УДК 532.5:539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ПОТОКЕ

Ционский А. Я.

Анализ устойчивости по Кельвину горизонтального плоского течения двух слоев жидкости, имеющих разные плотности и движущихся один относительно другого, обобщается на случай продольного коаксиального течения двухслойной жидкости внутри круговой цилиндрической оболочки. Показано, что потеря устойчивости всей системы наступает при малых скоростях движения слоев друг относительно друга. Дается сравнение с классическим флаттером, при котором поток не стратифицирован.

1. Рассмотрим движение тонкой, упругой, бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки под действием возмущения внутреннего продольного потенциального течения двухслойной идеальной несжимаемой жидкости. Граница раздела слоев в невозмущенном состоянии имеет форму коаксиальной круговой цилиндрической поверхности. Возмущения течения жидкости считаются достаточно малыми, чтобы их квадратами и более высокими степенями можно было пренебречь. Используются уравнения моментной теории оболочек в пренебрежении тангенциальными силами инерции [1].

В силу осевой симметрии системы оболочка—жидкость, отделим окружную координату и для n-й окружной моды потенциалов возмущенных скоростей слоев и перемещений оболочки получим

$$\varphi_{xx}{}^s + \varphi_{rr}{}^s + r^{-1}\varphi_r{}^s - n^2 r^{-2}\varphi^s = 0 \tag{1.1}$$

$$\Delta^2\Delta^2\Phi + \frac{(1-\nu^2)R_1^4}{a^2}\Phi_{xxxx} + \frac{\rho h R_1^4}{D}\Delta^2\Phi_{tt} = \frac{R_1^4}{D}P^1\Big|_{r=R_1} \tag{1.2}$$

$$\Delta\Phi = R_1^2\Phi_{xx} - n^2\Phi,\quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad a = \frac{h}{\sqrt{12}\,R_1}$$

$$P^s = -\rho_0{}^s(\varphi_t{}^s + V_s\varphi_x{}^s),\quad W^1 = \Delta^2\Phi \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} r = R_s,\ \varphi_r{}^1 = W_t{}^s + V_1 W_x{}^s \\ r = R_2,\ \varphi_r{}^2 = W_t{}^2 + V_2 W_x{}^2,\ P^1 = P^2 \\ r = 0,\ |\varphi^2| < \infty;\ 0 < R_2 < R_1,\ s = 1,\ 2 \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь x, r — продольная и радиальная координаты цилиндрической системы координат, связанной с осью системы оболочка — жидкость, φ^s, P^s — потенциал возмущений скорости и соответствующее давление для внешнего ($s = 1$) и внутреннего ($s = 2$) слоев жидкости, R_1, h, ρ — радиус, толщина и плотность материала оболочки, D — цилиндрическая жесткость, a — параметр тонкостенности оболочки, $\rho_0{}^s$, V_s — плотности и скорости слоев жидкости при невозмущенном движении, W^s — нормальные перемещения оболочки ($s = 1$, $r = R_1$) и границы раздела слоев ($s = 2$, $r = R_2$) соответственно.

2. Решение задачи для оболочки, потенциалы φ^s и давления P^s ищем в классе продольно распространяющихся волн

$$(W^s, \Phi, \varphi^s, P^s) = (W_+{}^s, \Phi_+, \varphi_+{}^s(r), P_+{}^s(r))\, e^{i(\omega t - kx)} \tag{2.1}$$

Здесь ω — частота колебаний, $k = \pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина полуволны в направлении образующей, $W_+{}^s$, Φ_+, $\varphi_+{}^s(r)$, $P_+{}^s(r)$ — коэффициенты и функции, подлежащие определению.

Подстановка (2.1) в уравнения (1.1) и условия (1.4) дает краевую задачу, решение которой ищем в виде

$$\varphi_+{}^1(r) = C_1{}^1 I_n(kr) + C_2{}^1 K_n(kr),\quad \varphi_+{}^2(r) = C^2 I_n(kr) \tag{2.2}$$

При этом уравнения (1.1) и последнее условие (1.4) удовлетворяются, а из первых двух условий (1.4) имеем (V — фазовая скорость распространения волны)

$$\begin{gathered} C_1{}^1 I_n'(kR_s) + C_2{}^1 K_n'(kR_s) = i(V - V_1)W^s \\ C^2 I_n'(kR_2) = i(V - V_2)W^2,\quad V = \omega/k \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $I_n(x)$, $K_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда соответственно, штрих означает производную по аргументу.

Определяя из (2.3) неизвестные C_j^1, C^2 и используя первое соотношение (1.3) с учетом (2.1), получаем выражения для давлений

$$(2.4)\qquad \begin{gathered} P_+^1(r) = -\rho_0^1 k (V - V_1)^2 [F(R_2, r) W^1 - F(R_1, r) W^2] \\ P_+^2(r) = \rho_0^2 k (V - V_2)^2 (I_n(kr)/I_n'(kR_2)) W^2 \\ F(x, y) = \frac{I_n'(kx) K_n(ky) - I_n(ky) K_n'(kx)}{I_n'(kR_1) K_n'(kR_2) - I_n'(kR_2) K_n'(kR_1)} \end{gathered}$$

Затем подставляя эти выражения с использованием (2.1) в уравнение (1.2) и предпоследнее условие (1.4) и считая, что W^s не равны нулю, получаем уравнение

$$(2.5)\qquad \begin{gathered} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \\ a_{11} = V_{kn}^2 - V^2 + \frac{\rho_0^1 (V - V_1)^2}{\rho kh} F(R_2, R_1) \\ a_{12} = -\frac{\rho_0^1 (V - V_1)^2}{\rho kh} F(R_1, R_1) \\ a_{21} = -\rho_0^1 (V - V_1)^2 F(R_2, R_2) \\ a_{22} = \rho_0^1 (V - V_1)^2 F(R_1, R_2) - \rho_0^2 (V - V_2)^2 I_n(kR_2)/I_n'(kR_2) \\ V_{kn}^2 = \frac{D}{\rho h R_1^2}\left(\delta^2 + \frac{1 - \nu^2}{a^2\delta^2}\right), \quad \delta^2 = \frac{(k^2R_1^2 + n^2)^2}{k^2R_1^2} \end{gathered}$$

Здесь $V_{kn}(kR_1, n)$ — фазовая скорость распространения преимущественно изгибных волн вдоль оболочки в вакууме, имеющая минимум [1], равный $[2D\sqrt{1 - \nu^2}/(a\rho h R_1^2)]^{1/2}$.

3. Рассмотрим случай распространения по системе оболочка — жидкость волны с малой фазовой скоростью при малых скоростях движения слоев, т. е.

$$(3.1)\qquad (V/V_{kn})^2 \ll 1, \quad (V_s/V_{kn})^2 \ll 1$$

С использованием оценок (3.1) уравнение (2.5) приводится к виду $a_{22} = 0$, что соответствует решению задачи о движении слоев жидкости в цилиндрической полости с твердыми стенками. Отсюда находим

$$(3.2)\qquad V = \frac{V_1 - V_2\gamma_{kn}}{1 - \gamma_{kn}}, \quad \gamma_{kn} = \pm\left[\frac{\rho_0^2 I_n(kR_2)}{\rho_0^1 F(R_1, R_2) I_n'(kR_2)}\right]^{1/2}$$

Из свойств функций $I_n(x)$, $K_n(x)$ и их производных [2] следует, что γ_{kn} — чисто мнимая величина. Анализ формулы (3.2) показывает, что для двухслойного потока $V_1 \neq V_2$ существует фазовая скорость V с отрицательной мнимой частью, т. е. в системе оболочка — жидкость имеется бегущая волна с прогрессирующей амплитудой. Иными словами, уже при малых скоростях слоев V_s — есть потеря устойчивости системы и начальные возмущения экспоненциально возрастают со временем.

Если $V_1 = V_2$, то двухслойный поток превращается в поток с постоянной по сечению скоростью и $V = V_1 = V_2$ — вещественная величина, т. е. при рассматриваемых малых скоростях потока ($V \ll V_{kn}$) экспоненциального роста амплитуд нет. При этом исследуемая задача переходит в классическую задачу о флаттере. Решение этой задачи для бесконечной цилиндрической оболочки, внутри которой имеется продольное потенциальное течение жидкости, приводит к величине критической скорости флаттера V_*, такой, что $V_* > V_{kn}$. При скорости потока V_*, как известно, происходит возбуждение автоколебаний системы и начальные возмущения экспоненциально возрастают со временем [1]. Если та же оболочка пуста, а бесконечная жидкость окружает ее коаксиальным двухслойным потоком, то проводя аналогичные выкладки, получим для γ_{kn} выражение, отличающееся от приведенного в (3.2) тем, что отношение $I_n(kR_2)/I_n'(kR_2)$ заменено на $K_n(kR_2)/K_n'(kR_2)$, где $0 < R_1 < R_2 < \infty$, R_1, R_2 — радиусы оболочки и границы слоев соответственно. Очевидно, что и в этом случае γ_{kn} — чисто мнимая величина и, следовательно, если $V_1 \neq V_2$, то колебания системы оболочка — жидкость экспоненциально возрастают со временем при $V_s \ll V_{kn}$. Если же $V_1 = V_2$, то потеря устойчивости системы наступает при критической скорости потока, такой, что $V_* > V_{kn}$ (флаттер) [1].

Частный случай $n = 0$ и R_1, $R_2 \to \infty$, так что $R_1 - R_2 = \mathrm{const} = H$, соответствует решению плоской задачи для бесконечной пластины, с одной стороны которой течет двухслойный поток. При этом пристеночный слой имеет толщину H, а второй слой — бесконечную толщину. Переходя к пределу, имеем $\gamma_{k0} = \pm i\sqrt{kH}$ $(kH \ll 1)$.

Очевидно, что в коаксиальной системе цилиндрических оболочек и потоков жидкостей наличие в одной из жидкостей двух слоев также приводит к потере устойчивости всей системы уже при малых скоростях течения слоев друг относительно друга. Система при этом может находиться как в вакууме, так и в бесконечной жидкости.

Таким образом, проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод: наличие стратифицированного потока жидкости в оболочке приводит к неустойчивости системы оболочка — жидкость, начиная с малых скоростей слоев ($V_s \ll V_{kn}$). Эта неустойчивость системы порождается неустойчивостью границы слоев жидкости. Если же поток жидкости в оболочке не стратифицированный, то система, как известно, теряет устойчивость при значительно более высоких скоростях потока ($V_* > V_{kn}$, флаттер).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию 3.III.1988

УДК 539.3 : 534.26

ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СОСТЫКОВАННЫХ УПРУГИХ ПОЛУПОЛОС

Гетман И. П., Лисицкий О. Н.

Приводится численное решение задачи о падении плоской гармонической волны на границу раздела двух состыкованных полуполос с различными упругими свойствами. Дается детальный анализ отражения и прохождения энергии падающей волны через границу раздела, исследуется характер напряженно-деформированного состояния в ее окрестности. Изучение волновых полей в продольно-неоднородных средах ранее проводилось в работах [1—3] и др.

1. Рассмотрим бесконечную полосу толщиной $2h$. Свяжем с ней декартову систему координат x, z так, что ось z ортогональна границам полосы, а ось x совпадает с ее срединной линией. Пусть плоская граница $x = 0$ — линия раздела свойств материала, λ_k, μ_k, ρ_k — модули упругости и плотность материала слева от границы раздела ($x < 0$, $k = 1$) и справа от нее ($x > 0$, $k = 2$). Будем считать, что границы полосы $z = \pm h$ свободны от напряжений.

Введем в рассмотрение четырехмерный вектор $\mathbf{W} = (u, w, \sigma, \tau)^T$, характеризующий волновое поле в полосе. Здесь $u = u_x$, $w = u_z$ — компоненты вектора перемещений, $\sigma = \sigma_{xx}$, $\tau = \tau_{xz}$ — соответствующие компоненты тензора напряжений.

Пусть на границу раздела из $x = -\infty$ падает плоская нормальная волна Лэмба единичной амплитуды: $\mathbf{W}_j^{(1)}(z, \gamma_j^{(1)}) \exp[i(\gamma_j^{(1)}x - \Omega t)]$, где $\Omega = \omega h/c$ — безразмерная частота ($c = \max\{\sqrt{\mu_1/\rho_1}, \sqrt{\mu_2/\rho_2}\}$), $\gamma_j^{(1)}$ — j-е волновое число, связанное с Ω дисперсионным уравнением Релея — Лэмба [4], $\mathbf{W}_j^{(1)}$ — четырехмерный вектор, компоненты которого для волны сжатия — растяжения определяются соотношениями

$$u_j = i\gamma_j(\operatorname{ch}\alpha_1 z - S_j\alpha_2^{-1}\operatorname{ch}\alpha_2 z)$$

$$w_j = \gamma_j^2\alpha_1^{-1}\operatorname{sh}\alpha_1 z - S_j\operatorname{sh}\alpha_2 z$$

$$\tau_j = \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial z} + i\gamma_j w_j\right), \quad \sigma_j = i\gamma_j(\lambda + 2\mu)u_j + \lambda\frac{\partial w_j}{\partial z}$$

$$\alpha_1^2 = \gamma_j^2 - \frac{\rho\Omega^2}{\mu}, \quad \alpha_2^2 = \gamma_j^2 - \frac{\rho\Omega^2}{\lambda + 2\mu}$$

$$S_j = \frac{\alpha_1^2 + \gamma_j^2}{2\alpha_1}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha_1 h}{\operatorname{sh}\alpha_2 h}$$

Индекс $k = 1, 2$ в круглых скобках указывает на принадлежность величины к среде, находящейся соответственно слева и справа от границы раздела свойств материала.