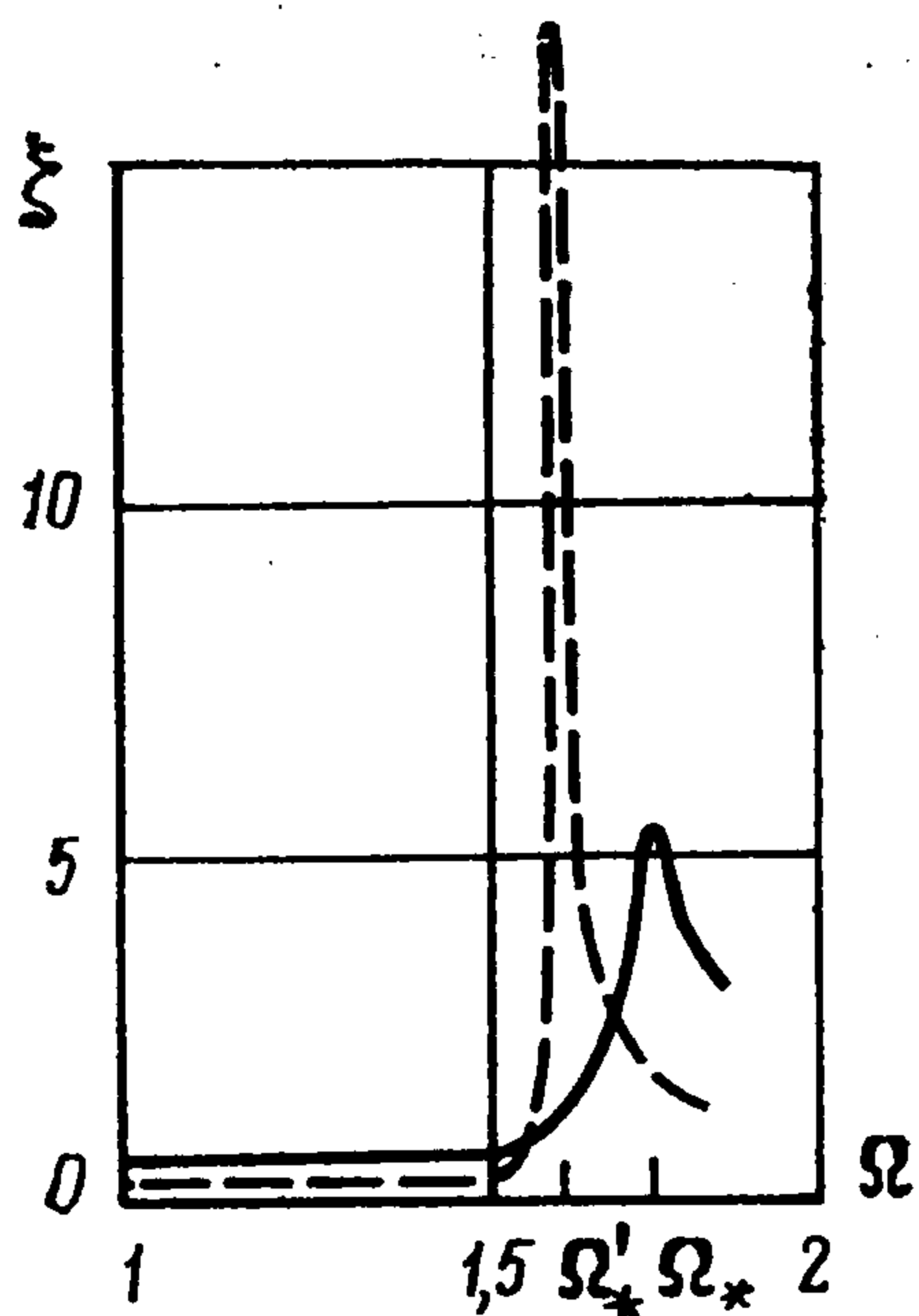
$$\Omega_p^{(k)} = \frac{\pi(2m+1)}{2h} \sqrt{\frac{\lambda_k + 2\mu_k}{\rho_k}}, \quad \Omega_s^{(k)} = \frac{\pi m}{h} \sqrt{\frac{\mu_k}{\rho_k}},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

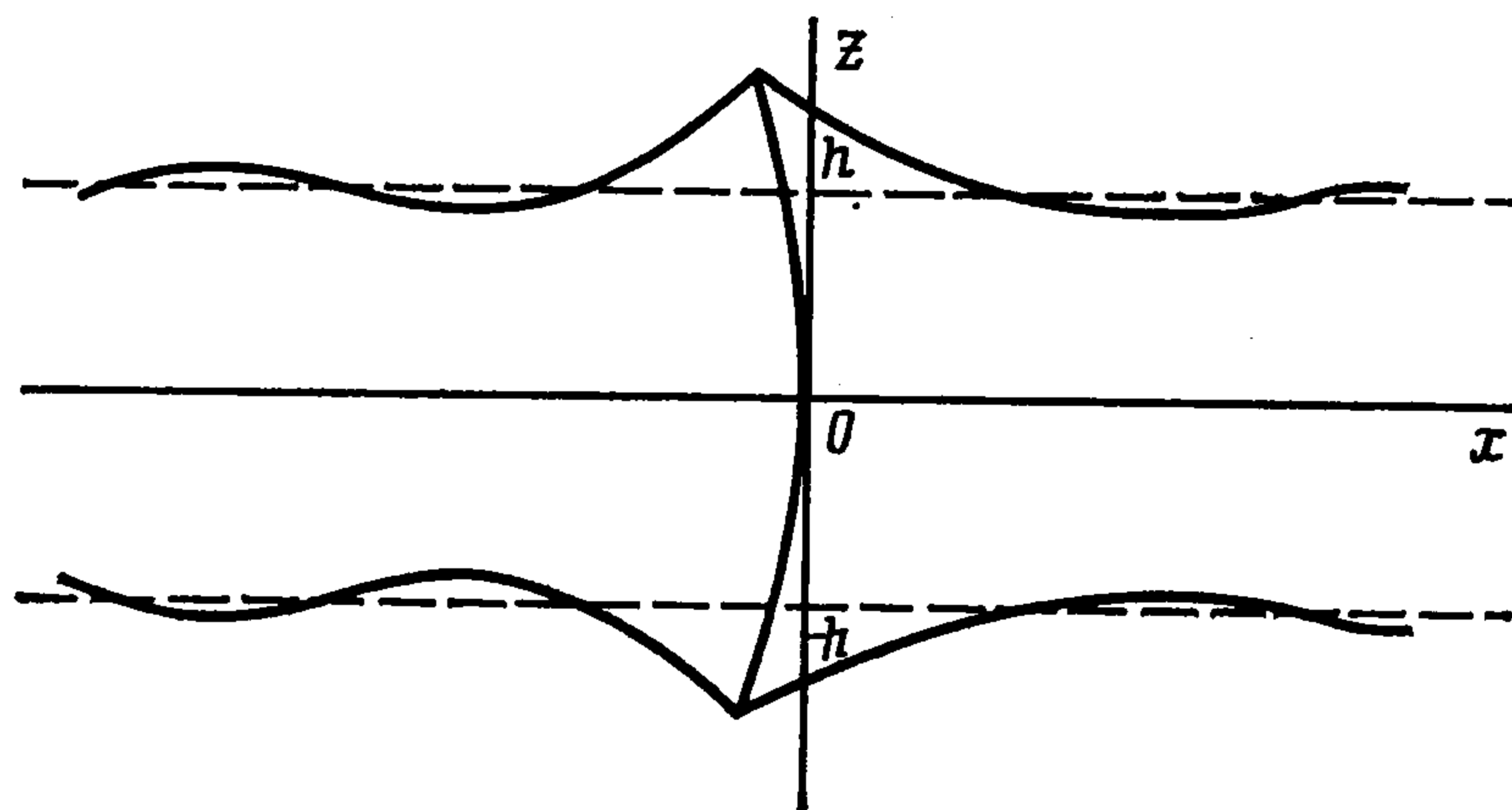
Частота Ω_* для каждой пары материалов определяется численно и лежит в области, когда в отраженном и прошедшем поле распространяется по одной бегущей волне, составляя при этом примерно 0,85—0,9 от величины $\Omega_0 = \min\{\Omega_0^{(1)}, \Omega_0^{(2)}\}$.

На основе серии расчетов, выполненных для различных сочетаний упругих свойств контактирующих материалов, выявлены некоторые общие закономерности в поведении k_r .

При $\Omega < \Omega_*$ коэффициент отражения практически во всем диапазоне постоянен и совпадает со значением, полученным на основе расчетов по стержневой теории. При приближении к частоте Ω_* наблюдается резкое уменьшение коэффициента k_r , который достигает своего минимального значения при $\Omega = \Omega_*$. Последнее связано с тем, что на этой частоте происходит значительное увеличение модуля амплитуды первой отраженной нераспространяющейся волны $|A_{12}|$.



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 сплошной линией для указанной пары материалов представлено в зависимости от частоты отношение $\xi = |A_{12}/A_{11}|$ модулей амплитуд отраженных первой неоднородной и распространяющейся волн. Величина максимума этого отношения существенно зависит от упругих свойств контактирующих материалов. Так, если свойства материала первой полуполосы оставить неизменными, а в качестве материала второй полуполосы выбрать более мягкий материал, например, с модулями $\lambda_2 = 2,29 \text{ ГН/м}^2$, $\mu_2 = 1,53 \text{ ГН/м}^2$, $\rho_2 = 93,5 \text{ кг/м}^3$, то на частоте Ω'_* первая нераспространяющаяся мода возбуждается гораздо значительнее (штриховая линия на фиг. 2). При этом частота Ω'_* несколько смещена относительно Ω_* , что связано с изменением параметров, и близка к частоте краевого резонанса для первой полуполосы [4].

Для поведения решения на частоте Ω_* характерно возникновение интенсивных колебаний, локализованных в окрестности границы раздела полуполос. На фиг. 3 представлена рассчитанная форма колебаний в окрестности границы раздела полуполос на частоте Ω_* , которую естественно назвать частотой граничного резонанса. При этом понятие граничного резонанса может рассматриваться как естественное обобщение понятия краевого резонанса на случай двух граничащих между собой волноводов.

Очевидно, что величина минимума коэффициента отражения на частоте Ω_* зависит от параметров материалов состыкованных полуполос. Для первой пары рассмотренных выше материалов при $\Omega = \Omega_*$ во вторую среду переносится более 96% энергии падающей волны, тогда как для $\Omega < \Omega_*$ эта доля составляет примерно 48% (фиг. 1). Для второй пары материалов на частоте $\Omega = \Omega_*$ во вторую среду переносится более 60% энергии, в то время как в области частот $\Omega < \Omega_*$ практически вся энергия (96%) отражается от границы раздела.

Следующая характерная особенность поведения коэффициента отражения — его увеличение при приближении к частоте Ω_0 , начиная с которой в отраженном или прошедшем поле появляются три бегущие волны. На частоте Ω_0 величина k_r достигает своего максимального значения, приближаясь к единице, что соответствует практически полному отражению энергии падающей волны.

При дальнейшем увеличении частоты поведение k_r заметно усложняется и существенным образом зависит от взаимного расположения дисперсионных кривых, в частности от взаимного расположения частот толщинно-поперечных $\Omega_p^{(k)}$ и толщинно-сдвиговых $\Omega_s^{(k)}$ резонансов ($k = 1, 2$). Из выявленных закономерностей в поведении коэффициента отражения при $\Omega > \Omega_0$ отметим наличие локальных минимумов k_r в окрестностях нижних толщинно-поперечных резонансов $\Omega_p^{(1)}$ и $\Omega_p^{(2)}$ (фиг. 1).

Сложность поведения k_r в области частот, когда в волноводе начинает распространяться несколько бегущих волн, проявляется в перераспределении с изменением частоты энергии, переносимой каждой волной. В таблице приведено процентное распределение энергии падающей волны между отраженными и прошедшими (указано в скобках) бегущими волнами, участвующими в волновом процессе, в различных частотных диапазонах для рассмотренной выше пары материалов.

Из таблицы видно, что в рассмотренной области частот в прошедшем поле наиболее энергоемкой остается первая бегущая волна, в то время как в отраженном поле наблюдается перераспределение энергии отраженных волн между собой. Так, с появлением

Диапазон частот	Ω	1	2	3
$\Omega < \Omega_*$	0,6	48,3(51,7)	—	—
Ω_*	1,76	3,9(96,1)	—	—
$\Omega_*, \Omega_0^{(1)}$	1,84	40,6(59,4)	—	—
$\Omega_0^{(1)}, \Omega_p^{(1)}$	1,9	86,1(0,4)	6,2	7,3
	1,92	42,8(6,8)	14,6	35,8
	2,01	3,6(20,6)	15,4	60,4
$\Omega_p^{(1)}, \Omega_s^{(1)}$	2,04	26,5(47,2)	26,3	—
	2,2	88,9(6,6)	4,5	—
$\Omega_s^{(1)}, \Omega_p^{(2)}$	2,23	45,3(16,9)	5,9	31,9
	2,44	3,3(28,3)	2,7(1,1)	63,4(1,2)
$\Omega_p^{(2)}, \Omega_s^{(2)}$	2,67	0,1(34,9)	1,5(2,0)	61,5(—)
$\Omega > \Omega_s^{(2)}$	3,0	3,45(43,7)	1,45(1,7)	49,3(0,4)

нием трех распространяющихся отраженных волн $\Omega_0^{(1)} < \Omega < \Omega_p^{(1)}$, $\Omega > \Omega_s^{(1)}$ энергосодержание первой волны постепенно падает, а третьей волны — увеличивается, и она становится наиболее энергоемкой в отраженном поле. При этом следует отметить, что в частотном диапазоне, в котором третья бегущая волна имеет противоположные знаки фазовой и групповой скоростей, перераспределение энергии существенно зависит от коэффициента Пуассона ν_1 в первой среде. Так, если $\nu_1 > 1/3$ (в этом случае $\Omega_p^{(1)} > \Omega_s^{(1)}$), то энергосодержание третьей бегущей волны несколько возрастает, но не превышает энергосодержания первой.

Проведенный анализ отражения и прохождения энергии через границу раздела полуплос в широком диапазоне частот позволяет сделать вывод о том, что для определенной пары материалов наибольшее для нее прохождение энергии из одной среды в другую наблюдается на частоте граничного резонанса Ω_* . При этом для многих сочетаний контактирующих материалов на данной частоте наблюдается практически полное прохождение энергии через границу составного волновода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Касаткин Б. А. Об одном классе дифракционных задач для нормальных и поверхностных волн // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 2. С. 232—237.
2. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Отражение волн Лэмба от границы раздела в составном волноводе // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 5. С. 121—125.
3. Bedford A., Sorensen A. L. Variational solution for the reflection and transmission of waves at a material interface between waveguides // J. Acoust. Soc. Amer. 1977. V. 62. No. 2. P. 370—374.
4. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев.: Наук. думка. 1981. 283 с.
5. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука. 1979. 319 с.
6. Зильбергейт А. С., Нуллер Б. М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 333—335.
7. Бобровицкий Ю. И. Соотношения ортогональности для волн Лэмба // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 4. С. 513—515.
8. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединений вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора // Прикл. механика. Тр. Амер. о-ва инж. механиков. 1971. Т. 38. № 2. С. 87—96.
9. Пельц С. П., Шихман В. М. О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуплосы // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 4. С. 821—824.
10. Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Мелешко В. В. О возможностях метода однородных решений в смешанной задаче теории упругости для полуплосы // Теоретическая и прикладная механика. Киев; Донецк: Вища школа. 1987. Вып. 18. С. 3—8.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
8.1.1988.