

с дифференцируемой функцией Гамильтона $H(X)$. Предположим, что

$$\begin{aligned} X &= \gamma + \omega M, \quad \gamma, M \in R^3 \\ (3.2) \quad H(X) &= \varphi(\gamma, M) + \omega \psi(\gamma, M) \end{aligned}$$

Так как функция (3.2) дифференцируема, то в силу условий (1.2)

$$(3.3) \quad \partial H / \partial X = \partial \varphi / \partial \gamma + \omega \partial \psi / \partial \gamma = \partial \psi / \partial M + \omega \partial \psi / \partial \gamma$$

Подставляя соотношения (3.3) в уравнения (3.1) и разделяя в них действительные и ω -мнимые части, имеем

$$(3.4) \quad \gamma' = \gamma \times \partial \psi / \partial M + kM \times \partial \psi / \partial \gamma, \quad M' = M \times \partial \psi / \partial M + \gamma \times \partial \psi / \partial \gamma$$

При $k = 0$ уравнения (3.4) представляют собой систему уравнений Гамильтона на шестимерной алгебре Ли $e(3)$ [2]. Как известно, уравнения такого вида описывают движение ряда механических систем: твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном поле сил, твердого тела в идеальной жидкости. Уравнения (3.4) допускают два тривиальных первых интеграла: $J_1 = M \cdot \gamma$, $J_2 = \gamma^2 + kM^2$. Ограничение потока (3.4) на их неособый совместный уровень $J_{12}(p, l) = \{J_1 = p, J_2 = l\}$ описывается системой уравнений Гамильтона с двумя степенями свободы. Для интегрируемости системы вида (3.4) в общем случае недостает одного дополнительного интеграла. В данном случае, когда $\psi = \text{Im}_\omega H$ такой дополнительный интеграл существует и имеет вид $\varphi = \text{Re}_\omega H$.

Идея применения расширений поля действительных чисел для интегрирования уравнений движения механических систем восходит к Аппелю и Лекорню (см. [3]). Применению методов винтового исчисления к интегрированию уравнений вида (3.4) посвящена работа [4], в которой рассмотрен случай, когда функция (3.2) квадратична.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диментберг Ф. М. Винтовое исчисление и его приложения в механике. М.: Наука. 1965. 199 с.
2. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук (УМН). 1982. Т. 27. Вып. 5. С. 3—49.
3. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз. 1960. 515 с.
4. Буров А. А., Рубановский В. Н. Об одном новом решении уравнений типа Кирхгофа — Клебша // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1987. С. 83—86.

Москва

Поступила в редакцию
14.III.1988

УДК 531.36 + 62—50

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ЗАДАЧЕ ИМПУЛЬСНОЙ КОРРЕКЦИИ ДВИЖЕНИЯ

Корнеев В. А.

Рассматривается минимаксная задача коррекции движения динамической системы, подверженной воздействию возмущающих сил, ограниченных по величине. Корректирующее воздействие осуществляется в виде импульсного управления с ограничениями на величину суммарного импульса и на число импульсов. Данная постановка моделирует задачу об импульсной коррекции движения летательного аппарата при наличии внешних возмущений. Рассматриваемая задача является по существу дифференциально-импульсной игрой [1], в которой игрок, распоряжающийся коррекцией, стремится обеспечить себе гарантированный минимум терминального функционала. Следуя методике работы [2], для задачи с изотропной динамикой численно построен оптимальный синтез моментов коррекции. Данная работа примыкает к исследованиям [3—5].

Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой на интервале времени $[t_0, T]$ задано векторными дифференциальными уравнениями с начальными условиями

$$(1) \quad \dot{x} = y, \quad y' = u + v, \quad x(t_0) = x^0, \quad y(t_0) = y^0$$

Здесь x, y, u, v — векторы одинаковой размерности. Реализации управляющего воздействия $u(t)$ импульсные, а реализации помехи $v(t)$ предполагаются интегрируемыми и удовлетворяют ограничениям

$$(2) \quad u(t) = \sum_{k=1}^N u_k \delta(t - t_k), \quad t_0 \leq t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = T, \quad |v(t)| \leq 1$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция, а t_1, \dots, t_N — моменты коррекции, выбираемые предварительно или в процессе движения. Величина Q характеризует суммарные возможности коррекции. Предполагаем, что коррекция должна обеспечить минимум величины

$$(3) \quad J = |x(T)|$$

В данной работе используется минимаксный (игровой) подход, и корректирующее воздействие $u(t)$ строится в расчете на наихудшую реализацию помехи $v(t)$. Такой способ корректирующего воздействия находится из условия $\min_u \max_v J$. Здесь максимизация проводится по реализациям помехи $v(t)$ из класса кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих ограничению из (2), а минимизация — по классу допустимых синтезирующих (позиционных) управлений.

Опишем класс допустимых позиционных управлений u . Текущее состояние системы задается позицией (z', q, t, k) , где $z' = (x, y)$, $t \in [t_0, T]$, $k = 0, 1, \dots, N$, а q — суммарная интенсивность на разрешенные k импульсов, удовлетворяющая ограничению $q \in [0, Q]$. Позиционное управление (синтез) задается в пространстве (z', q, t) сигнальными поверхностями Γ_k , разделяющими рассматриваемую область этого пространства для каждого $k = 1, \dots, N$ на два множества G_k и D_k , и функциями $u_k = u_k(z', q, t)$, $|u_k(z', q, t)| \leq q$. В области G_k по определению $u_k(z', q, t) = 0$. Поверхность Γ_k принадлежит границе замкнутого множества D_k . Совокупность (u_k, Γ_k) , $k = 1, \dots, N$ называется допустимым синтезом и обозначается u .

Определим функцию Беллмана $S_k(z', q, t)$, $k = 0, 1, \dots, N$, $z \in E^n$, $q \in [0, Q]$, $t \in [t_0, T]$ равенствами

$$(4) \quad S_k(z', q, t) = \min_u \sup_v J, \quad S_0(z', q, t) = J$$

в предположении, что минимум существует. Экстремумы в (4) вычисляются по тем частям допустимых синтезов и помех, которые определяют движение из позиции (z', q, t, k) .

Сделаем замену переменной $z(t) = x(t) + (T - t)y(t)$. Вводя новую независимую переменную t' равенствами $T' - t' = (T - t)^2/2$, $T' = T^2/2$ и определяя величины u_k' , Q' по формулам $u_k' = \sqrt{2}u_k$, $k = 1, \dots, N$, $Q' = \sqrt{2}Q$, убеждаемся, что задачу (1)–(3) можно записать в виде

$$(5) \quad dz/dt = (T - t)^{1/2} u + v, \quad 0 \leq t \leq T, \quad |v| \leq 1$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^N u_k \delta(t - t_k), \quad \sum_{k=1}^N |u_k| \leq Q, \quad J = |z(T)|$$

При выводе соотношений (5) учтено равенство $(2(T' - t_i'))^{1/2} \delta(t' - t_i') = \delta(t - t_i)$. Здесь и далее штрих у величин T, t, t_k, u_k, Q для простоты опускаем.

В работе [2] показано, что функция Беллмана в задаче (5) представима в виде

$$(6) \quad S_k(|z|, q, \tau) = |z| \varphi_k(\xi, \eta), \quad \tau = T - t, \quad \xi = \tau/|z|$$

$$\eta = q|z|^{-1/2}, \quad \varphi_k(\xi, \eta) = (1 + \xi) F_k(\eta(1 + \xi)^{-1/2}), \quad k = 0, \dots, N$$

где F_k — функции одной переменной. При этом границы Γ_k и функции F_k связаны рекуррентными соотношениями. Значения функции F_k при известных F_{k-1} , Γ_k определяются формулами

$$(7) \quad F_k(\eta(1 + \xi)^{-1/2}) = \xi(1 + \xi)^{-1} F_{k-1}((\rho - 1)/\xi)$$

$$(\xi, \eta) \in \Gamma_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad \rho = \xi^{1/2} \eta$$

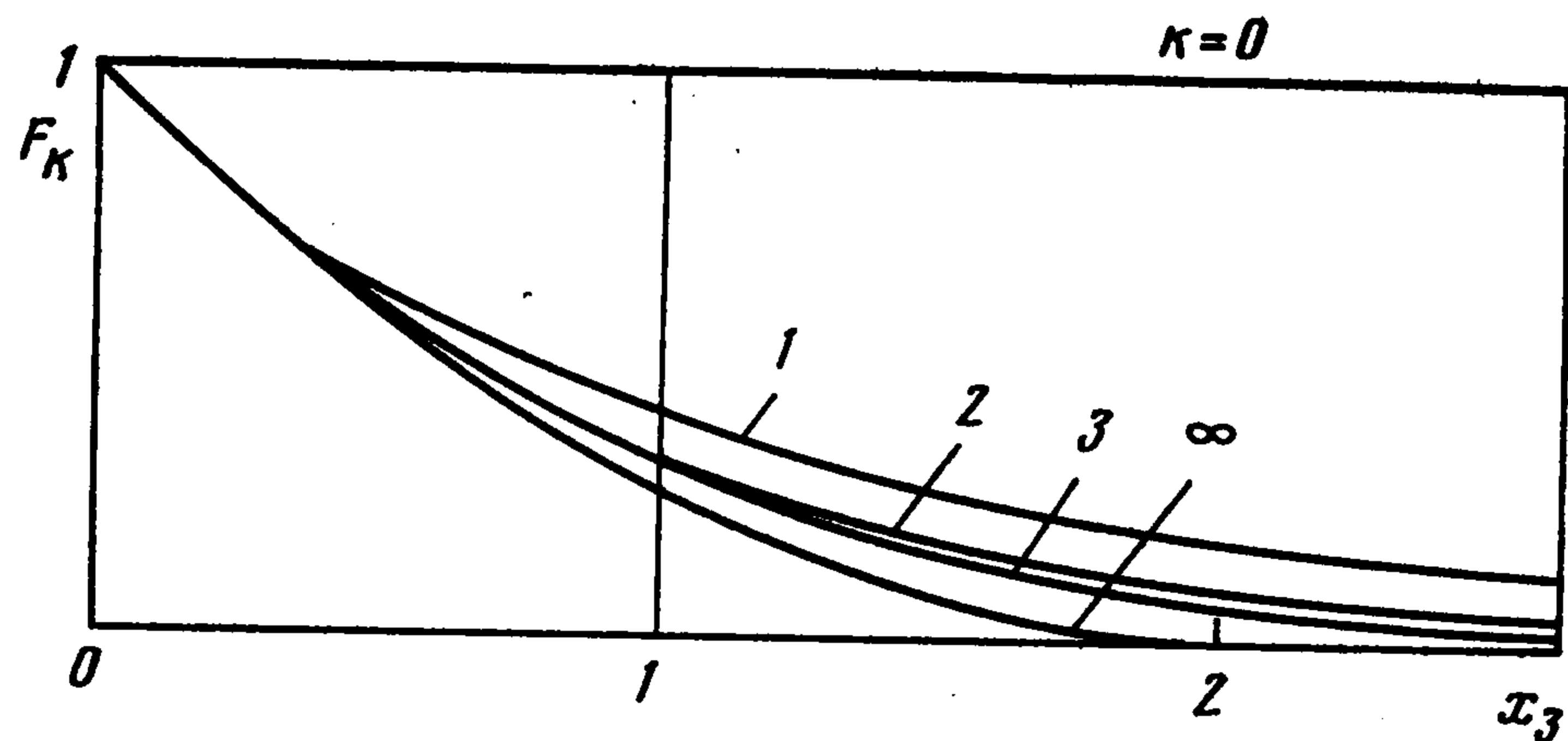
а граница Γ_k в свою очередь при известной F_{k-1} задается дифференциальным равенством

$$(8) \quad F_{k-1}((\rho - 1)/\xi) + \xi^{-1} [1 + \xi - \rho/2] F'_{k-1}((\rho - 1)/\xi) = 0$$

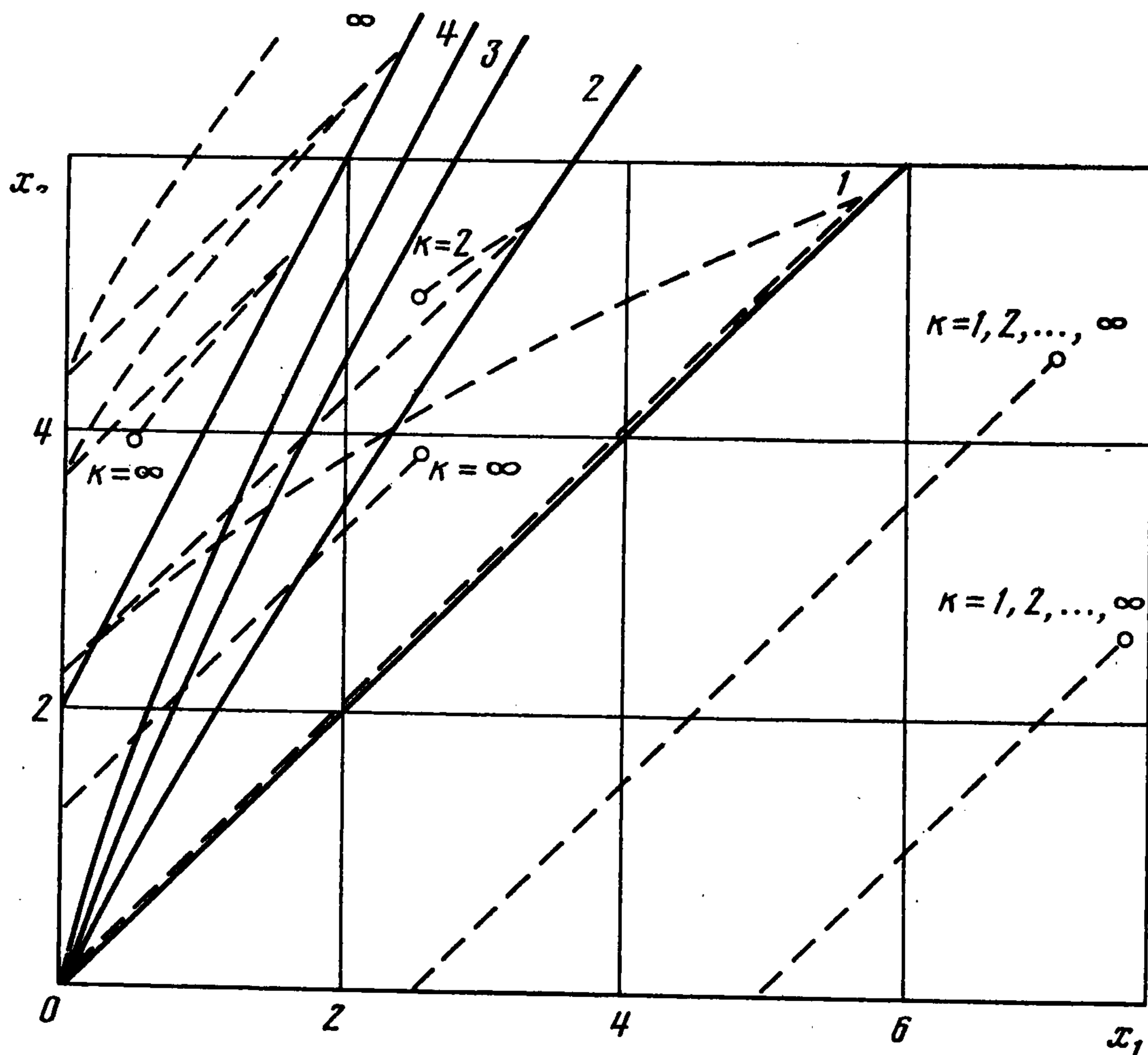
Начальные данные для равенств (7), (8) имеют вид

$$(9) \quad F_k(0) = 1, \quad k = 0, 1, \dots, \infty, \quad F_0 \equiv 1, \quad F_1(\xi^{-1/2}(1 + \xi)^{-1/2}) = \xi/(1 + \xi),$$

$$0 \leq \xi \leq \infty, \quad \Gamma_1 = \{(\xi, \eta): \xi^{1/2} \eta = 1\}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

причем $D_1 = \{(\xi, \eta) : \xi^{1/2}\eta \leq 1\}$, $G_1 = \{(\xi, \eta) : \xi^{1/2}\eta > 1\}$. Из соотношений (7)–(9) можно последовательно определить $F_1, \Gamma_2, F_2, \Gamma_3, \dots, F_k, \Gamma_{k+1}, \dots$. После этого становятся известны области D_k, G_k . Величины S_k затем определяются равенствами (6), а величины u_k задаются формулами

$$u_k = -qz/|z|, \quad (z, q, \tau) \in D_1$$

$$u_k = -z/\tau^{1/2}, \quad (z, q, \tau) \in D_k/D_1, \quad k = 1, \dots, N$$

Введем скалярные переменные y_1, y_2, y_3 равенствами

$$(10) \quad y_1 = \xi^{-1}, \quad y_2 = \eta \xi^{-1/2} - \xi^{-1}, \quad y_3 = \eta (1 + \xi)^{-1/2}$$

Соотношения (7)–(9) в переменных y_1, y_2 имеют вид

$$(11) \quad F_k(y_3) = \frac{F_{k-1}(y_2)}{1 + y_1}, \quad (y_1, y_2) \in \Gamma_k, \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{(y_1 + 1)^{1/2}}, \quad k = 1, \dots, N$$

$$(12) \quad y_1 = y_2 - 2 - 2F_{k-1}(y_2)/F'_{k-1}(y_2), \quad k = 2, \dots, N$$

$$(13) \quad F_k(0) = 1, \quad k = 0, 1, \dots, \infty, \quad F_0 \equiv 1, \quad F_1\left(\frac{y_1}{(y_1 + 1)^{1/2}}\right) = \frac{1}{1 + y_1}$$

$$0 \leq y_1 \leq \infty, \quad \Gamma_1 = \{(y_1, y_2) : y_2 \equiv 0, 0 \leq y_1 \leq \infty\}$$

При помощи соотношений (11)–(13) было проведено численное построение двух семейств кривых: графиков функций $F_k(y_3)$ и границ Γ_k . Результаты расчета в переменных x_1, x_2, x_3 , где $x_1 = y_1, x_2 = y_1 + y_2, x_3 = y_3$, для некоторых значений индекса k приведены на фиг. 1, 2. Переменные x_1, x_2 имеют наглядный смысл и связаны с пере-

менными $|z|$, τ , q равенствами $x_1 = |z|/\tau$, $x_2 = q/\tau^{1/2}$. Функция

$$F_\infty(x_3) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2-x_3)^2, & 0 \leq x_3 < 2 \\ 0, & x_3 \geq 2 \end{cases}$$

изображена на фиг. 1 и удовлетворяет предельному соотношению $F_\infty = \lim F_k$ при $k \rightarrow \infty$.

Сплошными линиями на фиг. 2 изображены линии Γ_k , при этом номер линии отвечает значению индекса k . Ломаная линия $\Gamma_\infty = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 2\} \cup \{(x_1, x_2) : x_2 = 2x_1 + 2, 0 \leq x_1 \leq \infty\}$, изображенная на фиг. 2 удовлетворяет предельному соотношению $\Gamma_\infty = \lim \Gamma_k$ при $k \rightarrow \infty$. На фиг. 2 точки множества $M = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0 \cup x_2 \geq 0\}$ над кривыми Γ_k составляют области G_k , а множества D_k состоят из точек множества M под кривыми Γ_k и включают в себя Γ_k . На фиг. 2 для некоторых значений параметра k штриховыми линиями изображены траектории движения точки (x_1, x_2) , полученные в результате применения алгоритма коррекции, описанного выше, при наилучшем действии помехи. Начальные точки этих траекторий отмечены кружком, рядом приведены соответствующие значения параметра k .

Оптимальный синтез для случая $k = \infty$ описывается кривой Γ_∞ , определяющей D_∞ и G_∞ . Особенность работы алгоритма в этом случае состоит в том, что после очередного импульса в качестве сигнальной кривой используется одна и та же линия Γ_∞ . Для начальных значений параметров x_1, x_2, k , удовлетворяющих соотношениям $x_2 \geq x_1 + 2, k = \infty$, такой алгоритм коррекции отличается от алгоритма, полученного предельным переходом (при $N \rightarrow \infty$, [1]) в программной задаче. Указанная неоднозначность объясняется избытком ресурса коррекции Q , при котором можно добиться полной коррекции ($J = 0$) многими разными способами.

Таким образом, решение задачи синтеза (5) при заданном числе моментов подачи импульсов N определяется значениями двух непрерывных параметров и индекса k . В качестве непрерывных параметров для задачи (5) могут быть выбраны скалярные величины x_1, x_2 . В работе [1] построение синтеза для задачи (5) проведено путем вычисления первого момента подачи импульсов t_1^* как функции ϑ от параметров $|z^0|, N, Q, t_0$. При этом полагалось $z^0 = 0, T = 1$, а в качестве двух параметров игры, определяющих решение задачи синтеза при заданном N были взяты значение функции ϑ и величина Q . Из соотношений (5)–(7), (10) можно получить, что функции $\vartheta_N(Q)$, изображенные на с. 78 книги [1], могут быть найдены из кривых фиг. 2 путем преобразования

$$(14) \quad \vartheta = 1 - (1 + x_1)^{-1/2}, \quad Q = x_2 (1 + x_1)^{-1/2}/2$$

При помощи преобразования (14) кривой Γ_∞ можно получить кривую $\vartheta_\infty(Q)$, являющуюся предельным положением кривых $\vartheta_N(Q)$ при $N \rightarrow \infty$. Кривая $\vartheta_\infty(Q)$ задается соотношением

$$\vartheta_\infty(Q) = \begin{cases} 0, & 0 \leq Q \leq 1 \\ 1 - 1/Q, & 1 < Q \leq \infty \end{cases}$$

Автор благодарит А. А. Меликяна за постановку задачи и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
2. Меликян А. А. Игровая задача синтеза многоимпульсной коррекции движения // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 783–791.
3. Ананьев Б. И., Куржанский А. Б., Шелементьев Г. С. Минимаксный синтез в задачах импульсного наведения и коррекции движения // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 3–13.
4. Корнеев В. А., Меликян А. А. Дифференциальная игра с импульсным управлением одного игрока // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 354–357.
5. Корнеев В. А., Меликян А. А. Дифференциально-импульсная игра сближения // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 210–218.