Из второго равенства (10) и (11) при условии $dt > 0$ получаем

$$t = t_0 + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{u^2\, d\tau}{[1 - H^{-1}(V(u^2) - u^2 g(u^2))]^{1/2}}$$

Соотношения (11) и (12) определяют точное параметрическое решение задачи Коши уравнения (10).

Автор благодарит В. Г. Демина и И. И. Косенко за обсуждение основных результатов работы на семинаре по классической механике в МГУ им. М. В. Ломоносова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демин В. Г.* О почти круговых орбитах искусственных спутников Земли // Искусственные спутники Земли. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Вып. 8. С. 55—63.
2. *Бэттин Р.* Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966. 448 с.
3. *Рой А.* Движение по орбитам. М.: Мир, 1981. 544 с.
4. *Гутер Р. С., Янпольский А. Р.* Дифференциальные уравнения. М.: Высш. шк., 1976. 304 с.
5. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1983, 176 с.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
7. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию 18.II.1988

УДК 531.01

О ПРИМЕНЕНИИ РАСШИРЕНИЙ ПОЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Буров А. А.

При помощи методов, основанных на расширениях поля действительных чисел, указываются некоторые классы вполне интегрируемых гамильтоновых систем.

1. Пусть R_ω — расширение поля действительных чисел, образованное числами вида

(1.1) $\qquad w = u + \omega v \quad u, v \in R$

где, по определению, ω — символ, удовлетворяющий условию $\omega^2 = k$, $k \in R$. Для чисел $w_1, w_2 \in R_\omega$ естественным образом определены операции сложения, вычитания и умножения

$$w_1 \pm w_2 = (u_1 \pm u_2) + \omega\,(v_1 \pm v_2)$$

$$w_1 \cdot w_2 = (u_1 u_2 + k v_1 v_2) + \omega\,(u_1 v_2 + u_2 v_1)$$

Деление определено для всех чисел w_1, w_2 таких, что $w_2 \notin R_{\omega 0} = \{w : u^2 - kv^2 = 0,\ u, v \in R\}$, при этом

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{u_1 u_2 - k v_1 v_2}{u_2^2 - k v_2^2} + \omega \frac{u_2 v_1 - u_1 v_2}{u_2^2 - k v_2^2}$$

Если $k = -1$, то множество R_ω совпадает с полем комплексных чисел. Если $k = 0$, то числа из R_ω представляют собой объект исследования винтового исчисления [1]. При $k < 0$ множество $R_{\omega 0}$ состоит лишь из одного числа $w = 0 + \omega 0$. При $k \geqslant 0$ это множество образовано делителями нуля из R_ω. Введем обозначения: $u = \mathrm{Re}_\omega w$ — действительная часть, $\omega v = \omega\, \mathrm{Im}_\omega w$ — ω-мнимая часть числа.

Определение. Функция f, заданная в некоторой области $G \in R_\omega$, называется дифференцируемой в точке $w_0 \in G$, если для любого $\delta > 0$ существует предел

$$\frac{\partial f(w_0)}{\partial w} = \lim_{h \to 0} \frac{f(w_0 + h) - f(w_0)}{h}, \quad h \notin \left\{ w : \left| \frac{u^2}{v^2} - k \right| < \delta \right\}$$

не зависящий от способа стремления величины h к нулю и от параметра δ.

Определение дифференцируемости стандартным образом распространяется на случай, когда функция определена в области $G \in R_\omega{}^n = R_\omega \times \ldots \times R_\omega$. При этом, если $w_i = u_i + \omega v_i$, $i = 1, \ldots, n$, то для дифференцируемости функции

$$f(w_1, \ldots, w_n) = \lambda(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) + \omega\nu(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$$

требуется выполнение условий

$$\partial\lambda/\partial u_i = \partial\nu/\partial v_i, \quad \partial\lambda/\partial v_i = k\partial\nu/\partial u_i \tag{1.2}$$

аналогичных условиям Коши — Римана в теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{w}^{\cdot} = \mathbf{G}(\mathbf{w}) \qquad \mathbf{w} \in R_\omega{}^l \tag{1.3}$$

Если $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \omega\mathbf{v}$, $\mathbf{G}(\mathbf{w}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega\mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, то система (1.3) представима в виде

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \ \mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^l \tag{1.4}$$

Утверждение. Пусть дифференцируемая функция

$$F(\mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega\,\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{1.5}$$

— первый интеграл уравнений (1.3). Тогда $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — первые интегралы уравнений (1.4).

Доказательство. Функция $F(\mathbf{w})$ — первый интеграл уравнений (1.3). Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{w}} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{w}) = \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + k\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right) \equiv 0$$

Используя соотношения (1.2) и разделяя действительную и ω-мнимую части, имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv 0$$

Следовательно, $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ и $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — первые интегралы уравнений (1.5).

2. Рассмотрим систему уравнений Гамильтона

$$\mathbf{Q}^{\cdot} = \partial H/\partial P, \ \mathbf{P}^{\cdot} = -\partial H/\partial \mathbf{Q} \qquad \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in R_\omega{}^n \tag{2.1}$$

с дифференцируемой функцией Гамильтона $H(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

Утверждение. Если

$$k \neq 0, \ P_i = p_i + \omega p_{i+n}, \ Q_i = q_i + \omega q_{i+n}, \ i = 1, \ldots, n$$

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \varphi_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \omega\psi_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

то система (2.1) представима в виде

$$q_i^{\cdot} = \partial\varphi_0/\partial p_i, \ p_i^{\cdot} = -\partial\varphi_0/\partial q_i \tag{2.2}$$

$$\dot{q}_{i+n} = k^{-1}\partial\varphi_0/\partial p_{i+n}, \quad \dot{p}_{i+n} = -k^{-1}\partial\varphi_0/\partial q_{i+n}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Доказательство. Функция $H(P, Q)$ дифференцируема. Следовательно, в силу соотношений (1.2)

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial p_i} + \omega k^{-1}\frac{\partial\varphi_0}{\partial p_{i+n}}, \quad \frac{\partial H}{\partial Q_i} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i} + \omega k^{-1}\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_{i+n}} \tag{2.3}$$

Подставляя соотношения (2.3) в уравнения (2.1) и разделяя в них действительную и ω-мнимую части, получим требуемые соотношения.

Уравнения (2.2) представляют собой систему уравнений Гамильтона с $2n$ степенями свободы, причем при $k = 1$ симплектическая структура оказывается канонической. При этом, если система (2.1) обладает полным набором дифференцируемых коммутирующих первых интегралов $J_0 = H, J_1, \ldots, J_{n-1}$, функции $\varphi_i = \mathrm{Re}_\omega J_i$, $\psi_i = \mathrm{Im}_\omega J_i$ функционально независимы, то система (2.2) обладает полным набором коммутирующих между собой первых интегралов и является вполне интегрируемой.

3. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{X}^{\cdot} = \mathbf{X} \times \partial H/\partial \mathbf{X}, \ \mathbf{X} \in R_\omega{}^3 \tag{3.1}$$

с дифференцируемой функцией Гамильтона H ($\mathbf{X}$). Предположим, что

$$\mathbf{X} = \gamma + \omega\mathbf{M}, \ \gamma, \mathbf{M} \in R^3$$

$$H(\mathbf{X}) = \varphi(\gamma, \mathbf{M}) + \omega\psi(\gamma, \mathbf{M}) \tag{3.2}$$

Так как функция (3.2) дифференцируема, то в силу условий (1.2)

$$\partial H/\partial \mathbf{X} = \partial\varphi/\partial\gamma + \omega\partial\psi/\partial\gamma = \partial\psi/\partial\mathbf{M} + \omega\partial\psi/\partial\gamma \tag{3.3}$$

Подставляя соотношения (3.3) в уравнения (3.1) и разделяя в них действительные и ω-мнимые части, имеем

$$\gamma^{\cdot} = \gamma \times \partial\psi/\partial\mathbf{M} + k\mathbf{M} \times \partial\psi/\partial\gamma, \quad \mathbf{M}^{\cdot} = \mathbf{M} \times \partial\psi/\partial\mathbf{M} + \gamma \times \partial\psi/\partial\gamma \tag{3.4}$$

При $k = 0$ уравнения (3.4) представляют собой систему уравнений Гамильтона на шестимерной алгебре Ли e (3) [2]. Как известно, уравнения такого вида описывают движение ряда механических систем: твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном поле сил, твердого тела в идеальной жидкости. Уравнения (3.4) допускают два тривиальных первых интеграла: $J_1 = \mathbf{M}\cdot\gamma$, $J_2 = \gamma^2 + k\mathbf{M}^2$. Ограничение потока (3.4) на их неособый совместный уровень $J_{12}(p, l) = \{J_1 = p, J_2 = l\}$ описывается системой уравнений Гамильтона с двумя степенями свободы. Для интегрируемости системы вида (3.4) в общем случае недостает одного дополнительного интеграла. В данном случае, когда $\psi = \mathrm{Im}_\omega H$ такой дополнительный интеграл существует и имеет вид $\varphi = \mathrm{Re}_\omega H$.

Идея применения расширений поля действительных чисел для интегрирования уравнений движения механических систем восходит к Аппелю и Лекорню (см. [3]). Применению методов винтового исчисления к интегрированию уравнений вида (3.4) посвящена работа [4], в которой рассмотрен случай, когда функция (3.2) квадратична.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диментберг Ф. М.* Винтовое исчисление и его приложения в механике. М.: Наука. 1965. 199 с.
2. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук (УМН). 1982. Т. 27. Вып. 5. С. 3—49.
3. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз. 1960. 515 с.
4. *Буров А. А., Рубановский В. Н.* Об одном новом решении уравнений типа Кирхгофа — Клебша // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1987. С. 83—86.

Москва

Поступила в редакцию
14.III.1988

УДК 531.36 + 62—50

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ЗАДАЧЕ ИМПУЛЬСНОЙ КОРРЕКЦИИ ДВИЖЕНИЯ

Корнеев В. А.

Рассматривается минимаксная задача коррекции движения динамической системы, подверженной воздействию возмущающих сил, ограниченных по величине. Корректирующее воздействие осуществляется в виде импульсного управления с ограничениями на величину суммарного импульса и на число импульсов. Данная постановка моделирует задачу об импульсной коррекции движения летательного аппарата при наличии внешних возмущений. Рассматриваемая задача является по существу дифференциально-импульсной игрой [1], в которой игрок, распоряжающийся коррекцией, стремится обеспечить себе гарантированный минимум терминального функционала. Следуя методике работы [2], для задачи с изотропной динамикой численно построен оптимальный синтез моментов коррекции. Данная работа примыкает к исследованиям [3—5].

Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой на интервале времени $[t_0, T]$ задано векторными дифференциальными уравнениями с начальными условиями

$$x^{\cdot} = y, \ y^{\cdot} = u + v, \ x(t_0) = x^\circ, \quad y(t_0) = y^\circ \tag{1}$$